

## АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 517.518.8

УСТОЙЧИВЫЙ АЛГОРИТМ  
ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ  
ПРИ НЕТОЧНО ЗАДАННОЙ АППАРАТНОЙ ФУНКЦИИ

Ю. Е. Воскобойников, В. А. Литасов

*Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет,  
г. Новосибирск  
E-mail: voscob@mail.ru*

Рассматривается задача восстановления изображения, когда аппаратная функция регистрирующей системы и зарегистрированное изображение известны со случайными погрешностями. Построен эффективный вычислительный алгоритм восстановления изображения, использующий двумерное дискретное преобразование Фурье и алгоритм быстрого преобразования Фурье. Для выбора параметра регуляризации, определяющего точность решения задачи восстановления, предложен алгоритм, надежно оценивающий оптимальный параметр регуляризации. Алгоритм восстановления может быть адаптирован для идентификации аппаратной функции динамических систем, регистрирующих изображения.

**Введение.** Для большинства регистрирующих изображения систем при обычных предположениях о стационарности и линейности связь между измеряемым (исходным)  $\varphi(\tau_1, \tau_2)$  и зарегистрированным  $f(t_1, t_2)$  изображениями описывается интегральным уравнением Фредгольма I рода с разностным ядром вида [1]

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} k(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) \varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 d\tau_1 = f(t_1, t_2), \quad (1)$$

где  $k(\tau_1, \tau_2)$  – аппаратная функция регистрирующей системы. В силу конечной полосы пропускания регистрирующей системы (функция  $k(\tau_1, \tau_2)$  отличается от  $\delta$ -функции) изображение  $f(t_1, t_2)$  может весьма существенно отличаться от  $\varphi(\tau_1, \tau_2)$ . При этом традиционно полагают, что вместо изображения  $f(t_1, t_2)$  регистрируется «зашумленная» правая часть уравнения (1)

$\tilde{f}(t_1, t_2) = f(t_1, t_2) + \eta(t_1, t_2)$ , а функция  $k(t_1, t_2)$  (ядро уравнения (1)) известна точно [1, 2]. Однако в ряде практических задач вместо  $k(\tau_1, \tau_2)$  известна функция  $\tilde{k}(\tau_1, \tau_2) = k(\tau_1, \tau_2) + \xi(\tau_1, \tau_2)$ . Например, функция  $k(\tau_1, \tau_2)$  оценивается с помощью процедуры непараметрической идентификации (и поэтому известна с некоторой ошибкой) или аппаратная функция изменяется под воздействием случайных неконтролируемых факторов (функция пропускания атмосферы).

Поэтому в данной работе задача восстановления изображения поставлена следующим образом: по значениям функций  $\tilde{f}(t_1, t_2)$ ,  $\tilde{k}(\tau_1, \tau_2)$  необходимо оценить значения «входного» изображения  $\varphi(\tau_1, \tau_2)$ . Другими словами, нужно решить уравнение (1) относительно  $\varphi(\tau_1, \tau_2)$  при неточно заданном ядре  $k(\tau_1, \tau_2)$ .

Решение задачи восстановления в такой постановке обуславливает следующие проблемы, не решенные своего решения или только частично решенные в научных публикациях.

1. *Эффективная численная реализация регуляризирующего алгоритма восстановления изображения.* Для одномерного уравнения-свертки разработаны эффективные численные алгоритмы, основанные на дискретном преобразовании Фурье (ДПФ) и алгоритме быстрого преобразования Фурье (БПФ) [3–5]. Что касается двумерного уравнения, то в литературе приводится только общий вид регуляризирующего алгоритма в частотной области [1–3]. При этом остаются без внимания алгоритмы формирования периодических последовательностей, к которым применяется двумерное ДПФ. Также отсутствуют условия, при выполнении которых искомое регуляризованное аperiodическое изображение однозначно определяется элементами вычисляемой (с использованием БПФ) регуляризированной периодической двумерной последовательности.

2. *Учет погрешности задания аппаратной функции.* Известно, что в общем случае решение уравнения (1) есть некорректно поставленная задача [6, 7]. Большинство из существующих регуляризирующих алгоритмов строит устойчивые решения при предположении точно заданного оператора задачи (в нашем случае это функция  $k(\tau_1, \tau_2)$ ). В некоторых работах неточность задания оператора учитывается только при выборе параметра регуляризации (например, обобщенный принцип невязки [8]). Для одномерного интегрального уравнения учет неточности задания ядра при построении регуляризованного решения был показан в [9]. Однако для двумерного интегрального уравнения (1) аналогичные результаты отсутствуют.

3. *Выбор оптимального параметра регуляризации.* Величина параметра регуляризации определяет точность восстановления изображения. Поэтому желательно выбрать такое оптимальное значение, которое минимизировало бы некоторый функционал от ошибки восстановления (как правило, это среднеквадратическая ошибка). Однако точно вычислить оптимальное значение на практике невозможно из-за незнания изображения  $\varphi$  или его характеристик. Таким образом, возникает задача надежного оценивания оптимального параметра регуляризации [10]. Для двумерного интегрального уравнения (1) с неточно заданным ядром эта задача не получила удовлетворительного решения.

В данной работе описывается эффективный устойчивый алгоритм восстановления изображения, учитывающий неточности задания аппаратной

функции, как при построении изображения, так и при выборе параметра регуляризации. Так как предлагаемый алгоритм оценивания оптимального параметра требует задания дисперсий погрешностей правой части и ядра, то строятся несмещенные оценки для этих дисперсий.

**Регуляризирующий алгоритм восстановления изображений.** Используя формулу прямоугольников, аппроксимируем интегральное уравнение (1) следующим конечномерным аналогом:

$$\sum_{m_1=1}^{N_{\varphi_1}} \sum_{m_2=1}^{N_{\varphi_2}} k(t_{j_1} - \tau_{m_1}, t_{j_2} - \tau_{m_2}) \varphi(\tau_{m_1}, \tau_{m_2}) \Delta_2 \Delta_1 = f(t_{j_1}, t_{j_2}). \quad (2)$$

Шаги дискретизации  $\Delta_1$  (по первой переменной  $\tau_1$ ) и  $\Delta_2$  (по второй переменной  $\tau_2$ ) задаются или выбираются из условия малости ошибки аппроксимации интеграла (1) квадратурной формулой (2) по сравнению с погрешностью измерения правой части. Таким образом, в данной постановке задача восстановления изображения заключается в вычислении значений изображения  $\varphi(\tau_1, \tau_2)$  в узлах  $(\tau_{m_1}, \tau_{m_2})$  двумерной прямоугольной сетки, т. е. в решении двумерной дискретной свертки (2) относительно сеточной функции  $\varphi(\tau_{m_1}, \tau_{m_2})$  при неточно заданных исходных данных.

Для построения регуляризованного решения на основе ДПФ примем следующие допущения.

1. Функция  $\varphi(\tau_1, \tau_2)$  непрерывна, ограничена и финитна – вне прямоугольной области  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  обращается в нуль. Тогда  $N_{\varphi_1} = \text{ent}[(b_1 - a_1)/\Delta_1]$ ,  $N_{\varphi_2} = \text{ent}[(b_2 - a_2)/\Delta_2]$ , где  $\text{ent}[z]$  – целая часть числа  $z$ .

2. Аппаратная функция  $k(\tau_1, \tau_2)$  непрерывна, ограничена и финитна – вне области  $[c_1, d_1] \times [c_2, d_2]$  обращается в нуль. Тогда  $N_{k_1} = \text{ent}[(d_1 - c_1)/\Delta_1]$ ,  $N_{k_2} = \text{ent}[(d_2 - c_2)/\Delta_2]$ .

3. Функции  $\eta(t_1, t_2)$ ,  $\xi(t_1, t_2)$  являются стационарными случайными процессами с нулевыми средними и дисперсиями  $\sigma_\eta^2$  и  $\sigma_\xi^2$ . Предполагается, что интервал корреляции у случайных процессов  $\eta(t_1, t_2)$ ,  $\xi(t_1, t_2)$  по каждой переменной меньше  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  соответственно.

Заметим, что при предположениях 1, 2 зарегистрированное изображение  $f(t_1, t_2)$  также является финитной функцией, обращающейся в нуль вне области  $[x_1, y_1] \times [x_2, y_2]$ , где  $x_1 = a_1 + c_1$ ,  $x_2 = a_2 + c_2$ ,  $y_1 = b_1 + d_1$ ,  $y_2 = b_2 + d_2$ . Тогда  $N_{f_1} = \text{ent}[(y_1 - x_1)/\Delta_1]$ ,  $N_{f_2} = \text{ent}[(y_2 - x_2)/\Delta_2]$ .

Далее будем использовать ДПФ от двумерных периодических последовательностей. Двумерную последовательность  $z_p(j_1, j_2)$  назовем периодической с периодом  $N_1 \times N_2$ , если она определена для значений  $j_1 = 0, \dots, N_1 - 1$ ,  $j_2 = 0, \dots, N_2 - 1$  и удовлетворяет условиям периодичности

$$z_p(j_1, j_2 + N_2) = z_p(j_1, j_2); \quad z_p(j_1 + N_1, j_2) = z_p(j_1, j_2).$$

Алгоритм построения регуляризованного решения для двумерной дискретной свертки (2) можно представить следующими шагами.

Шаг 1. Формирование двумерной периодической последовательности с периодом  $N_1 \times N_2$  из значений зарегистрированного изображения в узлах сетки:

$$\tilde{f}_p(j_1 - 1, j_2 - 1) = \begin{cases} \tilde{f}(t_{j_1}, t_{j_2}), & \text{если } j_1 = 1, \dots, N_{f_1}, j_2 = 1, \dots, N_{f_2}; \\ 0 & \text{во всех других случаях.} \end{cases} \quad (3)$$

При этом  $j_1 = 1, \dots, N_1, j_2 = 1, \dots, N_2$ , а индекс  $p$  указывает на периодичность формируемой последовательности.

Шаг 2. Формирование двумерной периодической последовательности из значений аппаратной функции:

$$\tilde{k}_p(j_1, j_2) = \Delta_1 \Delta_2 \begin{cases} k(j_1 \Delta_1, j_2 \Delta_2), & \text{если } 0 \leq j_1 \leq N_{k_1}^+ - 1, \\ & 0 \leq j_2 \leq N_{k_2}^+ - 1; \\ \tilde{k}((j_1 - N_1) \Delta_1, j_2 \Delta_2), & \text{если } N_1 - N_{k_1}^- \leq j_1 \leq N_1 - 1, \\ & 0 \leq j_2 \leq N_{k_2}^+ - 1; \\ \tilde{k}(j_1 \Delta_1, (j_2 - N_2) \Delta_2), & \text{если } 0 \leq j_1 \leq N_{k_1}^+ - 1, \\ & N_2 - N_{k_2}^- \leq j_2 \leq N_2 - 1; \\ \tilde{k}((j_1 - N_1) \Delta_1, (j_2 - N_2) \Delta_2), & \text{если } N_1 - N_{k_1}^- \leq j_1 \leq N_1 - 1, \\ & N_2 - N_{k_2}^- \leq j_2 \leq N_2 - 1; \\ 0 & \text{во всех других случаях.} \end{cases} \quad (4)$$

При этом  $j_1 = 0, \dots, N_1 - 1, j_2 = 0, \dots, N_2 - 1$ . Величины  $N_{k_1}^- = \text{ent}[|c_1|/\Delta_1]$ ,  $N_{k_2}^- = \text{ent}[|c_2|/\Delta_2]$  определяют число узлов сетки при отрицательных значениях  $\tau_1 < 0; \tau_2 < 0; N_{k_1}^+ = N_{k_1} - N_{k_1}^-; N_{k_2}^+ = N_{k_2} - N_{k_2}^-$ .

Шаг 3. Вычисление двумерной периодической последовательности с периодом  $N_1 \times N_2$ :

$$\tilde{\lambda}_k(l_1, l_2) = \sum_{j_1=0}^{N_1-1} \sum_{j_2=0}^{N_2-1} \tilde{k}_p(j_1, j_2) \exp \left\{ 2\pi i \left( \frac{j_1 l_1}{N_1} + \frac{j_2 l_2}{N_2} \right) \right\}, \quad (5)$$

$$l_1 = 0, \dots, N_1 - 1; \quad l_2 = 0, \dots, N_2 - 1; \quad i = \sqrt{-1}.$$

Шаг 4. Вычисление коэффициентов дискретного преобразования Фурье последовательности  $\{\tilde{f}_p(j_1, j_2)\}$  (прямое двумерное ДПФ):

$$\tilde{F}_p(l_1, l_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} \sum_{j_2=0}^{N_2-1} \tilde{f}_p(j_1, j_2) \exp \left\{ -2\pi i \left( \frac{j_1 l_1}{N_1} + \frac{j_2 l_2}{N_2} \right) \right\}, \quad (6)$$

$$l_1 = 0, \dots, N_1 - 1; \quad l_2 = 0, \dots, N_2 - 1.$$

Шаг 5. Вычисление коэффициентов  $\Phi_{p\alpha}(l_1, l_2)$  ДПФ регуляризованного периодического решения (расчетные соотношения приводятся далее).

Шаг 6. Вычисление двумерного регуляризованного периодического решения (обратное двумерное ДПФ):

$$\Phi_{p\alpha}(j_1, j_2) = \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} \Phi_{p\alpha}(l_1, l_2) \exp \left\{ 2\pi i \left( \frac{l_1 j_1}{N_1} + \frac{l_2 j_2}{N_2} \right) \right\}, \quad (7)$$

$$j_1 = 0, \dots, N_1 - 1; \quad j_2 = 0, \dots, N_2 - 1.$$

Шаг 7. Формирование двумерного дискретного изображения  $\varphi_\alpha$  по правилу

$$\Phi_{\alpha_{j_1, j_2}} = \Phi_{p\alpha}(j_1 + N_{k_1}^- - 1, j_2 + N_{k_2}^- - 1), \quad j_1 = 1, \dots, N_{\varphi_1}; \quad j_2 = 1, \dots, N_{\varphi_2},$$

где  $N_{\varphi_1} = N_{f_1} - N_{k_1} + 1$ ,  $N_{\varphi_2} = N_{f_2} - N_{k_2} + 1$ .

Если выполнены условия

$$N_1 \geq N_{f_1} + N_{k_1} - 1; \quad N_2 \geq N_{f_2} + N_{k_2} - 1, \quad (8)$$

то проекции  $\Phi_{\alpha_{j_1, j_2}}$  принимаются в качестве значений регуляризованного решения уравнения (1) в узлах  $(\tau_{j_1}, \tau_{j_2})$ , где

$$\tau_{j_1} = N_{k_1}^- \Delta_1 + (j_1 - 1) \Delta_1 + x_1,$$

$$\tau_{j_2} = N_{k_2}^- \Delta_2 + (j_2 - 1) \Delta_2 + x_2.$$

Рассмотрим вычисление коэффициентов ДПФ  $\Phi_{p\alpha}(l_1, l_2)$  на шаге 5. Обобщая результаты работы [9] на двумерное ДПФ, можно показать, что коэффициенты  $\Phi_{p\alpha}(l_1, l_2)$  определяются из нелинейного уравнения

$$\Phi_{p\alpha}(l_1, l_2) = \frac{\tilde{\lambda}_k^C(l_1, l_2)}{|\tilde{\lambda}_k(l_1, l_2)|^2 + \alpha(\theta |\Phi_{p\alpha}(l_1, l_2)|^2 + 1) \mathcal{Q}_p(l_1, l_2)} \tilde{F}_p(l_1, l_2), \quad (9)$$

$$l_1 = 0, \dots, N_1 - 1; \quad l_2 = 0, \dots, N_2 - 1,$$

где  $\theta = \sigma_\xi^2 / \sigma_\eta^2$  – отношение дисперсий;  $\alpha$  – параметр регуляризации;  $\tilde{\lambda}_k^C(l_1, l_2)$  – величина, комплексно-сопряженная с  $\tilde{\lambda}_k(l_1, l_2)$ . Элементы перио-

дической последовательности  $\{Q_p(l_1, l_2)\}$  формируются по правилу

$$Q_p(l_1, l_2) = \begin{cases} Q(l_1 \Delta_{\omega_1}, l_2 \Delta_{\omega_2}), & \text{если } 0 \leq l_1 \leq N_1/2, \\ & 0 \leq l_2 \leq N_2/2; \\ Q(l_1 \Delta_{\omega_1}, (N_2 - l_2) \Delta_{\omega_2}), & \text{если } 0 \leq l_1 \leq N_1/2, \\ & N_2/2 + 1 \leq l_2 \leq N_2 - 1; \\ Q((N_1 - l_1) \Delta_{\omega_1}, l_2 \Delta_{\omega_2}), & \text{если } N_1/2 + 1 \leq l_1 \leq N_1 - 1, \\ & 0 \leq l_2 \leq N_2/2; \\ Q((N_1 - l_1) \Delta_{\omega_1}, (N_2 - l_2) \Delta_{\omega_2}), & \text{если } N_1/2 + 1 \leq l_1 \leq N_1 - 1, \\ & N_2/2 + 1 \leq l_2 \leq N_2 - 1, \end{cases} \quad (10)$$

где  $\Delta_{\omega_1} = 2\pi/(N_1 \Delta_1)$ ,  $\Delta_{\omega_2} = 2\pi/(N_2 \Delta_2)$  – шаги дискретизации в частотной области. Функцию  $Q(\omega_1, \omega_2)$  можно трактовать как частотную характеристику стабилизирующего функционала (она должна быть неубывающей функцией, и  $Q(\omega_1, \omega_2) \rightarrow \infty$  при  $\omega_1, \omega_2 \rightarrow \infty$ ). Например,  $Q(\omega_1, \omega_2) = \omega_1^{2p_1} + \omega_2^{2p_2}$ , где  $p_1, p_2 > 0$  – порядки регуляризации (обычно равны 1 или 2). Задание  $p_1 \neq p_2$  позволяет получать разные «сглаживающие свойства» регуляризующего алгоритма по переменным  $\tau_1, \tau_2$ . Так, если  $p_1 > p_2$ , то «гладкость» регуляризованного изображения по переменной  $\tau_1$  будет больше, чем по переменной  $\tau_2$ .

Для нахождения решения  $\Phi_{p\alpha}^*(l_1, l_2)$  уравнения (9) (при фиксированном параметре регуляризации  $\alpha$ ) обратимся к схеме простой итерации (выполняемой для  $l_1 = 0, \dots, N_1 - 1, l_2 = 0, \dots, N_2 - 1$ ):

$$\Phi_{p\alpha}^{(n+1)}(l_1, l_2) = \frac{\tilde{\lambda}_k^C(l_1, l_2)}{|\tilde{\lambda}_k(l_1, l_2)|^2 + \alpha(\theta |\Phi_{p\alpha}^{(n)}(l_1, l_2)|^2 + 1)} \tilde{F}_p(l_1, l_2), \quad (11)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

«Точка старта» задается соотношением  $\Phi_{p\alpha}^{(0)}(l_1, l_2) = \tilde{F}_p(l_1, l_2)$ . Условие прекращения итераций имеет вид

$$\left[ \frac{\sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} |\Phi_{p\alpha}^{(n+1)}(l_1, l_2) - \Phi_{p\alpha}^{(n)}(l_1, l_2)|^2}{\sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} |\Phi_{p\alpha}^{(n)}(l_1, l_2)|^2} \right]^{1/2} \leq 0,01. \quad (12)$$

Вычислительный эксперимент показал, что для выполнения условия (12) требуется не более 4–7 итераций.

Таким образом, предложенный алгоритм учитывает погрешность задания аппаратной функции уже на этапе построения регуляризованного изображения (9), (11). Использование двумерного БПФ при вычислении (5)–

(7) на 5–8 порядков уменьшает число операций по сравнению с «прямым» вычислением соответствующих двойных сумм, что обуславливает высокую вычислительную эффективность регуляризирующего алгоритма.

**Алгоритм оценивания оптимального параметра регуляризации.**

Проблема выбора параметра регуляризации, входящего в (9), является основной при использовании регуляризирующих алгоритмов на практике. При заниженных значениях  $\alpha$  в изображении  $\varphi_\alpha$  будут присутствовать шумовые (осциллирующие) составляющие, обусловленные погрешностями  $\eta, \xi$ . При завышенных значениях  $\alpha$  из решения  $\varphi_\alpha$  будут удалены (сглажены) высокочастотные информативные составляющие изображения  $\varphi$ . Поэтому в качестве оптимального параметра регуляризации примем значение  $\alpha_{\text{opt}}$ , доставляющее минимум функционалу среднеквадратической ошибки

$$\Delta(\alpha) = M \left[ \left\| \varphi_\alpha - \bar{\varphi}^+ \right\|^2 \right], \quad (13)$$

где  $\bar{\varphi}^+$  – матрица нормального псевдорешения дискретной свертки (2) при точных значениях матрицы правой части  $f$  и матрицы ядра  $k$ ;  $\varphi_\alpha$  – матрица регуляризованного решения;  $\|\bullet\|$  – евклидова норма матрицы;  $M[\bullet]$  – оператор математического ожидания по ансамблю значений случайной матрицы  $\varphi_\alpha$ . Как уже отмечалось, вычисление точного значения  $\alpha_{\text{opt}}$  на практике невозможно, поэтому перейдем к построению алгоритма, позволяющего оценить  $\alpha_{\text{opt}}$  при известных дисперсиях  $\sigma_\eta^2, \sigma_\xi^2$ .

В работах [5, 10] был предложен алгоритм оценивания  $\alpha_{\text{opt}}$ , основанный на критерии оптимальности линейного регуляризирующего алгоритма решения системы линейных алгебраических уравнений вида

$$K\varphi = f + \eta = \tilde{f}, \quad (14)$$

где  $K$  – матрица размером  $N_f \times N_\varphi$ , а  $\eta$  – случайный вектор с нулевым средним и ковариационной матрицей  $V_\eta = M[\eta\eta^T]$ . Этот критерий является статистическим и основан на следующем утверждении [10].

Параметр регуляризации доставляет минимум функционалу среднеквадратической ошибки (13), если выполняется матричное тождество

$$V_e(\alpha) = V_\eta E^T(\alpha), \quad (15)$$

где  $V_e(\alpha) = M[e_\alpha e_\alpha^T]$  – матрица вторых моментов вектора невязки  $e_\alpha = \tilde{f} - K\varphi_\alpha$ ;  $E(\alpha)$  – матричный оператор невязки, позволяющий представить вектор невязки в виде  $e_\alpha = E(\alpha)\tilde{f}$ .

Для проверки матричного тождества (15) при наличии только одной реализации случайного вектора  $e_\alpha$  вводится статистика

$$\rho_W(\alpha) = e^T(\alpha) [V_\eta E^T(\alpha)]^{-1} e(\alpha). \quad (16)$$

Можно показать [10], что если  $\rho_W(\alpha)$  принадлежит интервалу  $[v_{m, \beta/2}, v_{m, 1-\beta/2}]$ , то с вероятностью  $\beta$  ошибки I рода принимается гипотеза о тождестве (15), а значение  $\alpha_W$ , удовлетворяющее условию

$$v_{m, \beta/2} \leq \rho_W(\alpha_W) \leq v_{m, 1-\beta/2}, \quad (17)$$

является оценкой для  $\alpha_{\text{opt}}$ . Величины  $v_{m, \beta/2}, v_{m, 1-\beta/2}$  – это квантили  $\chi^2$ -распределения с  $m = N_f - 1$  степенями свободы значимости  $\beta/2$  и  $1-\beta/2$  соответственно.

Для использования этого алгоритма при неточно заданной функции  $k$ , из значений которой формируется матрица  $K$ , необходимо погрешности  $\xi$  задания аппаратной функции «преобразовать» в дополнительную погрешность правой части. Можно показать, что в этом случае вместо системы (14) имеем систему

$$\tilde{K}\varphi = f + \eta + \Phi\xi = f + \eta', \quad (18)$$

где  $\Phi$  – матрица, составленная из значений вектора  $\varphi$ . Если случайный вектор  $\xi$  имеет ковариационную матрицу  $V_\xi$ , то новый вектор погрешностей  $\eta'$  имеет ковариационную матрицу  $V_{\eta'} = V_\eta + \Phi V_\xi \Phi^T$ . Подставляя эту матрицу в (16), можно вычислить  $\rho_W(\alpha)$  и проверить выполнение неравенства (17).

Для вычисления значения  $\alpha_W$  используется итерационная процедура ньютоновского типа относительно величины  $\gamma = 1/\alpha$  вида

$$\gamma^{(n+1)} = \gamma^{(n)} - \frac{R_W(\gamma^{(n)}) - m}{R'_W(\gamma^{(n)})}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \gamma^{(0)} \ll 1, \quad (19)$$

где  $R_W(\gamma) = \rho_W(1/\alpha)$ ,  $R'_W(\gamma) = \frac{d}{d\gamma} R_W(\gamma)$ . В качестве  $\alpha_W$  принимается  $1/\gamma^{(n+1)}$ , где  $\gamma^{(n+1)}$  удовлетворяет условию

$$v_{m, \beta/2} \leq R_W(\gamma^{(n+1)}) \leq v_{m, 1-\beta/2}. \quad (20)$$

В работе [4] для одномерного уравнения с точно заданным ядром предложены эффективные алгоритмы вычисления  $R_W(\gamma)$  и производной  $R'_W(\gamma)$ , использующие коэффициенты ДПФ  $\{\tilde{F}_p(l)\}, \{\lambda_k(l)\}$ . Опираясь на результаты этой работы и используя представления (15), можно показать, что для вышеизложенного регуляризирующего алгоритма справедливы следующие соотношения:

$$R_W(\gamma) = N_1 N_2 \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} \frac{\gamma |\tilde{\lambda}_k(l_1, l_2)|^2 + (1 + \theta |\Phi_{p\alpha}^*(l_1, l_2)|^2) Q_p(l_1, l_2)}{(C_\sigma \sigma_\xi^2 |\Phi_{p\alpha}^*(l_1, l_2)|^2 + \sigma_\eta^2)} \frac{(1 + \theta |\Phi_{p\alpha}^*(l_1, l_2)|^2) Q_p(l_1, l_2)}{|\tilde{F}_p(l_1, l_2)|^2}, \quad (21)$$



$$\begin{aligned}
R'_W(\gamma) &= \\
&= -N_1 N_2 \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} \frac{|\tilde{\lambda}_k(l_1, l_2)|^2 (1 + \theta |\Phi_{p\alpha}^*(l_1, l_2)|^2) \mathcal{Q}_p(l_1, l_2)}{[C_\sigma \sigma_\xi^2 |\Phi_{p\alpha}^*(l_1, l_2)|^2 + \sigma_\eta^2] \left| \tilde{F}_p(l_1, l_2) \right|^2},
\end{aligned} \tag{22}$$

где  $C_\sigma = \frac{N_{k_1} N_{k_2}}{N_{f_1} N_{f_2}} N_1^2 N_2^2 \Delta_1^2 \Delta_2^2$  – множитель, устанавливающий связь между

дисперсией исходной последовательности  $\xi(\tau_1, \tau_2)$  и дисперсией коэффициентов ДПФ этой последовательности, а также учитывающий матричное преобразование  $\Phi_\xi$ , входящее в (18). Можно доказать, что если выполняется условие  $\frac{1}{\sigma_\eta^2} \sum_{j_1=1}^{N_{f_1}} \sum_{j_2=1}^{N_{f_2}} \tilde{f}(t_{j_1}, t_{j_2}) > v_{m, \beta/2}$  и  $\gamma^{(0)} \ll 1$  (обычно  $\gamma^{(0)} \sim 10^{-10}$ ), то найдется значение  $\gamma^{(n+1)}$ , удовлетворяющее условию (20). Однако число степеней свободы  $m$ , от которого зависят квантили  $v_{m, \beta/2}$ ,  $v_{m, 1-\beta/2}$ , входящие в неравенство (20), для двумерного алгоритма восстановления определяется выражением

$$m = N_{f_1} N_{f_2} - 1.$$

Вычисления  $R_W(\gamma)$ ,  $R'_W(\gamma)$  по приведенным соотношениям требуют порядка  $N_1 N_2$  операций и совместно с процедурой (19) являются эффективным алгоритмом вычисления параметра регуляризации. Исследование точности изображений, построенных при  $\alpha = \alpha_W$ , приводится далее.

**Оценки для дисперсий  $\sigma_\eta^2$ ,  $\sigma_\xi^2$ .** Вычисление  $\alpha_W$  требует задания дисперсий  $\sigma_\eta^2$ ,  $\sigma_\xi^2$ . В случае когда эти характеристики неизвестны, можно обратиться к оценкам  $s_\eta^2$  (для  $\sigma_\eta^2$ ) и  $s_\xi^2$  (для  $\sigma_\xi^2$ ):

$$\begin{aligned}
s_\eta^2 &= \frac{(N_1^2 N_2^2) / (N_{f_1} N_{f_2})}{(2L_1 + 1)(2L_2 + 1) - 1} \sum_{j_1=-L_1}^{L_1} \sum_{j_2=-L_2}^{L_2} \left| \tilde{F}_p\left(\frac{N_1}{2} + j_1, \frac{N_2}{2} + j_2\right) \right|^2; \\
s_\xi^2 &= \frac{1 / (N_{k_1} N_{k_2} \Delta_1^2 \Delta_2^2)}{(2L_1 + 1)(2L_2 + 1) - 1} \sum_{j_1=-L_1}^{L_1} \sum_{j_2=-L_2}^{L_2} \left| \tilde{\lambda}_k\left(\frac{N_1}{2} + j_1, \frac{N_2}{2} + j_2\right) \right|^2.
\end{aligned}$$

Эти оценки основаны на допущении, что коэффициенты ДПФ  $\tilde{F}_p(l_1, l_2)$ ,  $\tilde{\lambda}_k(l_1, l_2)$  для некоторого «прямоугольника» значений  $l_1, l_2$  с центром в точке  $(N_1/2, N_2/2)$  определяются только погрешностями  $\eta$  и  $\xi$ . Величины  $L_1, L_2$  можно задать как  $L_1 \approx 0,1N_1, L_2 \approx 0,1N_2$ , что соответствует объему выборки  $\approx 0,04N_1 N_2$ . Для типичных значений  $N_1 = 512, N_2 = 512$  объем выборки  $\approx 10500$ . Такой объем выборки позволяет достаточно точно оценить дисперсии  $\sigma_\eta^2, \sigma_\xi^2$ .

**Исследование точности восстановления изображений.** При применении какого-либо алгоритма выбора параметра регуляризации часто возникает вопрос: насколько ухудшается точность восстановления изображения при этом параметре регуляризации по сравнению с изображением, построенным при оптимальном параметре регуляризации? Для ответа на вопрос по отношению к параметру  $\alpha_W$  введем коэффициент эффективности параметра регуляризации  $\alpha_W$ , определяемый выражением

$$E_W = \frac{\|\varphi_{\alpha_{\text{opt}}} - \bar{\varphi}^+\|}{\|\varphi_{\alpha_W} - \bar{\varphi}^+\|}. \quad (23)$$

Этот коэффициент является случайной величиной, которая может принимать значения из интервала  $(0, 1]$ . Значения, близкие к 1 (например, 0,90–0,95), говорят о небольшом проигрыше в точности восстановления. Значения меньше 0,3 указывают на существенное (по сравнению с «оптимальным» изображением) увеличение ошибки восстановления изображения. Зная числовые характеристики (среднее, минимальные значения и др.) случайной величины  $E_W$ , можно говорить о применимости изложенного алгоритма выбора параметра регуляризации.

Рассмотрим некоторые результаты исследования точности восстановления изображений предложенным алгоритмом с использованием коэффициента эффективности (23). В качестве изображения  $\varphi(\tau_1, \tau_2)$  был взят портрет *Girl* размером  $430 \times 412$  пикселей (рис. 1, *a*). «Точное» выходное изображение  $f(t_1, t_2)$ , вычисленное по формуле (2), показано на рис. 1, *b*. Аппаратная функция  $k(\tau_1, \tau_2)$  имела форму гауссовой поверхности (с центром в точке  $(0, 0)$ ). Сечение  $k(\tau_1, 0)$  этой функции показано на рис. 2. Количество отсчетов аппаратной функции задавалось  $40 \times 40$ . Видно, что изображение  $f(t_1, t_2)$  существенно отличается от  $\varphi(\tau_1, \tau_2)$ , что говорит о плохой обусловленности рассматриваемой задачи восстановления. Это подтверждает и



Рис. 1. «Точные» изображения: исходное  $\varphi(\tau_1, \tau_2)$  (*a*) и выходное (зарегистрированное без шума)  $f(t_1, t_2)$  (*b*)

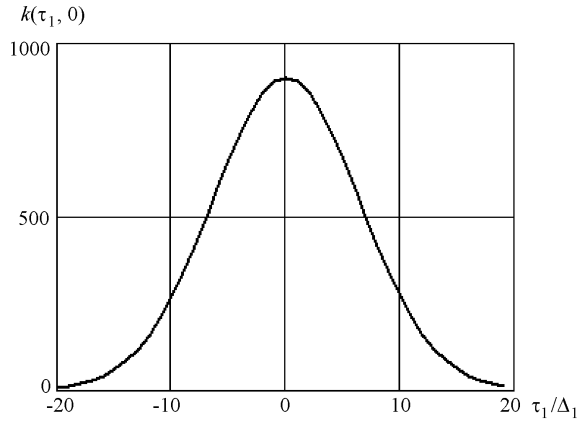


Рис. 2. График сечения  $k(\tau_1, 0)$  аппаратной функции  $k(\tau_1, \tau_2)$

число обусловленности, найденное по формуле  $\max(\lambda_k)/\min(\lambda_k)$  и равное  $2,8 \cdot 10^{10}$ .

Для определения числовых характеристик случайной величины  $E_W$  формировалась выборочная совокупность из значений  $E_W^{(n)}$  (объем выборки  $n_{sam} = 30$ ). Значения  $E_W^{(n)}$  вычислялись по изображению, восстановленному при  $\alpha = \alpha_W^{(n)}$ . Параметр регуляризации  $\alpha_W^{(n)}$  находился по реализациям  $\tilde{f}^{(n)} = f + \eta^{(n)}$ ,  $\tilde{k}^{(n)} = k + \xi^{(n)}$ ,  $n = 1, 2, \dots, n_{sam}$ . Все реализации  $\eta^{(n)}$ ,  $\xi^{(n)}$  имели одинаковые статистические характеристики – нулевое среднее и дисперсии  $\sigma_\eta^2$  и  $\sigma_\xi^2$ . Дисперсия  $\sigma_\eta^2$  вычислялась по формуле

$$\sigma_\eta^2 = \left( \frac{\delta_\eta \max |f(j_1, j_2)|}{2} \right)^2,$$

где  $\delta_\eta = \|\eta\|/\|f\|$  – относительный уровень погрешности правой части, а дисперсия  $\sigma_\xi^2 = \theta \sigma_\eta^2$ .

В таблице приведены значения  $\min_E$  и выборочного среднего  $m_E$ , вычисленных по выборочным совокупностям  $\{E_W^{(n)}\}$ , которые были сформированы

$\delta$	Отношение дисперсий $\theta$					
	0,01	0,10	0,50	1,00	2,00	5,00
0,01	0,903	0,757	0,741	0,791	0,849	0,811
	<b>0,946</b>	<b>0,878</b>	<b>0,901</b>	<b>0,916</b>	<b>0,922</b>	<b>0,908</b>
0,10	0,762	0,738	0,681	0,713	0,766	0,759
	<b>0,902</b>	<b>0,877</b>	<b>0,881</b>	<b>0,909</b>	<b>0,901</b>	<b>0,871</b>

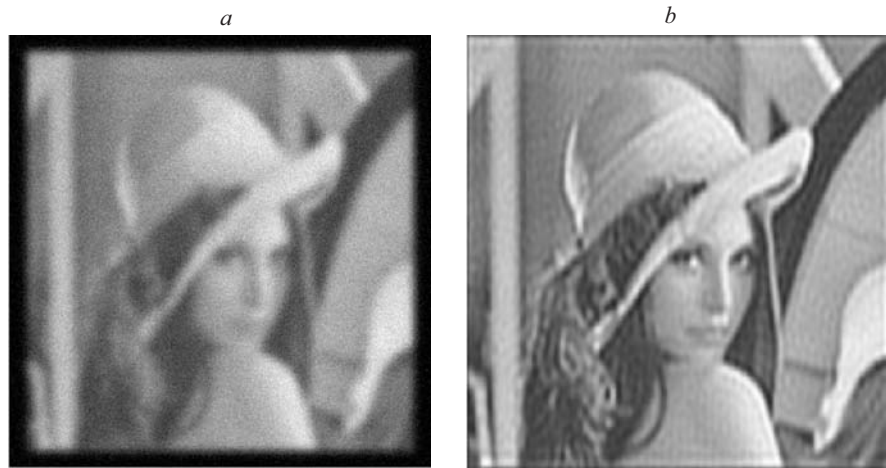


Рис. 3. Моделирование задачи восстановления изображения: зарегистрированное (с шумом) выходное  $\tilde{f}(t_1, t_2)$  (a) и восстановленное  $\varphi_\alpha(\tau_1, \tau_2)$  (b) изображения

для разных уровней шума и отношений дисперсии  $\theta = \sigma_\xi^2 / \sigma_\eta^2$  (выборочные средние  $m_E$  выделены жирным шрифтом). Анализ таблицы показывает, что при увеличении уровня шума  $\delta_\eta$  значения  $E_W$  уменьшаются и увеличение дисперсии  $\sigma_\xi^2$  (отношение  $\theta$ ) не приводит к значительному снижению  $E_W$ .

Данные этого эксперимента и результаты экспериментов с другими изображениями позволяют сделать вывод: предложенный алгоритм выбора параметра регуляризации (19), (21), (22) надежно оценивает значение  $\alpha_{opt}$ .

На рис. 3, a представлено «зашумленное» изображение  $\tilde{f}$  (уровень шума  $\delta_\eta = 0,08$ ), а на рис. 3, b – изображение  $\varphi_\alpha$ , построенное при  $\alpha = \alpha_W$  и неточно заданной аппаратной функции ( $\theta = 2,2$ ,  $\delta_\xi = \|\xi\| / \|k\| = 0,11$ ). Видно достаточно хорошее (для таких исходных данных) качество восстановления изображения.

**Заключение.** Предложенный в работе алгоритм восстановления учитывает погрешности правой части и аппаратной функции как при построении регуляризованного решения, так и при выборе параметра регуляризации. Алгоритм выбора параметра регуляризации осуществляет оценивание оптимального значения в области коэффициентов ДПФ (частотной области), что существенно уменьшает вычислительные затраты на восстановление изображения в целом. Предложенные оценки для дисперсий погрешностей задания правой части и аппаратной функции решают проблему априорного задания этих дисперсий.

В силу известной симметрии уравнения (1) предложенный алгоритм восстановления изображения можно адаптировать для идентификации аппаратной функции динамических систем, измеряющих или регистрирующих изображения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прэйт У. Цифровая обработка изображений. Кн. 2. М.: Мир, 1982.

2. **Цифровая** обработка сигналов в информационных системах: Учебн. пособие. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002.
3. **Морозов В. А., Гребенников А. И.** Методы решения некорректно поставленных задач: алгоритмический аспект. М.: Изд-во МГУ, 1992.
4. **Воскобойников Ю. Е.** Численная реализация и сравнение четырех способов выбора параметра регуляризации в устойчивых алгоритмах деконволюции // Науч. вестн. НГТУ. 2004. № 2(17). С. 27.
5. **Воскобойников Ю. Е., Преображенский Н. Г., Седельников А. И.** Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике. Новосибирск: Наука, 1984.
6. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
7. **Морозов В. А.** Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987.
8. **Гончарский А. В., Леонов А. С., Ягола А. Г.** Обобщенный принцип невязки // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1973. 13, № 2. С. 312.
9. **Воскобойников Ю. Е., Литасов В. А.** Регуляризирующий алгоритм непараметрической идентификации при неточных исходных данных // Науч. вестн. НГТУ. 2005. № 2(20). С. 33.
10. **Воскобойников Ю. Е.** Оценивание оптимального параметра регуляризирующих алгоритмов восстановления изображений // Автометрия. 1995. № 3. С. 68.

*Поступила в редакцию 7 февраля 2006 г.*

---