4. **Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.** Динамические контактные задачи для ортотропной упругой полуплоскости и составной плоскости // ПММ.— 1990.— Т. 54, № 4.
5. **Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.** Метод граничных элементов.— М.: Мир, 1987.
6. **Ватульян А. О., Кацевич А. Я.** Колебания упругого ортотропного слоя с полостью // ПМТФ.— 1991.— № 1.

г. Ростов-на-Дону *Поступила 4/I 1992 г.*

УДК 531.534

А. И. Весницкий, А. В. Метрикин

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЕБАНИЙ ТЕЛА, РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩЕГОСЯ ПО ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ СИСТЕМЕ

При равномерном и прямолинейном движении источника возмущений в неоднородной среде возникает переходное излучение, имеющее место для волн различной природы. В [1, 2] дан обзор работ по переходному излучению электромагнитных и акустических волн. В [3] исследовано излучение упругих волн, возникающее при равномерном движении механического объекта по неоднородной упругой системе. Особенности переходного излучения в упругих системах связаны с взаимообусловленностью излучения и колебаний объекта, являющегося источником возмущений. В настоящей работе рассмотрен случай параметрического возбуждения колебаний объекта в процессе излучения.

Известно [1], что при движении источника возмущений в периодически неоднородной среде переходное излучение имеет в установившемся режиме дискретный спектр. В системе отсчета, связанной с движущимся источником возмущений, этот спектр оказывается эквидистантным. Таким образом, на равномерно движущийся по периодически неоднородной упругой системе объект в поперечном направлении действует сила, эквивалентная реакции пружины с периодически изменяющейся жесткостью. Такая ситуация, естественно, приводит к параметрическому возбуждению колебаний объекта [4], что и показано в данной работе. Необходимость изучения взаимодействия механического объекта с периодически неоднородными направляющими обусловлена, например, потребностями высокоскоростного железнодорожного транспорта. Движущийся по рельсовому пути состав при определенных условиях может начать «галопировать». В настоящей работе показано, что область параметров системы, при которых наступает «галопирование», расширяется с увеличением скорости движения состава.

1. Рассмотрим равномерное $z = vt$ движение тела массы m по бесконечной струне, натяжение и погонная плотность которой соответственно N и ρ, лежащей на периодически неоднородном упругом основании. Положим, что жесткость основания описывается выражением

$$k(z) = k_0(1 + \mu\cos(2\pi z/d)),$$

где k_0 — средняя жесткость; d — период неоднородности; $\mu \ll 1$ — безразмерный малый параметр.

Согласно [5], задача, описывающая самосогласованное движение тела и струны, имеет вид

$$(1.1)\qquad U_{tt} - U_{xx} + U(1 + \mu\cos(\varkappa x)) = 0,\ U(\alpha t,\ t) = y(t),$$
$$(1 - \alpha^2)\,[U_x]_{x=\alpha t} = M\ddot{y}(t),\ [U]_{x=\alpha t} = 0,\ U \to 0 \text{ при } x \to \pm\infty.$$

Здесь $U(x,\ t)$ — поперечное отклонение струны; $x = zh/c$ и $t = h\tau$ $(c^2 = N/\rho,\ h^2 = k_0/\rho)$ — безразмерные координата и время; $y(t)$ — поперечная координата тела; $M = mh/c\rho$ и $\alpha = v/c$ (в дальнейшем будем считать $\alpha < 1$) — его безразмерные масса и продольная скорость; $\varkappa = 2\pi c/dh$. Квадратные скобки означают разность между значениями выражений, стоящих в них, справа и слева от указанного x.

Решение (1.1) будем искать в виде

$$U = U^0 + \mu U^1 + \ldots, \quad y = y^0 + \mu y^1 + \ldots \tag{1.2}$$

2. В нулевом приближении ($\mu = 0$) из (1.2) получим задачу о движении тела по струне, лежащей на однородном упругом основании:

$$U^0_{tt} - U^0_{xx} + U^0 = 0, \quad U^0(\alpha t, t) = y^0(t), \tag{2.1}$$

$$(1 - \alpha^2)[U^0_x]_{x=\alpha t} = M\ddot{y}^0(t), \quad [U^0]_{x=\alpha t} = 0, \quad U^0 \to 0 \text{ при } x \to \pm\infty.$$

В качестве решения (2.1) естественно выбрать функцию, описывающую колебания системы тело — струна при $t \to \infty$. Для начала определим частоты колебаний тела при $t \to \infty$. С этой целью применим к (2.1) интегральное преобразование Фурье по координате

$$V^0(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} U^0(x, t) \exp(ikx)\, dx.$$

В изображениях получим уравнение

$$V^0_{tt} + (1 + k^2) V^0 = -M\ddot{y}(t) \exp(i\alpha kt). \tag{2.2}$$

Полагая начальные условия нулевыми (это допустимо, так как на данном этапе нас интересуют лишь собственные частоты колебаний тела), запишем решение (2.2) в виде свертки

$$V^0(k, t) = -M \int_0^t \ddot{y}^0(\tau) \exp(i\alpha kt) \frac{\sin\left((t - \tau)\sqrt{1 + k^2}\right)}{\sqrt{1 + k^2}}\, d\tau. \tag{2.3}$$

Применяя к (2.3) обратное преобразование Фурье, меняя порядок интегрирования и используя формулу [5]

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(kf) \frac{\sin\left(a\sqrt{b^2 + k^2}\right)}{\sqrt{b^2 + k^2}}\, dk = \frac{1}{2} J_0\left(b\sqrt{a^2 - f^2}\right) \theta(a - |f|)$$

(θ — единичная функция, J_0 — функция Бесселя нулевого порядка), имеем

$$U^0(x, t) = -\frac{M}{2} \int_0^t \ddot{y}^0(\tau) J_0\left(\sqrt{(t - \tau)^2 - (x - \alpha\tau)^2}\right) \theta((t - \tau) - |x - \alpha\tau|)\, d\tau. \tag{2.4}$$

Используя условие безотрывности движения тела, а также свойства операции свертки, из (2.4) находим уравнение, описывающее колебания тела (напомним, что $\alpha < 1$):

$$y^0(t) + \frac{M}{2} \int_0^t \ddot{y}^0(t - \tau) J_0\left(\tau\sqrt{1 - \alpha^2}\right) d\tau = 0. \tag{2.5}$$

Подставляя $y^0(t) = A \exp(i\Omega t)$ в (2.5) и устремляя $t \to \infty$, придем к уравнению, определяющему собственные частоты тела при $t \to \infty$:

$$1 - M\Omega^2/2\sqrt{1 - \alpha^2 - \Omega^2} = 0,$$

откуда

$$\Omega = \pm \frac{\sqrt{2}}{M} \sqrt{\sqrt{1 + M^2(1 - \alpha^2)} - 1}.$$

Следовательно, при $t \to \infty$ колебания тела, равномерно движущегося по струне, лежащей на однородном упругом основании, будут описываться выражением

$$(2.6)\qquad y^0(t)=A\exp(i\Omega t)+B\exp(-i\Omega t).$$

Колебания струны, соответствующие устанавливающимся при $t\to\infty$ колебаниям тела, легко найти, подставляя (2.6) в (2.1) и отыскивая решение полученной задачи в виде

$$(2.7)\qquad U(x,\,t)=\sum_n C_n\exp(i\omega_n t-ik_n x).$$

Поскольку процесс решения полностью аналогичен проведенному в [6, 7], запишем сразу окончательное выражение для $U^0(x,\,t)$:

$$(2.8)\qquad U^0=C_A\exp(i\omega_j t-ik_j x)+C_B\exp(i\omega_{j+2}t-ik_{j+2}x),$$

$$j=\begin{cases}\mathrm{II} & x<\alpha t,\\ \mathrm{I} & x>\alpha t,\end{cases}$$

$$k_{1,2}=(\alpha\Omega\pm i\sqrt{1-\alpha^2-\Omega^2})/(1-\alpha^2),\quad \omega_{1,2}=\alpha k_{1,2}+\Omega,$$

$$k_{3,4}=(-\alpha\Omega\pm i\sqrt{1-\alpha^2-\Omega^2})/(1-\alpha^2),\quad \omega_{3,4}=\alpha k_{3,4}-\Omega,$$

$$C_A=A\Omega^2/2\sqrt{1-\alpha^2-\Omega^2},\quad C_B=B\Omega^2/2\sqrt{1-\alpha^2-\Omega^2}.$$

Итак, при $t\to\infty$ равномерно движущемуся по однородной струне телу, колеблющемуся с частотой Ω, сопутствует прогиб струны, амплитуда осцилляций которого спадает с увеличением расстояния от тела.

3. Перейдем к анализу первого приближения по малому параметру μ. Подставляя (1.2) в (1.1) и приравнивая слагаемые порядка μ, получим

$$(3.1)\qquad U^1_{tt}-U^1_{xx}+U^1=-U^0\cos(\varkappa x),\quad U^1(\alpha t,\,t)=y^1(t),$$

$$(1-\alpha^2)\left[U^1_x\right]_{x=\alpha t}=M\ddot y^1(t),\quad [U^1]_{x=\alpha t}=0,\quad U^1\to 0\ \text{ при }\ x\to\pm\infty.$$

Решение (3.1) представляет собой суперпозицию вынужденного решения первого уравнения системы, которое определяет частоты колебаний движущейся массы, и решения, обусловленного этими колебаниями. Отыскивая решение первого уравнения (3.1) в виде (2.7), имеем

$$(3.2)\qquad U^1_{\text{вын}}=C^j_1\exp(i\omega_j t-ix(k_j+\varkappa))+C^j_2\exp(i\omega_j t-ix(k_j-\varkappa))+$$

$$+C^j_3\exp(i\omega_{j+2}t-ix(k_{j+2}-\varkappa))+C^j_4\exp(i\omega_{j+2}t-ix(k_{j+2}+\varkappa)),$$

где $C^j_{1,2}=-C_A/2k_j(k_j\pm 2\varkappa)$; $C^j_{4,3}=-C_B/2k_{j+2}(k_{j+2}\pm 2\varkappa)$.

Как уже отмечалось выше, решение (3.2) определяет частоты колебаний движущейся массы, так как фазы распространяющихся в струне волн при $x=\alpha t$ должны совпадать с фазами колебаний массы. Используя это, для $y^1(t)$ запишем

$$(3.3)\qquad y^1(t)=\sum_{m=1}^{2}\{A_m\exp\left(it\left(\Omega+(-1)^m\alpha\varkappa\right)\right)+$$

$$+A_{m+2}\exp\left(-it\left(\Omega+(-1)^m\alpha\varkappa\right)\right)\}.$$

Колебания движущейся массы порождают, в свою очередь, соответствующие колебания струны. Подставляя (3.3) в (3.1) и отыскивая решение полученной задачи в виде бегущих волн (2.7), получим решение, описывающее колебания струны, возбуждаемые колеблющейся по закону (3.3) равномерно движущейся массой:

$$(3.4)\qquad U^1_{\text{собств}}=D^j_1\exp\left(i\omega^1_j t-ik^1_j x\right)+D^j_2\exp\left(i\omega^1_{j+2}t-ik^1_{j+2}x\right)+$$

$$+D^j_3\exp\left(i\omega^1_{j+4}t-ik^1_{j+4}x\right)+D^j_4\exp\left(i\omega^1_{j+6}t-ik^1_{j+6}x\right).$$

Здесь

$$k^1_{1,2}=\left(\alpha(\Omega-\alpha\varkappa)\pm i\sqrt{1-\alpha^2-(\Omega-\alpha\varkappa)^2}\right)/(1-\alpha^2),\quad \omega_{1,2}=\alpha(k_{1,2}-\varkappa)+\Omega;$$

$$k^1_{3,4}=\left(\alpha(\Omega+\alpha\varkappa)\pm i\sqrt{1-\alpha^2-(\Omega+\alpha\varkappa)^2}\right)/(1-\alpha^2),\quad \omega_{3,4}=\alpha(k_{3,4}+\varkappa)+\Omega;$$

$$k^1_{5,6}=\left(-\alpha(\Omega+\alpha\varkappa)\pm i\sqrt{1-\alpha^2-(\Omega+\alpha\varkappa)^2}\right)/(1-\alpha^2),\quad \omega_{5,6}=\alpha(k_{5,6}-\varkappa)-\Omega;$$
$$k^1_{7,8}=\left(-\alpha(\Omega-\alpha\varkappa)\pm i\sqrt{1-\alpha^2-(\Omega-\alpha\varkappa)^2}\right)/(1-\alpha^2),\quad \omega_{7,8}=\alpha(k_{7,8}+\varkappa)-\Omega.$$

Для нахождения неизвестных A_n и D_n $(n=1,4)$ необходимо использовать условие безотрывности движения тела $U^1(\alpha t,\ t)=y^1(t)$, условие непрерывности струны в точке, где находится масса $[U^1]_{x=\alpha t}=0$ и баланс поперечных сил на движущейся массе $(1-\alpha^2)\left[U^1_x\right]_{x=\alpha t}=M\ddot{y}^1(t)$. Учитывая, что $U^1=U^1_{\text{вын}}+U^1_{\text{собств}}$, получим

$$(3.5)\quad A_n=\{(\sqrt{1-\alpha^2-(\Omega+(-1)^n\alpha\varkappa)^2}-\sqrt{1-\alpha^2-\Omega^2})(C^{\mathrm{I}}_n+C^{\mathrm{II}}_n)-$$
$$-(-1)^n i\varkappa(C^{\mathrm{I}}_n-C^{\mathrm{II}}_n)\}/\{2\sqrt{1-\alpha^2-(\Omega+(-1)^n\alpha\varkappa)^2}-M(\Omega+(-1)^n\alpha\varkappa)^2\}$$
$$D_n=A_n-C^{\mathrm{I}}_n.$$

Выражения (2.8), (3.2) и (3.4) описывают колебания струны, а соответственно и движущегося тела при $t\to\infty$, если величина $\alpha\varkappa$ не близка к удвоенной собственной частоте колебаний тела, движущегося по однородной струне Ω. В резонансном случае, когда выполнено условие $2\Omega=\pm\alpha\varkappa$, A_n и D_n стремятся к бесконечности (это легко увидеть из (3.5), если учесть, что Ω удовлетворяет уравнению $2\sqrt{1-\alpha^2-\Omega^2}-M\Omega^2=0$).

Следовательно, при параметрах системы, удовлетворяющих соотношению

$$(3.6)\qquad 2\Omega=\pm\alpha\varkappa+\delta_1$$

($\delta_1\ll\Omega$ — малая расстройка), полученное решение несправедливо. Заметим, что (3.6) аналогично условию параметрического резонанса в системе, описываемой уравнением Матье [4]

$$\ddot{x}+\omega_0^2(1+\cos(\omega_p t))=0.$$

Действительно, Ω является собственной частотой тела, равномерно движущегося по однородной струне, и соответствует собственной частоте ω_0 невозмущенной задачи Матье, а $\alpha\varkappa$ есть ни что иное как частота изменения параметра ω_p, так как именно с частотой $\alpha\varkappa$ изменяется жесткость упругого основания под равномерно движущейся со скоростью α массой.

Таким образом, (3.6) аналогично условию $2\omega_0=\omega_p+\delta_1$, при выполнении которого наступает классический параметрический резонанс (основная зона неустойчивости).

4. Рассмотрим резонансный случай, когда

$$(4.1)\qquad \varkappa=(2\Omega+\mu\delta)/\alpha.$$

Решение (1.1), согласно использованной в [4] для исследования параметрического резонанса схеме, будем искать в виде

$$(4.2)\quad y(t)=A(\tau)\exp(it(\Omega+\mu\delta))+B(\tau)\exp(-it(\Omega+\mu\delta))+\mu y^1(t),$$
$$U(x,\ t)=C^j_1(\tau,\xi)\exp(it(\omega_j+\mu\delta)-ik_jx)+C^j_2(\tau,\xi)\exp(it(\omega_{j+2}-\mu\delta)-$$
$$-ik_{j+2}x)+\mu U^1(x,t),$$

где $\tau=\mu t$; $\xi=\mu x$; ω_n и k_n $(n=1,4)$ определяются выражениями (2.8).

Подставляя (4.2) в первое уравнение (1.1), с точностью до слагаемых порядка μ получим

$$(4.3)\quad U^1_{tt}-U^1_{xx}+U^1=-2\exp(it(\omega_j+\mu\delta)-ik_jx)\{\omega_j(iC^j_{1\tau}-\delta C^j_1)+$$
$$+ik_jC^j_{1\xi}\}-2\exp(it(\omega_{j+2}-\mu\delta)-ik_{j+2}x)\{\omega_{j+2}(iC^j_{2\tau}+\delta C^j_2)+ik_{j+2}C^j_{2\xi}\}-$$
$$-\cos(\varkappa x)(C^j_1\exp(it(\omega_j+\mu\delta)-ik_jx)+C^j_2\exp(it(\omega_{j+2}-\mu\delta)-ik_{j+2}x)).$$

Для того чтобы $U^1(x,\ t)$ не нарастало во времени, как видно из (4.3), необходимо выполнение следующих условий:

$$(4.4)\quad \omega_j(iC^j_{1\tau}-\delta C^j_1)+ik_jC^j_{1\xi}=0,\quad \omega_{j+2}(iC^j_{2\tau}+\delta C^j_2)+ik_{j+2}C^j_{2\xi}=0.$$

Считая, что соотношения (4.4) выполнены, и отбрасывая те слагаемые в правой части (4.3), фаза которых при $x=\alpha t$ отлична от $it(\Omega-\alpha\varkappa)$ и $-it(\Omega-\alpha\varkappa)$ (или с учетом (4.1) от $it(\Omega+\mu\delta)$ и $-it(\Omega+\mu\delta)$), из (4.3) находим

$$U^1_{tt}-U^1_{xx}+U^1=-\frac{1}{2}C^j_1\exp(it(\omega_j+\mu\delta)-i(k_j+\varkappa)x)-\\ -\frac{1}{2}C^j_2\exp(it(\omega_{j+2}-\mu\delta)-i(k_{j+2}-\varkappa)x). \tag{4.5}$$

Решение (4.5), как и в нерезонансном случае, запишем в виде суперпозиции вынужденного и свободного решений:

$$U^1=U^1_{\text{вын}}+U^1_{\text{собств}}. \tag{4.6}$$

Здесь $U^1_{\text{вын}}=W^j_1\exp(it(\omega_j+\mu\delta)-i(k_j+\varkappa)x)+W^j_2\exp(it(\omega_{j+2}-\mu\delta)-i(k_{j+2}-\varkappa)x)$;

$$W^j_{1,2}=-C^j_{1,2}/\{2\varkappa(\varkappa\pm 2k_{j,j+2})\}.$$

Перейдем к анализу баланса поперечных сил, действующих на движущуюся массу. Подставляя в уравнение

$$(1-\alpha^2)[U_x]_{x=\alpha t}=M\ddot{y}(t),$$

записанное согласно (1.1), $U(x,t)$ и $y(t)$ в виде (4.2), ограничиваясь слагаемыми порядка μ и учитывая (4.6), имеем

$$(1-\alpha^2)[U^1_{x\,\text{собств}}]_{x=\alpha t}-M\ddot{y}(t)=\exp(it(\Omega+\mu\delta))\{2\Omega M(i\dot{A}-\delta A)-\\ -(1-\alpha^2)(C^{\mathrm{II}}_{1\xi}-C^{\mathrm{I}}_{1\xi}-i(k_4-\varkappa)W^{\mathrm{II}}_2+i(k_3-\varkappa)W^{\mathrm{I}}_2)\}+\exp(-it(\Omega+\mu\delta))\times\\ \times\{-2\Omega M(i\dot{B}+\delta B)-(1-\alpha^2)(C^{\mathrm{II}}_{2\xi}-C^{\mathrm{I}}_{2\xi}-i(k_2+\varkappa)W^{\mathrm{II}}_1+i(k_1+\varkappa)W^{\mathrm{I}}_1)\}. \tag{4.7}$$

Поскольку частота собственных колебаний массы равна Ω, то, для того чтобы $y^1(t)$ не нарастало во времени, выражения в фигурных скобках в (4.7) должны обращаться в нуль, т. е. должны быть справедливы соотношения

$$2\Omega M(i\dot{A}-\delta A)-(1-\alpha^2)(C^{\mathrm{II}}_{1\xi}-C^{\mathrm{I}}_{1\xi}-i(k_4-\varkappa)W^{\mathrm{II}}_2+i(k_3-\varkappa)W^{\mathrm{I}}_2)=0,\\ -2\Omega M(i\dot{B}+\delta B)-(1-\alpha^2)(C^{\mathrm{II}}_{2\xi}-C^{\mathrm{I}}_{2\xi}-i(k_2+\varkappa)W^{\mathrm{II}}_1+\\ +i(k_1+\varkappa)W^{\mathrm{I}}_1)=0. \tag{4.8}$$

Соотношения (4.4) и (4.8) представляют собой необходимые условия ненарастания $U^1(x,t)$ и $y^1(t)$. Отыскивая решения (4.4) и (4.8) в виде

$$A(\tau)=A_0\exp(s\tau),\ B(\tau)=B_0\exp(s\tau),$$

$$C^j_1=C^j_{10}\exp(\lambda^j_1\tau-q^j_1\xi),\quad C^j_2=C^j_{20}\exp(\lambda^j_2\tau-q^j_2\xi)$$

и используя условия безотрывности движения тела и непрерывности струны, из которых следует

$$C_{10}=C_{10}=A_0,\quad C_{20}=C_{20}=B_0,\quad \lambda_{1,2}-\alpha q_{1,2}=s,$$

после некоторых алгебраических выкладок получим из (4.4) и (4.8) систему уравнений

$$\frac{2\Omega M}{1-\alpha^2}(is-\delta)A_0-\frac{4(\delta-is)}{M\Omega(1-\alpha^2)}A_0+\frac{M\Omega^2\alpha^2}{8(\alpha^2+\Omega^2)}B_0=0,\\ \frac{2\Omega M}{1-\alpha^2}(is+\delta)B_0+\frac{4(\delta+is)}{M\Omega(1-\alpha^2)}B_0-\frac{M\Omega^2\alpha^2}{8(\alpha^2+\Omega^2)}A_0=0. \tag{4.9}$$

Исходя из условия нетривиальности (4.9), для s находим характеристическое уравнение

$$s^2=-\delta^2+\frac{\alpha^4\Omega^2(1-\alpha^2)^2}{4^4(\alpha^2+\Omega^2)^2(1+2/M^2\Omega^2)^2}.$$

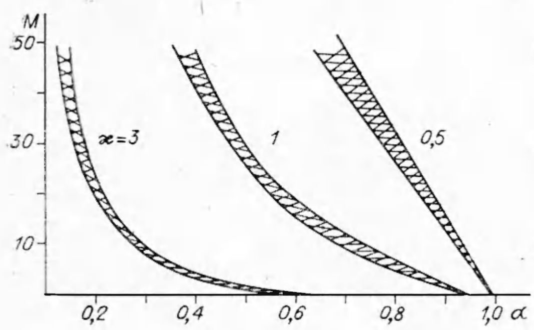

Рис. 1

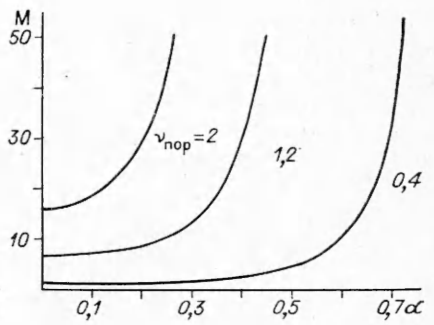

Рис. 2

Условием неустойчивости колебаний тела (условием параметрического резонанса) является вещественность s. Следовательно, с учетом (4.1) границы области неустойчивости ($s=0$) определяются выражениями

$$\alpha\varkappa - 2\Omega \pm \mu \frac{\alpha^2\Omega(1-\alpha^2)^2}{16(\alpha^2+\Omega^2)(1+2/M^2\Omega^2)} = 0. \tag{4.10}$$

На рис. 1 на плоскости параметров α, M заштрихованы зоны неустойчивости, найденные согласно (4.10), для различных значений $\varkappa$ (полагается, что $\mu=0{,}1$). Анализируя рис. 1, можно сделать следующие выводы:

а) чем меньше период неоднородности d упругой системы (чем больше $\varkappa$), тем при меньших скоростях движения α наблюдается неустойчивость;

б) с ростом скорости движения масса тела, при которой наступает параметрический резонанс, уменьшается;

в) с увеличением массы тела и(или) периода неоднородности зона неустойчивости расширяется (по α).

Таким образом, при равномерном движении тела по периодически неоднородной упругой системе наблюдается явление параметрического нарастания амплитуды колебаний тела. Возникает вопрос: откуда берется энергия, необходимая для «раскачки» колебаний тела? Для ответа на него достаточно вспомнить, что при равномерном движении тела по неоднородной упругой системе возникает переходное излучение, оказывающее давление на тело [3]. Следовательно, для поддержания равномерного движения тела необходим внешний источник, работа которого и идет на увеличение энергии колебаний тела при соответствующих параметрах системы.

Заметим, что найденные границы зоны неустойчивости (4.10) являются границами основной зоны неустойчивости, полученными в первом приближении по малому параметру μ. Для того чтобы определить границы последующих областей неустойчивости, которые будут возникать при условиях $\alpha\varkappa = 2\Omega/n + \delta_1$ ($n = 1, 2, \ldots$), или границы основной зоны неустойчивости с большей точностью, необходимо изменить вид решения (4.2) по аналогии с тем, как это делается в [4].

5. Нельзя обойти вниманием вопрос о влиянии малой вязкости упругого основания на результат рассматриваемой задачи. Первое уравнение системы (1.1) с учетом малой безразмерной вязкости основания $2\mu\nu$ перепишем в виде

$$U_{tt} - U_{xx} + 2\mu\nu U_t + U(1+\mu\cos(\varkappa x)) = 0. \tag{5.1}$$

Подставляя в (5.1) решение в виде (4.1) и проделывая выкладки, аналогичные проведенным в п. 4, получим условие, накладываемое на параметры системы, при выполнении которого имеет место неустойчивость:

$$\frac{M^2\Omega^4(1-\alpha^2)^2}{16(\alpha^2+\Omega^2)^2(\nu^2+16\Omega^2/\alpha^4)} - \delta^2(M+2/M\Omega^2)^2 - \frac{4\nu^2}{M^2\Omega^4} > 0. \tag{5.2}$$

Из (5.2) видно, что при учете малой вязкости основания ν уже при нулевой расстройке δ $(2\Omega = \alpha\varkappa)$ на плоскости параметров α, M появляется область, где колебания тела устойчивы при любых $\varkappa$. Полагая в (5.2) $\delta = 0$, найдем пороговое значение вязкости

$$\nu_{\text{пор}} = 2\Omega\alpha^2\left(-2 + 2\sqrt{1 + \frac{M^2\Omega^4(1-\alpha^2)^2}{64^2\alpha^8(\alpha^2+\Omega^2)^2}}\right)^{1/2}.$$

На рис. 2 изображены линии уровня $\nu_{\text{пор}}$ на плоскости параметров α, M. Каждая кривая разделяет плоскость параметров на две области. В области, лежащей выше кривой, всегда найдется значение $\varkappa$, при котором будет наблюдаться неустойчивость, в области же, лежащей ниже кривой, колебания тела устойчивы при любых $\varkappa$. Из рис. 2 видно, что:

а) при заданной скорости движения с уменьшением массы тела пороговая вязкость уменьшается (колебания могут становиться неустойчивыми при меньшей вязкости основания);

б) при заданной массе тела пороговое значение вязкости основания тем меньше, чем больше скорость тела.

Итак, при равномерном движении тела по периодически неоднородной одномерной упругой системе наблюдается явление параметрического резонанса, которое проявляется в нарастании амплитуды тела по экспоненциальному закону при $t \to \infty$. Работа, необходимая для увеличения энергии колебаний тела, совершается внешним источником, поддерживающим равномерное движение.

Необходимо отметить, что в настоящей работе рассмотрено безотрывное движение тела. В реальных же ситуациях, например при движении железнодорожного состава по рельсовому пути, возможен отрыв колес состава от рельс, а затем возобновление контакта путем ударного взаимодействия. Следовательно, при движении состава возможно «галопирование», представляющее собой последовательность разрыв — возобновление контакта колес и рельсового пути. То, что параметры рассмотренной в работе задачи принадлежат области устойчивости, отнюдь не означает, что движение тела безотрывно. Попадание же параметров в область неустойчивости гарантирует разрыв контакта при $t \to \infty$, т. е. является достаточным условием «галопирования».

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гинзбург В. Л., Цытович В. Н.** Переходное излучение и переходное рассеяние.— М.: Наука, 1984.
2. **Павлов В. И., Сухоруков А. И.** Переходное излучение акустических волн // УФН.— 1985.— Т. 147, вып. 1.
3. **Весницкий А. И., Метрикин А. В.** Переходное излучение в одномерных упругих системах // ПМТФ.— 1992.— № 2.
4. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Механика.— М.: Наука, 1973.
5. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Наука, 1971.
6. **Крысов С. В., Съянов С. А.** Излучение упругих волн в одномерных системах движущимся источником // ПМТФ.— 1983.— № 1.
7. **Крысов С. В.** Вынужденные колебания и резонанс в упругих системах с движущимися нагрузками.— Горький: ГГУ, 1985.

г. Нижний Новгород *Поступила 4/I 1992 г.*