

Рассмотрение, проведенное в настоящей статье, охватывает и этот предельный случай. Результаты эксперимента в этой связи нам кажутся более понятными.

Конечно, сейчас картина возникновения неустойчивостей нелинейного режима далеко неясна. Обычно оценка нелинейных переносов делается, исходя из предположения, что вследствие нелинейных взаимодействий энергия длинноволновых возмущений переносится в коротковолновую часть спектра. Такая картина принята и в [6]. Однако, как показывает линейная теория устойчивости, наиболее неустойчивыми оказываются возмущения, в которых  $k_{\parallel} \ll k_{\perp}$ , т. е. возмущения носят почти двумерный характер. Не исключено, что картину возникновения нелинейного режима можно представить на языке двумерной турбулентности, когда главную роль играет тенденция к слиянию мелкомасштабных вихрей в большие.

Автор благодарит А. А. Галева, С. С. Моисеева, Р. З. Сагдеева за внимание, проявленное к работе.

Поступила 15 V 1963

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Furth H. P., Killeen J., Rosenbluth M. N. Finite-Resistivity Instabilities of a Sheet Pinch. Phys. Fluids, 1963, v. 6, No. 4.
2. Rosenbluth M., Rostoker N., Krall N., Finite Larmor radius stabilization of «weakly» instable confined plasmas. Nuclear Fusion, 1962, Supplement Part I.
3. Фридман А. М. К теории устойчивости неоднородной плазмы в магнитном поле, ПМТФ, 1964, № 1.
4. Галеев А. А., Ораевский В. Н., Сагдеев Р. З. «Универсальная» неустойчивость неоднородной плазмы в магнитном поле, Ж. эксперим. и теор. физ., 1963, т. 44, стр. 903.
5. Stodiek W., Ellis R. A., jr, Gorman I. G. Loss of charged particles in a stellarator. Nuclear Fusion, 1962, supplement, Part I.
6. Галеев А. А., Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. Теория устойчивости неоднородной плазмы. Атомная энергия, 1963, т. 15, № 6.

#### СТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ АНИЗОТРОПНО ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПОРИСТЫМИ СТЕНКАМИ

*И. П. Семенова (Москва)*

Установившееся течение проводящей жидкости между параллельными пластинами в однородном поперечном магнитном поле (обобщенное течение Гартмана) рассматривалось ранее с учетом эффекта Холла [1-3] и проницаемости стенок [4, 5]. Ниже построено решение, учитывающее одновременно анизотропию проводимости и поперечное течение жидкости, вызванное отсосом на одной пластине и вдувом на другой.

1. Направим оси  $x$  и  $y$  параллельно плоскостям пластин, ось  $z$  — перпендикулярно к ним. Будем считать, что основное течение происходит вдоль осей  $x$  и  $y$  под действием постоянных градиентов давления  $p_x = \partial p / \partial x$  и  $p_y = \partial p / \partial y$  в присутствии внешнего однородного магнитного поля  $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$ . Пусть, кроме того, через нижнюю пластину ( $z = -a$ ) жидкость вдувается, а через верхнюю ( $z = a$ ) отсасывается с постоянной скоростью  $w_0$ , так что расход жидкости в основном течении не зависит от  $x, y$ . Если предположить, что все величины, кроме давления, зависят только от поперечной координаты  $z$ , то из уравнений  $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$  и  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  следует, что во всем потоке  $w = w_0 = \text{const}$ ,  $B_z = B_0 = \text{const}$ . Из условия стационарности задачи следует, что  $E_x = E_{x0} = \text{const}$ ,  $E_y = E_{y0} = \text{const}$ . Будем считать, что пластины  $z = \pm a$  являются диэлектриками. Тогда из уравнения  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$  следует, что  $j_z = 0$ , и векторы скорости, магнитной индукции, электрического поля и плотности электрического тока имеют соответственно вид

$$\mathbf{V} (u, v, w_0), \quad \mathbf{B} (B_x, B_y, B_0), \quad \mathbf{E} (E_{x0}, E_{y0}, E_z), \quad \mathbf{j} (j_x, j_y, 0)$$

Система уравнений, которым удовлетворяют  $u, v, B_x, B_y, j_x, j_y$ , имеет вид

$$\rho w_0 \frac{\partial u}{\partial z} = -p_x + \frac{1}{c} j_y B_0 + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad \rho w_0 \frac{\partial v}{\partial z} = -p_y - \frac{1}{c} j_x B_0 + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{c} (j_x B_y - j_y B_x), \quad j_x = \sigma [E_{x0} + c^{-1} (v B_0 - w_0 B_y)] - \alpha j_y B_0$$

$$j_y = \sigma [E_{y0} + c^{-1}(w_0 B_x - u B_0)] + \alpha j_x B_0 \quad \left( \alpha = \frac{\omega \tau}{|B|} = \text{const} \right) \quad (1.2)$$

$$E_z = -c^{-1}(u B_y - v B_x) + (\alpha / \sigma)(j_x B_y - j_y B_x) \\ \frac{4\pi}{c} j_x = -\frac{\partial B_y}{\partial z}, \quad \frac{4\pi}{c} j_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} \quad (1.3)$$

Здесь  $\omega$  — циклотронная частота электрона,  $\tau$  — среднее время свободного пробега электрона.

Из уравнений (1.3) следует, что разности значений индуцированных магнитных полей при  $z = \pm a$  связаны со значениями полных токов в направлениях  $x$  и  $y$

$$\frac{4\pi}{c} I_x = \frac{4\pi}{c} \int_{-a}^a j_x dz = B_y(-a) - B_y(a), \quad \frac{4\pi}{c} I_y = \frac{4\pi}{c} \int_{-a}^a j_y dz = B_x(a) - B_x(-a)$$

Если считать, что ниже пластины  $z = -a$  магнитное поле однородно по оси  $z$ , то  $B_x(-a) = B_y(-a) = 0$ , а значения  $B_x(a)$  и  $B_y(a)$  пропорциональны значениям полных токов в направлениях  $y$  и  $x$ . Граничные условия имеют вид

$$u = (\pm a) = v(\pm a) = 0, \quad B_x(-a) = B_y(-a) = 0 \quad (1.4)$$

Кроме того, полагаются заданными величины полных токов  $I_x$ ,  $I_y$  и расходов  $Q_x$ ,  $Q_y$  или связанные с ними линейно  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $p_x$ ,  $p_y$ :

$$Q_x = \int_{-a}^a u dz, \quad Q_y = \int_{-a}^a v dz$$

Из первых двух уравнений (1.2) находим

$$j_x = \sigma_e [(E_{x0} - \omega_0 \tau_0 E_{y0}) + (B_0 / c)(v + \omega_0 \tau_0 u) - (w_0 / c)(B_y + \omega_0 \tau_0 B_x)] \quad (1.5)$$

$$j_y = \sigma_e [(E_{y0} + \omega_0 \tau_0 E_{x0}) + (B_0 / c)(\omega_0 \tau_0 v - u) + (w_0 / c)(B_x - \omega_0 \tau_0 B_y)] \quad (1.6) \\ \sigma_e = \sigma / (1 + \omega_0^2 \tau_0^2)$$

Здесь  $\omega_0 \tau_0 = \alpha B_0$ , далее индексы при  $\omega \tau$  опущены.

Интегрируя один раз первые два уравнения (1.1) с учетом (1.3), можно получить выражения для  $B_y + \omega \tau B_x$  и  $B_x - \omega \tau B_y$  и подставить их затем в (1.5) и (1.6), выразив таким образом  $j_x$  и  $j_y$  через скорости. При интегрировании уравнений движения возникнут две произвольные постоянные  $C_1^*$  и  $C_2^*$ , которые можно, используя условия (1.4), выразить через градиенты давления и граничные значения касательных напряжений

$$C_1^* = -p_x a - \mu u'(-a), \quad C_2^* = -p_y a - \mu v'(-a) \quad (1.7)$$

Заменим в уравнениях движения  $j$  и  $j_y$  найденными выражениями и введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$u^* = \frac{u}{u_0}, \quad v^* = \frac{v}{v_0}, \quad w^* = \frac{w}{w_0}, \quad z^* = \frac{z}{a}, \quad e = \frac{c F_x}{u_0 B_0}, \quad k = \frac{c E}{u_0 B_0}, \quad p^* = \frac{p}{\rho_0 u_0^2}$$

$$M^2 = \frac{\sigma_e B_0^2 a^2}{c^2 \mu}, \quad \bar{R} = \frac{\rho u_0 a}{\mu}, \quad u_0 = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a u dz, \quad R_m = \frac{4\pi}{c^2} \sigma_e u_0 a$$

$$C_i^* = \frac{C_i^*}{\rho_0 u_0^2} \quad (i = 1, 2)$$

Опуская значки при безразмерных величинах, получим систему уравнений относительно составляющих скорости

$$u'' - au' + bu + dv' - \omega \tau b v = A + Cz \\ v'' - av' + bv - du' + \omega \tau b u = B + Dz$$

Здесь

$$a = w_0^2 (R + R_m), \quad b = w_0^2 R R_m - M^2, \quad d = w_0 R_m \omega \tau \\ A = R p_x - M^2 (k + \omega \tau e) + w_0^2 R R_m (C_1^* - \omega \tau C_2^*) \\ B = R p_y + M^2 (e - \omega \tau k) - w_0 R R_m (C_2^* + \omega \tau C_1^*) \\ C = -w_0 R R_m (p_x - \omega \tau p_y), \quad D = w_0 R R_m (p_y + \omega \tau p_x)$$

Решение системы представляется в виде

$$\begin{aligned}
 u &= C_1 e^{r_1 z} \cos s_1 z + C_2 e^{r_1 z} \sin s_1 z + C_3 e^{r_2 z} \cos s_2 z + C_4 e^{r_2 z} \sin s_2 z + p_1 + p_3 z \\
 v &= C_1 e^{r_1 z} (m_1 \cos s_1 z - l_1 \sin s_1 z) + C_2 e^{r_1 z} (l_1 \cos s_1 z + m_1 \sin s_1 z) + \\
 &+ C_3 e^{r_2 z} (m_2 \cos s_2 z - l_2 \sin s_2 z) + C_4 e^{r_2 z} (l_2 \cos s_2 z + m_2 \sin s_2 z) + p_2 + p_4 z
 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь через  $r_i, s_i$  ( $i = 1, 2$ ) обозначены соответственно действительные и мнимые части корней характеристического многочлена

$$\begin{aligned}
 r_i &= \frac{a}{2} \pm \left\{ \left[ \left( \frac{a^2 - d^2 - 4b}{8} \right)^2 + \left( \frac{ad - \omega \tau b}{2} \right)^2 \right]^{1/2} + \frac{a^2 - d^2 - 4b}{8} \right\}^{1/2} \\
 s_i &= \frac{d}{2} \pm \left\{ \left[ \left( \frac{a^2 - d^2 - 4b}{8} \right)^2 + \left( \frac{ad - \omega \tau b}{2} \right)^2 \right]^{1/2} - \frac{a^2 - d^2 - 4b}{8} \right\}^{1/2} \\
 m_i &= \frac{\gamma_i \alpha_i - d s_i \beta_i}{\gamma_i^2 + d^2 s_i^2}, \quad l_i = \frac{\gamma_i \beta_i + d s_i \alpha_i}{\gamma_i^2 + d^2 s_i^2}
 \end{aligned}$$

$$\alpha_i = r_i^2 - s_i^2 - a r_i + b, \quad \beta_i = 2 r_i s_i - a s_i, \quad \gamma_i = \omega \tau b - d r_i \quad (i = 1, 2)$$

Входящие в (1.8) частные решения неоднородной системы выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \frac{A + \omega \tau C}{b(1 + \omega^2 \tau^2)} + B \frac{a(1 - \omega^2 \tau^2) + 2\omega \tau d}{b^2(1 + \omega^2 \tau^2)^2} + D \frac{2\omega \tau a - d(1 - \omega^2 \tau^2)}{b^2(1 + \omega^2 \tau^2)^2} \\
 p_2 &= \frac{C - \omega \tau A}{b(1 + \omega^2 \tau^2)} + B \frac{d(1 - \omega^2 \tau^2) - 2\omega \tau a}{b^2(1 + \omega^2 \tau^2)^2} + D \frac{a(1 - \omega^2 \tau^2) + 2\omega \tau d}{b^2(1 + \omega^2 \tau^2)^2} \\
 p_3 &= \frac{B}{b(1 + \omega^2 \tau^2)} + \frac{\omega \tau D}{b(1 + \omega^2 \tau^2)}, \quad p_4 = \frac{D}{b(1 + \omega^2 \tau^2)} - \frac{\omega \tau B}{b(1 + \omega^2 \tau^2)}
 \end{aligned}$$

Полученное решение содержит четыре произвольные постоянные  $C_1, C_2, C_3, C_4$ . Кроме того, в  $p_1$  и  $p_2$  входят еще две постоянные  $C_1^*$  и  $C_2^*$ . Для определения этих шести постоянных имеются шесть граничных условий (1.4). Используя (1.7), где уже учтены последние два условия (1.4), и удовлетворяя остальным, получим систему шести линейных алгебраических уравнений для определения констант, входящих в решение.

Следует отметить, что при  $w_0 = 0$  решение (1.8) переходит в решение, полученное в работах [1-3]. Наличие поперечной скорости  $w_0$  приводит к появлению инерционных членов в уравнениях движения и дополнительных членов в уравнениях закона Ома, зависящих от индуцированного магнитного поля. Вследствие этого отыскание поля скоростей не отделяется от отыскания индуцированных магнитных полей. Фактическое вычисление произвольных постоянных интегрирования затрудняется еще и тем, что при  $w_0 \neq 0$  исчезает симметрия течения относительно плоскости  $z = 0$ .

2. Для выяснения некоторых качественных особенностей течения рассмотрим случай, когда  $R_m \ll 1, \omega \tau \gg 1$ . В этом случае задача несколько упрощается, так как

$$\begin{aligned}
 s_1 &= -s_2, & \alpha_1 &= \alpha_2 = 0 \\
 \beta_1 &= \beta_2 = \omega \tau b, & \gamma_1 &= \gamma_2 = \omega \tau d, & m_1 &= m_2 = 0, & l_1 &= l_2 = 1 \\
 a &= w_0 R, & b &= -M^2, & d &= 0
 \end{aligned}$$

Вместо (1.8) получим

$$\begin{aligned}
 u &= C_1 e^{r_1 z} \cos s_1 z + C_2 e^{r_1 z} \sin s_1 z + C_3 e^{r_2 z} \cos s_1 z - C_4 e^{r_2 z} \sin s_1 z + p_1 \\
 v &= -C_1 e^{r_1 z} \sin s_1 z + C_2 e^{r_1 z} \cos s_1 z + C_3 e^{r_2 z} \sin s_1 z + C_4 e^{r_2 z} \cos s_1 z + p_2
 \end{aligned}$$

Здесь

$$p_1 = - \frac{R(\omega \tau p_y + p_x) - M^2 k(1 + \omega^2 \tau^2)}{M^2(1 + \omega^2 \tau^2)}, \quad p_2 = \frac{R(\omega \tau p_x - p_y) - M^2 e(1 + \omega^2 \tau^2)}{M^2(1 + \omega^2 \tau^2)}$$

Постоянные  $C_1, C_2, C_3, C_4$  определяются, в отличие от общего случая, из системы четырех алгебраических уравнений.

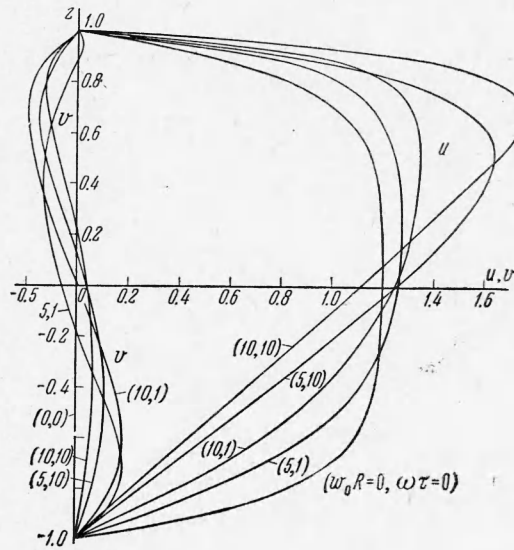
Рассмотрим для примера течение при заданных расходах  $Q_x = 2, Q_y = 0$ , когда  $I_x = 0$ . Параметр  $k$  будем считать известным. Такая задача возникает при изучении процессов в очень широком канале прямоугольного сечения, бесконечно удаленные стенки которого (при  $y \rightarrow \pm \infty$ ) — секционированные электроды.

Из условия  $I_x = 0$  следует, что  $e = -\omega\tau(1-k)$ . Используя граничные условия для скоростей, можем найти  $C_1, C_2, C_3, C_4, P_x, P_y$ , распределение скоростей и токов, и затем вычислить полный ток  $I_y$ .

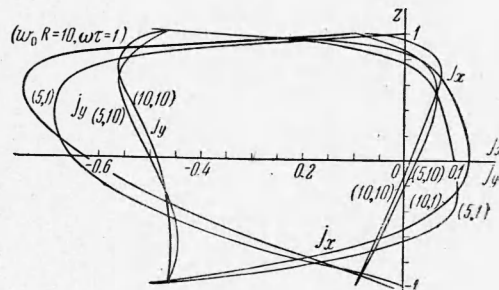
Результаты вычислений, проведенных на ЭВМ «Стрела» при различных значениях безразмерных параметров  $k, \omega\tau, w_0R$  и  $M^2$ , представлены на фиг. 1, 2. Как и следовало ожидать, наличие поперечной скорости  $w_0$  приводит к нарушению симметрии течения относительно плоскости  $z = 0$ . С увеличением параметра  $w_0R$  максимальное значение скорости  $u(z)$  увеличивается, при этом максимум смещается в сторону возрастания  $z$ . Для сравнения приведены кривые из работы [3], соответствующие течению при  $w_0R = 0$ . При  $\omega\tau \rightarrow 0$  профиль скорости  $u(z)$  соответствует решению задачи о течении изотропно проводящей жидкости между пористыми пластинами [4, 5], при  $\omega\tau \rightarrow \infty$  — решению соответствующей чисто гидродинамической задачи [6].

Как видно из приведенных на фиг. 1 кривых, профиль скорости вторичного течения  $v(z)$  теряет свою симметрию при значениях  $w_0R$ , отличных от нуля. При некоторых значениях безразмерных параметров возможно наличие двух точек перегиба на кривой профиля скорости  $v(z)$ . При  $\omega\tau \rightarrow 0$  и  $\omega\tau \rightarrow \infty$  скорость  $v(z)$  исчезает ( $v \rightarrow 0$ ), и течение становится прямолинейным.

Параметр  $w_0R$  влияет на симметрию распределения токов. С ростом  $w_0R$  максимумы плотности тока  $j_y(z)$  несколько увеличиваются и смещаются в сторону возрастания  $z$ . Точки пересечения кривых  $j_x(z)$  с осью  $z$ , соответствующие границам областей, где имеются возвратные токи у стенок, с ростом параметра  $w_0R$  также смещаются в сторону возрастания  $z$ . Это соответствует увеличению указанных областей около одной стенки и уменьшению их около другой. С ростом параметра профили компонент плотности электрического тока  $j_x(z)$  и  $j_y(z)$  становятся более плоскими. В расчетах принималось  $M^2 = 32, k = 0.5$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Поступила 1 IV 1964

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ч е к м а р е в И. Б. Установившееся течение слабо ионизованного газа между параллельными пластинами с учетом анизотропии проводимости. ПММ, 1961, т. 25, вып. 3.
2. Б а р а н о в В. Б. Установившееся течение ионизованного газа в плоском канале с учетом анизотропии проводимости. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 3.
3. S h e r m a n A., S u t t o n G. W. The combined effect of tensor conductivity and viscosity on an MHD generator with segmented electrodes. «Preprint 2001—61. 4-th Biennial gas dynamics Symposium. Magnetohydrodynamics», 1961.
4. Д ж о р б е н а д з е Н. П., Ш а р и к а д з е Д. В. О течении проводящей вязкой жидкости между двумя пористыми плоскостями. Докл. АН СССР, 1960, т. 133, № 2.
5. S u r y a p r a k a s a r a o V. Laminar flow in channels with porous walls in the presence of a transverse magnetic field. Appl. Sci. Res., 1962, v. B9, No. 4/5.
6. C r a m e r K. R. A generalized porous-wall Couette-type flow. J. Aero/Space Sci., 1959, v. 26, No. 2.