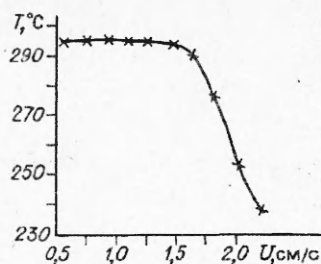


аргона приведены на рис. 5. Ход кривой качественно и количественно подтверждает результаты расчета.

Таким образом, можно утверждать, что при вытягивании ОВ из ФС для снижения требований к оборудованию в газовой схеме и (или) уменьшения влияния неустойчивости параметров газового потока на геометрические размеры волокна желательнее установить расход газа таким, чтобы его среднерасходная скорость в канале печи не превышала 2 см/с, а температура не превышала температуру нижнего среза печи.



Р и с. 5

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев В.Н., Дульнев Г.Н., Наумчик В.Д. Нестационарные процессы при формировании оптического волокна 1. Устойчивость процесса вытяжки // Инж.-физ. журн. — 1988. — Т. 55, № 2. — С. 284.
2. Васильев В.Н., Дульнев Г.Н., Наумчик В.Д. Исследование нестационарных условий формирования оптического волокна 2. Возмущение скорости подачи и вытяжки // Инж.-физ. журн. — 1990. — Т. 58, № 2. — С. 288.
3. Васильев В.Н., Дульнев Г.Н., Наумчик В.Д. Исследование нестационарных условий формирования оптического волокна 3. Реакция процесса вытяжки при тепловых воздействиях и возмущении радиуса заготовки // Инж.-физ. журн. — 1990. — Т. 58, № 3. — С. 499.
4. Лапин Ю.В., Стрелец М.Х. Внутренние течения газовых смесей. — М.: Наука, 1989.
5. Рид Р., Праусниц Дж., Шервуд Т. Свойства газов и жидкостей. — Л.: Химия, 1982.
6. Горбунов М.В. Математическое моделирование процесса вытяжки волоконных световодов из фторидных стекол // Высокочистые вещества. — 1993. — № 4. — С. 160.

г. Ангарск

Поступила 23/VIII 1993 г.,
в окончательном варианте — 23/X 1993 г.

УДК 539.3:534.1

А.А. Ляпин

О ВОЗБУЖДЕНИИ ВОЛН В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ С ЛОКАЛЬНЫМ ДЕФЕКТОМ

Рассмотрена краевая задача о возбуждении упругих волн в слоистом полупространстве с поверхностной выемкой или заглубленной полостью в условиях деформации сдвига. Колебания вызываются нагрузкой на дневной поверхности среды. Исследование базируется на использовании метода граничных интегральных уравнений на основе динамической теоремы взаимности. Построены соответствующие интегральные представления для определения волнового поля в среде через распределение смещений точек дефекта. Полученные граничные интегральные уравнения исследованы численно в зависимости от соотношения физических характеристик среды. Результаты нацелены на практическое приложение в дефектоскопии, сейсмостойком строительстве, вибрационном просвечивании Земли.

В настоящее время имеется достаточно большое число работ по изучению поведения упругих сред типа слоя, полуплоскости с полостями произвольной конфигурации или поверхностными выемками [1—5].

© А.А. Ляпин, 1994

Цель настоящей работы — рассмотрение поведения упругих тел с подобными дефектами произвольной формы для сред с плоскопараллельной слоистостью (пакета слоев, многослойной полуплоскости).

1. Рассматривается (без ограничения общности) двухслойная полуплоскость с дефектом типа полости или поверхностной выемки, целиком расположенным в слое. Геометрия области определяется в декартовой системе координат (x, y, z) соотношениями

$$D_1 = \{x > 0; y \in (-\infty, +\infty)\} \text{ — полуплоскость,}$$

$$D_2 = \{x \in (-h, 0); y \in (-\infty, +\infty); (x, y) \notin \Omega\} \text{ — слой с дефектом}$$

(Ω — односвязная компактная область в D_2 , ограниченная кусочно-гладкой кривой γ).

Установившиеся гармонические с частотой ω колебания вызываются сдвиговой нагрузкой на поверхности слоя, например сосредоточенным усилием

$$\tau_{xz}|_{x=-h} = \delta(y - y_*) \exp(-i\omega t).$$

На остальной части граница (включая поверхность дефекта) считается свободной от напряжений. Слой скреплен с подстилающей полуплоскостью жестко, с требованием непрерывности смещений $w(x, y)$ и напряжений $\tau_{xz}(x, y)$ при переходе через границу $x = 0$. Сдвиговые перемещения $w_j(x, y)$ ($j = 1$ — полуплоскость, $j = 2$ — слой, характеризующиеся параметрами V_j, μ_j — соответственно скорости волн и модули сдвига) удовлетворяют уравнению Гельмгольца, каждое в своей области.

С использованием принципа предельного поглощения функция, описывающая поле смещений в полуплоскости, может быть выписана в виде интеграла Фурье по контуру Γ в плоскости комплексного параметра α [6]:

$$(1.1) \quad w_1(x, y) = \frac{\xi}{2\pi} \int_{\Gamma} \exp(-i\alpha y) T(\alpha) P(x, \alpha) d\alpha,$$

$$P(x, \alpha) = -\exp(-\sigma_1 x) / \sigma_1, \quad \sigma_j = \sqrt{\alpha^2 - \sigma_j^2}, \quad \theta_j = \omega h / V_j, \quad \xi = \mu_2 / \mu_1, \\ j = 1, 2.$$

Здесь все линейные параметры, включая функции смещений, отнесены к толщине слоя h , функции напряжений — к модулю сдвига μ_2 . Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ здесь и далее опущен; $T(\alpha) = F_y[\tau(y)]$ — образ Фурье контактных напряжений на границе раздела сред. В случае, когда подстилающая среда является многослойной полуплоскостью или пакетом слоев, меняется вид функции $P(x, \alpha)$, представляя для исследователя при ее определении трудности лишь численного характера.

Для определения смещений в слое с дефектом используем прямую формулировку метода граничных интегральных уравнений на основе динамической теоремы взаимности [7]. Из всех использованных в рамках данной работы видов фундаментальных решений наиболее эффективным оказался описываемый ниже. Введем функцию Грина, соответствующую действию сосредоточенного сдвигового усилия в точке (x_0, y_0) слоя при отсутствии напряжений на его гранях $x = 0$ и $x = -1$:

$$w_*(x, y, x_0, y_0) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\theta_2 R) + \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\theta_2 R_0) + \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\theta_2 R_{-1}) + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \exp(-i\alpha y) G(x, \alpha, x_0, y_0) d\alpha, \quad R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ R_0 = \sqrt{(x + x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad R_{-1} = \sqrt{(x + x_0 + 2)^2 + (y - y_0)^2}, \\ G(x, \alpha, x_0, y_0) = \exp(i\alpha y_0) [\exp(\sigma_2(x + x_0)) (\exp(-2\sigma_2) + \exp(-2\sigma_2(1 + x))) + \\ + \exp(-\sigma_2(2 + x + x_0)) (\exp(-2\sigma_2) + \exp(2\sigma_2 x)) / (\sigma_2(1 - \exp(-2\sigma_2)))]^{-1}.$$

Здесь внеинтегральные составляющие представляют собой прямое поле источника и однократно отраженные от границ слоя волны, а слагаемое, определяемое контурным интегралом, — многократно отраженные волны. Такой вид функции w_* характеризуется быстрым вычислением ее вне зависимости от соотношения параметров (x, y) и (x_0, y_0) . Считаем, что внешние усилия, действующие на слой с дефектом, соответствуют граничным условиям исходной краевой задачи и условию стыковки сред:

$$\tau_{xz}|_{x=0} = \tau(y), \tau_{xz}|_{x=-1} = \delta(y - y_*), \tau_{nz}|_{(x,y) \in \gamma} = 0.$$

Из соотношений взаимности несложно получить аналог формулы Кирхгофа для определения смещений точек слоя, включая границы $x = 0$ и $x = -1$, через распределение смещений по границе дефекта γ :

$$(1.2) \quad w_2(x_0, y_0) = - \int_{\gamma} q_*(x, y, x_0, y_0) w_2(x, y) ds + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(y) w_*(0, y, x_0, y_0) dy + w_*(-1, y_*, x_0, y_0), \\ q_*(x, y, x_0, y_0) = \partial w_*(x, y, x_0, y_0) / \partial n(x, y).$$

При выводе формул существенно использовано свойство фундаментального решения

$$\partial w_*(x, y, x_0, y_0) / \partial x = 0 \text{ при } x = 0, x = -1,$$

а также соотношение для $(x_0, y_0) \in \gamma$

$$\lim_{y \rightarrow \pm \infty} \int_{-h}^0 [w_*(x, y, x_0, y_0) \partial w_2 / \partial y - \partial w_*/\partial y (x, y, x_0, y_0) w_2] dx = 0,$$

являющееся следствием асимптотического поведения функций w_* , w_2 как конечного набора распространяющихся мод и цилиндрических волн, имеющих степенное убывание с удалением от источника колебаний.

Устремляя далее в соотношении (1.2) (x_0, y_0) к границе с учетом скачка интеграла в его правой части, получим граничное интегральное уравнение

$$(1.3) \quad \xi(x_0, y_0) w_2(x_0, y_0) + \int_{\gamma} q_*(x, y, x_0, y_0) w_2(x, y) ds = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(y) w_*(0, y, x_0, y_0) dy + w_*(-1, y_*, x_0, y_0), (x_0, y_0) \in \gamma.$$

Здесь $\xi(x_0, y_0) = 0,5$ для регулярных точек границы γ ; $\xi(x_0, y_0) = \beta / (2\pi)$ для точек границы $x_0 = -1$, где наблюдается ее излом; β — внутренний угол, соответствующий излому; $\xi(x_0, y_0) = \beta / \pi$ для точек границы γ при $x_0 = -1$ (поверхностная выемка).

Для определения $w_2(x_0, y_0)$ на γ исключим из соотношения (1.3) функцию $\tau(y)$, используя равенство смещений при переходе из D_1 в D_2 через границу $x = 0$. Для этого с помощью формул переразложения [8] запишем функцию Грина в виде интеграла Фурье

$$w_* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\alpha(y_0 - y)] W_*(x, \alpha, x_0) d\alpha, \\ W_*(x, \alpha, x_0) = \frac{\text{ch}[\sigma_2 \max(x, x_0)] \text{ch}[\sigma_2(1 + \min(x, x_0))]}{\sigma_2 \text{sh} \sigma_2}.$$

В соответствии с этим функцию q_* можно представить как

$$q_* = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \exp[i\alpha(y_0 - y)] Q_*(x, \alpha, x_0) d\alpha.$$

Применяя далее преобразование Фурье по координате y_0 к выражению (1.2), с учетом соотношений

$$F_{y_0} \left[\int_{+\infty}^{-\infty} \tau(y) w_*(0, y, x_0, y_0) dy \right] = W_*(0, -\alpha, x_0) T(\alpha),$$

$$F_{y_0} \left[- \int_{\gamma} q_*(x, y, x_0, y_0) w_2(x, y) ds \right] = - \int_{\gamma} Q_*(x, -\alpha, x_0) \exp(i\alpha y) w_2(x, y) ds$$

для трансформанты Фурье контактных напряжений $T(\alpha)$ получим

$$T(\alpha) = \int_{\gamma} (Q_*(x, -\alpha, 0) w_2(x, y) \exp(i\alpha y) ds W_*(-1, -\alpha, 0) \exp(i\alpha y_*)) / \Delta(\alpha),$$

$$\Delta(\alpha) = W_*(0, \alpha, 0) - \zeta P(0, -\alpha).$$

В результате для определения граничного распределения смещений на дефекте в двухслойной среде имеем интегральное уравнение

$$(1.4) \quad \xi(x_0, y_0) w(x_0, y_0) + \int_{\gamma} [q_*(x, y, x_0, y_0) + q_*^+(x, y, x_0, y_0)] w_2(x, y) ds =$$

$$= w_*(-1, y_*, x_0, y_0) + w_*^+(-1, y_*, x_0, y_0), \quad (x_0, y_0) \in \gamma,$$

$$q_*^+(x, y, x_0, y_0) = - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \exp[i\alpha(y_0 - y)] |W_*(0, \alpha, x_0) Q_*(x, \alpha, 0) / \Delta(\alpha),$$

$$w_*^+(x, y, x_0, y_0) = - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \exp[i\alpha(y_0 - y)] |W_*(0, \alpha, x_0) \bar{W}_-(x, \alpha, 0) / \Delta(\alpha).$$

Таким образом, фундаментальное решение

$$(1.5) \quad w_*(x, y, x_0, y_0) + w_*^+(x, y, x_0, y_0)$$

является решением специального вида, удовлетворяющим нулевым условиям на дневной поверхности слоя и условиям жесткого сцепления с подстилающей средой на нижней грани. Заметим, что нули функции $\Delta(\alpha)$ соответствуют волновым числам волн Лява в двухслойной полуплоскости (без дефекта) и обходятся контуром Γ в комплексной плоскости параметра α : положительные — снизу, отрицательные — сверху. При совпадении упругих параметров слоя и полуплоскости фундаментальное решение (1.5) вырождается в функцию Грина для полуплоскости:

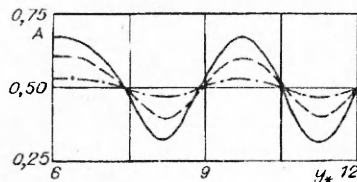
$$\frac{i}{4} H_0^{(1)}(\theta_2 R) + \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\theta_2 R_{-1}).$$

Опираясь на представление фундаментального решения, несложно показать эквивалентность граничного интегрального уравнения (1.5) исходной краевой задаче.

После определения из (1.5) функции $w_2(x, y)$ на γ волновое поле во всей области, включая границу, восстанавливается из формул (1.1), (1.2) с учетом выражения (1.4).

Описанная здесь методика непосредственно обобщается на задачи о колебаниях слоистой среды с дефектом в плоской постановке.

2. В качестве примера расчета характеристик волнового движения слоя с поверхностной выемкой рассмотрим поведение амплитуды поверхностной волны в дальней от источника колебаний зоне



$$|y_0 - y_*| \gg 1$$

в зависимости от формы выемки. Поверхность выемки характеризуется параметром κ , соответствующим ее параметризации:

$$y = \kappa \cos \vartheta, \quad x = -0,5 - 0,5 \cos^2 \vartheta, \quad \vartheta \in [0, \pi], \quad \kappa \in (0; 0,5].$$

Значение параметра $\kappa = 0$ отвечает вертикальной поверхностной трещине глубины 0,5.

Амплитуда поверхностной волны на частотах $\theta_2 < \pi$ может быть выражена соотношением

$$A = \frac{i}{2\theta_2} [\exp(-i\theta_2 y_*) + i\theta_2 \int_{\gamma} \exp(-i\theta_2 y) \cos(n, e_y) w(x, y) ds].$$

При этом первое слагаемое характеризует амплитуду поверхностной волны в слое без дефекта. Как видно из приведенной формулы, наименьшее влияние на энергию поверхностной волны оказывают дефекты типа плоских трещин с ориентацией, параллельной границам слоя. Для вертикальных трещин отклонение от соответствующей характеристики для слоя без дефекта пропорционально раскрытию трещины. На рисунке приведены зависимости величины A от параметра y_* для различных форм поверхностной выемки: $\kappa = 0,5; 0,1; 0,02$ (сплошная, штриховая и штрихпунктирная линии). Начиная с некоторого значения y_* , порядка длины волны сдвига в слое, наблюдается периодичность зависимости A от y_* . При этом модуль амплитуды A колеблется вокруг соответствующей величины для слоя без дефекта, отклоняясь от нее тем менее, чем меньше параметр κ из диапазона $(0; 0,5]$. Заметим, что изложенные закономерности характерны для $\theta_2 < \pi$, т.е. для относительно тонких слоев и малых размеров дефекта по отношению к длине сдвиговой волны в среде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров Е.В., Ильин И.В. Метод расчета электромагнитных полей в плоскопараллельной слоистой среде с локальными неоднородностями // Вычислительные методы и программирование. — М.: Изд-во МГУ, 1971. — Вып. 16.
2. Roberts R.A. Elastodynamic scattering by a surface-breaking void // J. Acoust. Soc. Amer. — 1989. — V. 85, N 2.
3. Ватульян А.О., Кацевич А.Я. Колебания упругого ортотропного слоя с полостью // ПМТФ. — 1991. — № 1.
4. Алексеева Л.А. Граничные интегральные уравнения для упругой полуплоскости с отверстием при динамическом нагружении на его контуре // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. — 1987. — № 3.
5. Budreck D.E., Achenbach J.D. Three-dimensional elastic wave scattering by surface-breaking cracks // J. Acoust. Soc. Amer. — 1989. — V. 86, N 1.
6. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. — М.: Наука, 1979.
7. Бенердби П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. — М.: Мир, 1984.
8. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. — М.: ИЛ, 1960. — Т. 2.

г. Ростов-на-Дону

Поступила 23/XI 1993 г.