гого элемента (ростом давления). В обратном случае, при $c^2 < c_1^2$ упругим элементом является пузырек, его увеличение означает растяжение упругого элемента (т. е. понижение давления). Заметим, что упругость газа в пузырьке, описываемая первым членом в правой части уравнения (2), всегда противодействует расширению, т. е. этот член всегда отрицателен при увеличении V. Поэтому при $c^2 < c_1^2$, когда $(-p) > 0$, члены в правой части уравнения имеют разные знаки и возможна их компенсация, что и соответствует образованию солитона.

Поступила 17 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. **Накоряков В. Е., Соболев В. В., Шрейбер И. Р.** Длинноволновые возмущения в газожидкостной смеси.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1972, 5.
2. **Заболотская Е. А., Солуян С. И.** Нелинейное распространение волн в жидкости с равномерно распределенными воздушными пузырьками.— «Акуст. журн.», 1973, т. 19, № 5.
3. **Когарко Б. С.** Одномерное неустановившееся движение жидкости с возникновением и развитием кавитации.— «Докл. АН СССР», 1964, т. 155, № 4.
4. **Кадомцев Б. Б., Карпман В. И.** Нелинейные волны.— «Усп. физ. наук», 1971, т. 103, вып. 2.

УДК 536.46

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ЗАЖИГАНИЯ РЕАКЦИОННОСПОСОБНОГО ВЕЩЕСТВА НАГРЕТОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Р. С. Буркина, В. Н. Вилюнов

(Томск)

Благодаря аррениусовской зависимости скорости химической реакции от температуры в постановке многих задач макрокинетики присутствуют несколько длин релаксаций (обычно две), отношение которых образует малый параметр (например, отношение зон химической реакции и прогрева). Задачи такого класса относятся к задачам особых возмущений, для решения которых наиболее пригоден метод сращиваемых асимптотических разложений (САР).

С помощью метода САР найдено решение ряда стационарных задач медленного горения и детонации (см. [1] и библиографию к ней). Для задач макрокинетики, сформулированных в рамках дифференциальных уравнений с частными производными * опыт применения САР еще весьма ограничен [1—3].

В данной работе найдены верхняя и нижняя оценки времени прогрева в тепловой теории зажигания нагретой поверхностью; дано сравнение аналитических формул с численным счетом на ЭВМ; установлен асимптотический характер формулы Я. Б. Зельдовича [4]; показана расходимость (при стремлении температурного напора θ_0 к бесконечности) результатов [5, 6].

---

* Берман В. С. Некоторые вопросы теории распространения зоны с экзотермическими химическими реакциями в газовых и конденсированных средах. Дис.на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. М., ИПМ АН СССР, 1974.

1. Качественные оценки. При обычно используемых в теории зажигания допущениях исходным является нелинейное уравнение теплопроводности

(1.1) $$\partial T/\partial t = \varkappa\partial^2 T/\partial r^2 + (Qz/c)\exp(-E/RT), \quad t > 0, \quad 0 < r < \infty$$

с условиями

(1.2) $$T(r,\ 0) = T_-,\ T(0,\ t) = T_+,\ \partial T(\infty,\ t)/\partial r = 0.$$

В соответствии с [4] время прогрева t_0 определяется как время достижения теплового равновесия между реагирующей средой и нагретой поверхностью

$$\partial T(0,\ t_0)/\partial r = 0.$$

Время зажигания $t_з$ складывается из времени прогрева и химической индукции

$$t_з = t_0 + t_{in}$$

и только при больших $\theta_0 = E(T_+ - T_-)/RT_+^2$

$$t_{in} \ll t_0,\ t_з \approx t_0.$$

В вышеизложенном использовались следующие обозначения: T — температура; $\varkappa = \lambda/c\rho$ — температуропроводность; λ — теплопроводность; c — теплоемкость; ρ — плотность; Q — тепловой эффект; z — предэкспонента; E — энергия активации; r — пространственная координата; t — время; T_- — начальная температура; T_+ — температура горячей поверхности.

Приведем некоторые качественные оценки, вскрывая характерные масштабы как для зависимых, так и независимых переменных.

Если $T_+ \gg T_-$, $E \gg RT_+$, то вклад нелинейного члена в (1.1) является существенным лишь в окрестности $r = 0$, когда T принадлежит интервалу $T_+ - RT_+^2/E \leqslant T \leqslant T_+$. Поэтому можно выделить две пространственные области решения: химическую ширину r_{ch}, где существенно тепловыделение, и тепловую r_q, где реакция практически не идет.

Записывая для зоны реакции балансное уравнение Н.Н. Семенова, получим

(1.3) $$\rho Qzr_{ch}\exp(-E/RT_+) = q_*,$$

где q_* — удельный тепловой поток на границе сопряжения зон реакции и прогрева.

Порядок величин r_{ch}, r_q оценивается следующим образом:

(1.4) $$r_{ch} \sim \lambda RT_+^2/Eq_*,\ r_q \sim \lambda(T_+ - T_-)/q_*,$$

так что отношение

(1.5) $$r_{ch}/r_q = O(\varepsilon),\ \varepsilon = RT_+^2/E(T_+ - T_-) = 1/\theta_0 \ll 1$$

является малым параметром исходной задачи (1.1), (1.2). В соответствии с размерностными соображениями

(1.6) $$r_q \sim \sqrt{\varkappa t_0}.$$

Выражения (1.3)—(1.6) приводят к очевидным оценкам

(1.7) $$t_0 \sim \frac{E(T_+ - T_-)^2 c}{RT_+^2 Qz}\exp(E/RT_+);$$

$$r_q \sim \left[\frac{\lambda}{\rho Q z} \frac{E(T_+ - T_-)^2}{RT_+^2} \exp(E/RT_+)\right]^{1/2};$$

$$r_{ch} \sim \left[\frac{\lambda}{\rho Q z} \frac{RT_+^2}{E} \exp(E/RT_+)\right]^{1/2};$$

$$q_* \sim \left[\frac{E(T_+ - T_-)}{\lambda \rho Q z R T_+^2} \exp(E/RT_+)\right]^{-1/2}.$$

Оценка (1.7) с точностью до постоянного множителя совпадает с результатами, полученными в [4, 7].

Из качественного анализа задачи следует, что во внешней области решения масштабом температуры является разность $T_+ - T_-$; масштабом расстояния — r_q. Во внутренней области характерные масштабы соответственно RT_+^2/E и r_{ch}. Масштаб времени для обеих областей равен t_0.

2. Асимптотический анализ решения. Исходная постановка задачи во внешних переменных запишется в виде

$$\partial u/\partial \tau = \partial^2 u/\partial x^2 - (1/\varepsilon)\exp\left[-(1/\varepsilon)u/(1 - \sigma u)\right]; \tag{2.1}$$

$$u(x, 0) = 1,\ u(0, \tau) = 0,\ u(\infty, \tau) = 1,$$

$$u = (T_+ - T)/(T_+ - T_-),\ x = r/r_q,\ \tau = t/t_0,$$

$$0 < \sigma = 1 - T_-/T_+ < 1.$$

Во внутренних переменных имеем

$$\varepsilon^2 \partial U/\partial \tau = \partial^2 U/\partial X^2 + \exp\left[U/(1 + \beta U)\right]; \tag{2.2}$$

$$U(X, 0) = -1/\varepsilon,\ U(0, \tau) = 0,\ U(\infty, \tau) = -1/\varepsilon, \tag{2.3}$$

$$U = E(T - T_+)/RT_+^2,\ X = r/r_{ch},\ \tau = t/t_0,\ \beta = RT_+/E \ll 1.$$

Так как малый параметр ε в уравнении (2.1) вошел в экспоненту, то во внешней области с любым порядком точности по ε можно пренебречь нелинейностью. Поэтому решение внешней задачи, удовлетворяющее условиям $u(x, 0) = 1$, $u(\infty, \tau) = 1$, имеет вид

$$u = A + (1 - A)\Phi(x/2\sqrt{\tau}),\ \Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \exp(-y^2)\,dy. \tag{2.4}$$

Здесь параметр A определяется сращиванием.

Во внутренней области решение уравнения (2.3) отыскивается в виде ряда

$$U(X, \tau, \varepsilon) = \mu_1(\varepsilon)U_1(X, \tau) + \mu_2(\varepsilon)U_2(X, \tau) + \ldots, \tag{2.5}$$

где $\mu_n(\varepsilon)$ — асимптотическая последовательность $\mu_{n+1}/\mu_n \to 0$, $\varepsilon \to 0$. Подставляя (2.5) в (2.2), (2.3), получаем $\mu_1(\varepsilon) = 1$, $\mu_2(\varepsilon) = \varepsilon^2$, и с точностью до $0(\varepsilon^2)$ при $\beta \ll 1$ внутренняя задача сводится к уравнению

$$\partial^2 U_1/\partial X^2 + \exp U_1 = 0. \tag{2.6}$$

Все дальнейшее рассмотрение ограничивается погрешностью $0(\varepsilon^2)$, поэтому уравнения для U_2, $U_3 \ldots$ не выписываются. Решение (2.6) имеет вид

$$U_1(X, \tau) = \ln 2a \pm \sqrt{2a}X + 2b - 2\ln\left[1 + \exp(\pm\sqrt{2a}X + 2b)\right],$$

где a и b — функции времени τ. Ближнее граничное условие дает значение $a = \mathrm{ch}^2 b$.

Для ответа на частный вопрос достаточно знать распределение температурного поля лишь в момент τ_0. Поэтому вместо $a(\tau)$ и $b(\tau)$, которые в общем случае определяются из сращивания и не противоречат расходимости начальных условий, берем их значения в момент τ_0.

Решение (2.6), удовлетворяющее ближнему граничному условию $U_1(0, \tau) = 0$ и условию теплового равновесия $\partial U_1(0,\tau_0)/\partial X = 0$, имеет вид

$$U_1 = 2 \ln 2 - \sqrt{2} X = 2 \ln \left[1 + \exp\left(-\sqrt{2} X\right)\right]. \tag{2.7}$$

Время установления теплового равновесия τ_0 ищется в виде ряда

$$\tau_0 = D_0 Q_0(\varepsilon) + D_1 Q_1(\varepsilon) + D_2 Q_2(\varepsilon) + \ldots, \tag{2.8}$$

где $Q_n(\varepsilon)$ — асимптотическая последовательность, $Q_{n+1}/Q_n \to 0$, $\varepsilon \to 0$. Коэффициенты D_n и асимптотическая последовательность находятся в результате сращивания внутреннего (2.7) и внешнего (2.4) разложений. Правило предельного сращивания заключается в требовании одинакового асимптотического поведения внутреннего и внешнего разложений, записанных в одних и тех же переменных, т. е.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{u - \varepsilon |U_1|}{\gamma(\varepsilon)} = 0, \tag{2.9}$$

где при $\varepsilon \to 0$ порядок γ выбирается равным порядку сращиваемого члена.

После подстановки (2.8) в (2.4) и разложения $\Phi(z)$ в ряд в окрестности $z = 0$ для малых x приходим к разложению

$$\begin{aligned} u = A + \frac{2(1-A)}{\sqrt{\pi}} \Bigg\{ \frac{1}{2\sqrt{D_0 Q_0}} \left(1 - \frac{x^2}{12 D_0 Q_0} + \right. \\ \left. + \frac{x^4}{160 D_0^2 Q_0^2} + \ldots \right) x - \frac{D_1}{4 D_0^{3/2} Q_0^{3/2}} \left(1 - \frac{x^2}{4 D_0 Q_0} + \frac{x^4}{32 D_0^2 Q_0^2} + \ldots \right) x\, Q_1 - \\ - \frac{D_2}{4 D_0^{3/2} Q_0^{3/2}} \left(1 - \frac{x^2}{4 D_0 Q_0} + \frac{x^4}{32 D_0^2 Q_0^2} + \ldots \right) x Q_2 + \\ + \frac{3 D_1^2}{160 D_0^{5/2} Q_0^{5/2}} \left(1 - \frac{5x^2}{12 D_0 Q_0} + \frac{7x^4}{96 D_0^2 Q_0^2} + \ldots \right) x Q_1^2 + \ldots \end{aligned} \tag{2.10}$$

Первый член разложения (2.8) определяется обычным способом сращивания: подстановка (2.10) и (2.7) в (2.9) при $\gamma(\varepsilon) = 1$ дает

$$A = 0, \quad D_0 = 1/2\pi, \quad Q_0(\varepsilon) = 1.$$

Для определения последующих членов (2.8) стандартная процедура сращивания не проходит, так как здесь необходимо знать скорость стремления (по отношению к соответствующим членам асимптотической последовательности $Q_n(\varepsilon)$) внешней переменной x к нулю. В настоящем подходе точное значение скорости стремления x найти не удается, однако представляется возможным получить полезные оценки.

Условие сращивания удовлетворяется в двух случаях:

$$(A) \qquad x^2/Q_1(\varepsilon) \to 0$$

$$(B) \qquad Q_1(\varepsilon)/x^2 \to 1,$$

$$\varepsilon \to 0.$$

θ_0	3	6	10	25	50	100	300
τ_* (ЭВМ)	3,7	11	25,6	128,8	464	1744	14960
τ_*^+ (2.12)	3,9	12,1	28,7	145,8	523	1933	16033
τ_*^- (2.13)	2,9	8,7	20,9	113,6	430	1668	14634
$\langle\tau_*\rangle$ (3.1)	3,4	10,4	24,8	129,7	476	1800	15333
τ_{*2} (3.3)	3,1	10,4	27,1	161,1	628	2519	22550
τ_{*1} (3.2)	2,9	11,5	31,8	198,9	796	3183	28648
τ_{*7} (3.4)	1,4	5,7	15,9	99,4	398	1592	14324
τ_*^+, %	6,2	9,7	12,1	13,2	12,7	10,8	7,17
τ_*^-, %	−21,4	−21,3	−18,2	−11,8	−7,3	−4,4	−2,2
$\langle\tau_*\rangle$, %	−7,6	−5,8	−3,0	0,6	2,7	3,2	2,5
τ_{*2}, %	−14,9	−5,1	5,7	25,1	35,4	44,4	50,6
τ_{*1}, %	−22,6	4,2	24,34	54,5	71,5	82,5	91,50
τ_{*7}, %	−61,3	−47,9	−37,8	−22,8	−14,3	−8,8	−4,3

Поскольку τ_0 определяется асимптотическим рядом, сконструированным на последовательности $Q_n(\varepsilon)$, то при $Q_1(\varepsilon) \gg x^2$ в случае (A) будем иметь верхнюю, а при $Q_1(\varepsilon) \sim x^2$ в случае (B) нижнюю оценки времени τ_0.

Случай $Q_1(\varepsilon)/x^2 \to 0$ невозможен, так как нельзя удовлетворить условию (2.9).

Получим формулы для верхней оценки времени τ_0. Подставляя (2.7) и (2.10) в (2.9) и полагая $\gamma(\varepsilon) = \varepsilon$ с учетом выполнения (A), будем иметь

$$xQ_1(\varepsilon) = \varepsilon, \quad D_1 = \sqrt{2}\ln 2/\pi, \quad Q_1(\varepsilon) \gg \varepsilon^{2/3}. \tag{2.11}$$

При сравнении следующих членов разложения возможны уже три случая

(A_a) $\qquad x^2/Q_1^2(\varepsilon) \to 0;$

(A_b) $\qquad Q_1^2(\varepsilon)/x^2 \to 1;$

(A_c) $\qquad Q_1(\varepsilon)/x^2 \to 0,$

которые расположены в порядке убывания соответствующих оценок ряда (2.8).

В случае (A_a) в соответствии с (2.11) $Q_1(\varepsilon) \gg \varepsilon^{1/2}$ и из (2.9) имеем

$$Q_2(\varepsilon) = Q_1^2(\varepsilon), \quad D_2 = 3\ln^2 2/\pi,$$

следовательно, одна из верхних оценок записывается в виде

$$\tau_0 = 1/2\pi + \left(\sqrt{2}\ln 2/\pi\right)Q_1(\varepsilon) + (3\ln^2 2/\pi)Q_1^2(\varepsilon) + \ldots,$$

где $\varepsilon^{1/2} \ll Q_1(\varepsilon) \ll 1$.

В случае (A_b) $Q_1(\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}$ и при продолжении сращивания находим коэффициенты

$$Q_2(\varepsilon) = \varepsilon, \quad D_2 = 3\ln^2 2/\pi - 1/6$$

и соответствующее разложение

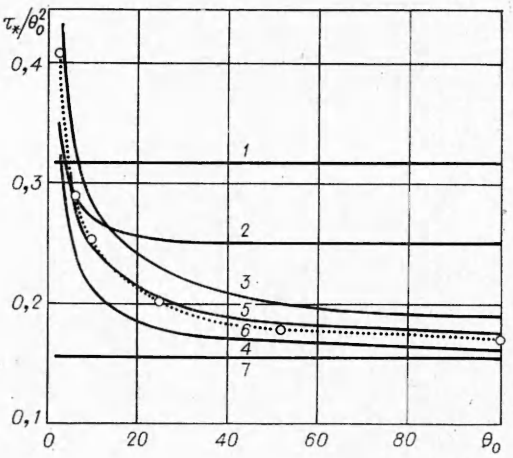
$$\tau_0^+ = 1/2\pi + \left(\sqrt{2}\ln 2/\pi\right)\varepsilon^{1/2} + (3\ln^2 2/\pi - 1/6)\varepsilon + \ldots \tag{2.12}$$

Аналогично в случае (A_c) будем иметь

$$Q_2(\varepsilon) = Q_1^{-2}(\varepsilon)\,\varepsilon^2,\ D_2 = -1/6,$$
$$\varepsilon^{2/3} \ll Q_1(\varepsilon) \ll \varepsilon^{1/2};$$
$$\tau_0 = 1/2\pi + (\sqrt{2}\ln 2/\pi)Q_1(\varepsilon) - (1/6)Q_2(\varepsilon) + \ldots$$

Нижняя оценка τ_0^- находится последовательным сращиванием (2.9) при условии выполнения случая (B). Опуская промежуточные выкладки, выпишем окончательный ответ

$$(2.13)\quad \tau_0^- = 1/2\pi + (\sqrt{2}\ln 2/\pi - 1/6)\varepsilon^{2/3} + (3\ln^2 2/\pi - \pi/60)\,\varepsilon^{4/3} + \ldots$$



3. Обсуждение результатов. Численное решение задачи (2.2), (2.3) осуществлялось на ЭВМ М=220 по неявной разностной схеме с выбором оптимального числа Куранта и экстраполяцией вычисленных значений на нулевой шаг [8]. Сравнение формул (1.12), (2.13) и численного счета [9] (см. таблицу, где сделан пересчет τ_0 на $\tau_* = \theta_0^2\tau_0$) показывает, что в широкой области изменения температурного напора $(10 \leqslant \theta_0 \leqslant 300)$ удовлетворительное совпадение (с погрешностью не хуже 3%) дает среднее арифметическое, составленное из верхней и нижней оценок

$$(3.1)\qquad \langle\tau_*\rangle = (\tau_*^+ + \tau_*^-)/2.$$

На фигуре и таблице приведено сопоставление результатов, полученных разными авторами с численным счетом и асимптотическими формулами (2.12), (2.13), (3.1):

кривая *1* соответствует формуле Энига [5]

$$(3.2)\qquad \tau_{*1}/\theta_0^2 = 1/\pi;$$

кривая *2* — формуле А. М. Гришина [6]

$$(3.3)\qquad \frac{\tau_{*2}}{\theta_0^2} = -\frac{\theta_0}{6}\ln\left(1 - \frac{3}{2\theta_0}\right) \approx \frac{1}{4} + \frac{3}{16}\frac{1}{\theta_0} + \frac{3}{16}\frac{1}{\theta_0^2} + \frac{27}{128}\frac{1}{\theta_0^3} + \ldots;$$

кривая *7* — формуле Я. Б. Зельдовича [4]

$$(3.4)\qquad \tau_{*7}/\theta_0^2 = 1/2\pi;$$

кривые *3*—*5* — соответственно формулам (2.12), (2.13), (3.1); точками (кривая *6*) показаны результаты счета на ЭВМ. Видно, что формулы (3.2), (3.3) в отличие от (3.4) не дают правильной асимптотики.

Авторы выражают благодарность О. Б. Сидонскому и Г. В. Алейниковой за предоставление некоторых результатов численного счета.

Поступила 2 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. **Берман В. С., Рязанцев Ю. С.** Асимптотический анализ стационарного распространения двухстадийной экзотермической реакции в газе.— ПММ, 1973, № 6.
2. **Вилюнов В. Н.** Приближенные методы решения задач тепловой теории зажигания.— В кн.: Первый Всесоюзный симпозиум по горению и взрыву. Тезисы докладов. М., «Наука», 1968.
3. **Вилюнов В. Н., Гольдман Р. С.** О применении метода сращиваемых асимптотических разложений к одной задаче зажигания.— В кн.: Материалы IV конференции по математике и механике. Томск, изд. Томск. ун-та, 1974.
4. **Зельдович Я. Б.** К теории зажигания.— «Докл. АН СССР», 1963, т. 150, № 2.
5. **Enig J. W.** Condition in time-dependent thermal explosion theory.—«J. Chem. Phys.», 1964, vol. 4, N 12.
6. **Гришин А. М.** О зажигании реагирующих веществ.— ПМТФ, 1966, № 5.
7. **Вилюнов В. Н., Сидонский О. Б.** К теории воспламенения конденсированных систем накаленной поверхностью.— «Докл. АН СССР», 1963, т. 152, № 1.
8. **Сидонский О. Б.** Исследование скорости сходимости некоторых разностных задач путем математического эксперимента.— В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Т. 3. Новосибирск, изд. ВЦ СО АН СССР, 1972, № 1.
9. **Вилюнов В. Н.** Зажигание пластины конденсированного вещества горячим телом при продолжительном действии источника тепла.— «Труды НИИ ПММ», изд. Томск. ун-та, 1973, т. 3.

УДК 537.527.5; 533.9.07

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВЗРЫВА ПРОВОДНИКОВ В ГАЗЕ ВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ ДЛЯ РАЗМЫКАНИЯ ТОКОВ

Г. П. Глазунов, В. П. Канцедал, Р. В. Митин

(Харьков)

Большие плотности энергии, запасаемой магнитным полем индуктивных накопителей, делают перспективным их применение в экспериментальной физике. Наибольшие запасы энергии достигнуты в сверхпроводящих накопителях и импульсных накопителях, работающих от взрывомагнитных генераторов (токи до $3\cdot10^8$ А) [1].

Использование энергии, запасенной в магнитном поле, производится размыканием тока в цепи накопителя и включением в цепь нагрузки. Для этого, в частности, используются переключатели на основе электрического взрыва проводников (ЭВП) [1]. При создании таких размыкателей существует следующая трудность: после электрического взрыва образуется столб из металлических паров, в котором может произойти пробой; тогда процесс размыкания затягивается и понижается эффективность передачи энергии. Задача заключается в том, чтобы материал проводника мгновенно перевести в пар, т. е. диэлектрик, выдерживающий напряжения, возникающие при переключении индуктивного накопителя на нагрузку.

С ростом давления окружающей среды при ЭВП затрудняется возникновение шунтирующих дуг и создаются условия для более полного перехода материала проволочки в пар. Проведен ряд опытов с различны-