5. **Lysenko V. I., Maslov A. A.** The effect of cooling on supersonic boundary — layer stability // J. Fluid Mech.— 1984.— V. 147.— P. 39.
6. **Косинов А. Д., Маслов А. А., Шевельков С. Г.** Экспериментальное исследование волновой структуры сверхзвукового пограничного слоя // ПМТФ.— 1986.— № 5.

г. Новосибирск *Поступила 22/I 1991 г.*

УДК 532.5.29.5

А. Н. Котюсов, Б. Е. Немцов, Е. Е. Орлова

О МЕХАНИЗМЕ КОАЛЕСЦЕНЦИИ ПУЗЫРЬКОВ ГАЗА, ДВИЖУЩИХСЯ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

При исследовании процессов, происходящих в жидкости, содержащей пузырьки газа или пара, очень важно понимание механизма роста пузырьков при их движении в жидкости. Очевидно, что наиболее существенным здесь является процесс коалесценции, т. е. сближение мелких пузырьков и их объединение в пузырек большого размера. При изучении динамических механизмов коагуляции и коалесценции [1—3] макроскопическое движение гетерогенных смесей рассматривается обычно при выполнении ряда допущений. Эти допущения, как правило, позволяют проводить исследование динамических характеристик одиночных частиц с последующей попыткой учесть их парное взаимодействие друг с другом. Так, сила Бьеркнесса, приводящая к сближению частиц, рассматривается как результат взаимодействия двух отдельных частиц. В то же время существует и другая возможность взаимодействия частиц и их коллективной динамики, связанная с когерентным характером длинноволновых возмущений, в формировании которых участвует сразу большое число частиц. Впервые на эту возможность указано в [4], где, однако, использование схемы потенциального обтекания не дает права обобщить результат на случай реальных жидкостей. Учет вязкости при изучении коллективного взаимодействия в задачах такого рода был сделан в [5, 6] при исследовании потоков аэрозолей, а также при изучении воздействия звука на аэрозоль. Было получено, что в газе, содержащем движущиеся твердые частицы, развивается неустойчивость, приводящая к сближению частиц и их дальнейшей коагуляции. Неустойчивость имеет простое объяснение. Если в некоторой области повышается объемная концентрация частиц, то, как вытекает из уравнения неразрывности, в ней увеличивается и скорость несущей фазы. В итоге частицы из области с повышенной концентрацией ускоряются и догоняют частицы в области с пониженной концентрацией, что приводит к дальнейшему росту объемной плотности и увеличению вероятности коагуляции. Кроме того, в области с повышенной концентрацией частиц при росте скорости газа уменьшается давление, что также вызывает дальнейшее увеличение плотности числа частиц.

Поскольку полученная неустойчивость универсального характера, то становится очевидным, что она может возникать при любом плавном движении в двухфазной среде. Весьма интересно изучение этой неустойчивости в жидкости с пузырьками газа или пара. Это связано с необходимостью более полного понимания процессов, происходящих при дегазации жидкостей [2]. Кроме того, при распространении возмущений в такой среде у пузырьков возникают собственные колебания, учет которых так или иначе может повлиять на развитие процесса. Решению этой задачи и посвящена настоящая работа.

Рассмотрение проведем на примере простой модели вязкой жидкости, содержащей пузырьки газа одного радиуса, всплывающие в поле силы тяжести. Положим, что энергией и другими эффектами хаотического и внутреннего движения пузырьков можно пренебречь. Будем считать, что отсутствуют столкновения пузырьков, процессы дробления и слипания, а также фазовые переходы. При этом учитываются только радиальные колебания пузырьков. Тогда система уравнений для подобной модели двухфазной среды имеет вид [7]

(1) $$\operatorname{div} \mathbf{v}_1 = \partial\alpha/\partial t + \operatorname{div} \alpha\mathbf{v}_1;$$

(2) $$\partial n/\partial t + \operatorname{div} n\mathbf{v}_2 = 0;$$

(3) $$d_2\rho_2/dt = -(3\rho_2/a)d_2a/dt;$$

(4) $$\rho_1\frac{d_1\mathbf{v}_1}{dt} = -\nabla p^* + \nabla\tau^* - \frac{\alpha}{2}\rho_1\left[\frac{d_2}{dt}(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2) - \frac{3}{a}(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)\frac{d_2a}{dt}\right] - \frac{9\alpha}{2a^2}\nu\rho_1(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2) + \rho_1\mathbf{g};$$

(5) $$\rho_2\frac{d_2\mathbf{v}_2}{dt} = \rho_1\left(\frac{d_1\mathbf{v}_1}{dt} - \mathbf{g}\right) + \frac{\rho_1}{2}\left[\frac{d_2}{dt}(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2) - \frac{3}{a}(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)\frac{d_2a}{dt}\right] + \frac{9}{2a^2}\nu\rho_1(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2) + \rho_2\mathbf{g};$$

(6) $$ad_2^2a/dt^2 = (p_2 - p_1 - 2\sigma/a)/\rho_1 - (4\nu/a)\,d_2a/dt - (3/2)(d_2a/dt)^2 + (\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)^2/4;$$

(7) $$p^* = (1-\alpha)p_1 + \alpha(p_2 - 2\sigma/a) + \alpha\rho_1[(d_2a/dt)^2 + (\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)^2/6];$$

(8) $$\tau^* = -\alpha\rho_1(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)^2/3 + 4\nu\rho_1\nabla[(1-\alpha)\mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{v}_2]/3.$$

Здесь (1)—(3) — уравнения сохранения удельных объемов фаз и числа частиц; (4) и (5) — движения жидкости и газа соответственно; (6) — уравнение Рэлея — Ламба для колебаний пузырька; $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ — скорости жидкости и пузырьков; ρ_1, ρ_2 — плотности жидкости и газа; a — радиус пузырька; $\alpha = 4\pi a^3n/3$ — объемная концентрация пузырьков; ν — кинематическая вязкость жидкости; $d_1/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v}_1\nabla$; $d_2/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v}_2\nabla$; p_1 — давление в жидкости; p_2 — давление газа в пузырьке, которое из уравнения состояния может быть найдено в виде $p_2 = p_0(a_0/a)^{3\gamma}$; γ — показатель адиабаты; p — давление газа в пузырьке при радиусе a_0.

Нетрудно заметить, что система (1)—(8) имеет стационарное решение, соответствующее равномерному всплыванию пузырьков в поле силы тяжести. Такое решение, вообще говоря, зависит от координаты всплывающего пузырька, т. е. по мере всплывания параметры пузырька медленно меняются. Однако очевидно, что изменением параметров можно пренебречь на масштабах $h \ll p_0/\rho_1 g$, где p_0 — давление в жидкости, принятое за равновесное (например, если за p_0 принять давление на поверхности жидкости, то $h \ll 10$ м). Кроме того, уравнения (1)—(8) справедливы в предположении малости числа Рейнольдса (Re < 1), а также при условии

(9) $$a \ll n^{-1/3} \ll \lambda$$

(λ — характерный масштаб гидродинамических возмущений).

Для исследования неустойчивости перейдем в систему отсчета, связанную с пузырьками, и, считая величины p_0, v_{10}, n_0, a_0 невозмущенными, линеаризуем уравнения (1)—(8) на их фоне. Предполагая возмущения зависящими от координат и времени по закону $\exp(-i\omega t + i\mathbf{kr})$, находим

(10) $$\mathbf{k}\mathbf{v}_1' = -\alpha'(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_{10});$$

(11) $$\mathbf{k}\mathbf{v}_2' = \omega(\alpha'/\alpha - 3a'/a);$$

(12) $$\rho_2' = -3\rho_2 a'/a;$$

(13) $$p_1'/\rho_1 = a'(a_0\omega^2 + 4i\nu\omega/a_0^2 - 3\gamma p_0/a\rho_1) + \mathbf{v}_{10}(\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_2')/2;$$

(14) $$\mathbf{k}\mathbf{v}_2'(\omega/2 + i\beta) = \mathbf{k}\mathbf{v}_1'(3\omega/2 - \mathbf{k}\mathbf{v}_{10} + i\beta) + a'(3\omega/2 - 2i\beta)\mathbf{k}\mathbf{v}_{10}/a;$$

(15) $$k^2p_1'/\rho_1 = \mathbf{k}\mathbf{v}_1'(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_{10} + 4i\nu k^2/3 + i\beta\alpha) + \alpha\mathbf{k}\mathbf{v}_2'(\mathbf{k}\mathbf{v}_{10} + 4i\nu k^2/3 - \omega/2 - i\beta) + \alpha'[-(\mathbf{k}\mathbf{v}_{10})^2/2 - (4i\nu k^2/3)\mathbf{k}\mathbf{v}_{10} + i\beta\mathbf{k}\mathbf{v}_{10}] + a'\alpha\mathbf{k}\mathbf{v}_{10}(3\omega/2 - 4\beta)/a,$$

где $\beta = 9\nu/2a_0^2$.

Решая уравнения (10)—(15), для колебаний в системе получим дисперсионное уравнение

$$(16)\quad [-3\alpha\omega^2/2 + \omega(\varkappa\Omega/2 - i\beta\alpha) - \alpha\varkappa\Omega(2\varkappa\Omega - i\beta)][3\omega^2/2 + \omega(3\varkappa\Omega/2 + 3i\beta) - 2i\beta\varkappa\Omega] = \left[\omega^2(\varkappa^2 - 3\alpha/2) + \omega(3\varkappa\Omega/2 - 3i\beta\alpha + 4i\beta\varkappa^2/3) + \left(2i\beta\alpha\varkappa\Omega - \varkappa^2\omega_0^2\right)\right][\omega^2/2 + \omega(i\beta - 5\alpha\varkappa\Omega/2) + \alpha\varkappa\Omega(\varkappa\Omega - i\beta)]$$

с учетом соотношений $\alpha \ll 1$, $\rho_2/\rho_1 \ll 1$, $2\sigma/a \ll p_0$. Кроме того, здесь введены обозначения: $\omega_0 = (c/a)\sqrt{\rho_2/\rho_1}$, $\Omega = v_{10}/a_0$, $\varkappa = ka_0$, c — скорость звука в газе. Проводя дальнейшие преобразования в (16) для соотношения частот в предположении $\omega_0 \gg \beta$, $\omega_0 \gg \alpha$, имеем

$$\omega^4 + (10i\beta/3 - 5\alpha\varkappa\Omega)\omega^3 - \left(\omega_0^2 + 26i\beta\frac{\alpha}{3}\varkappa\Omega\right)\omega^2 + \left[-2i\beta\omega_0^2 + (6\beta^2 + 5(\varkappa\omega_0)^2)\alpha\Omega/\varkappa\right]\omega - 2\alpha\Omega^2((\varkappa\omega_0)^2 + 2\beta^2) + 2i\beta\alpha\varkappa\Omega\omega_0^2 = 0.$$

Корни дисперсионного уравнения распадаются на высокочастотные с $\omega \sim \omega_0$ и низкочастотные. Решение показывает, что в высокочастотном приближении колебания устойчивы и не представляют интереса. В низкочастотном приближении ($\omega \ll \omega_0$, β) существенными являются только последние два члена, что дает

$$(17)\qquad \omega \simeq \alpha\varkappa\Omega + i\alpha\Omega^2\left(\varkappa^2 + 2\beta^2/\omega_0^2\right)/\beta.$$

Из (17) видно, что в рассмотренной двухфазной среде развивается неустойчивость, инкремент которой

$$\gamma \approx \alpha\Omega^2\left(\varkappa^2 + 2\beta^2/\omega_0^2\right)/\beta.$$

Неустойчивость приводит к росту возмущений концентрации и сближению пузырьков, что в свою очередь увеличивает вероятность их коалесценции. Очевидно, что для колебаний с $\varkappa \ll \beta/\omega_0$ решение совпадает с полученным в [5, 6]. Если же $\varkappa \geqslant \beta/\omega_0$, то необходим учет собственных колебаний пузырька. Количественные оценки показывают, что для параметров $a_0 \sim 0{,}01$ см, $\alpha \sim 0{,}02$, $v = 2ga^2/9\nu$ $\gamma \sim 0{,}1$ с$^{-1}$. Таким образом, характерное время развития неустойчивости, т. е. время сближения пузырьков, $\tau \sim 10$ с. За это время пузырьки проходят путь $l = 20$ см, что позволяет не учитывать плавных изменений невозмущенных значений и подтверждает правильность сделанных упрощений. Отметим, что изложенным механизмом может быть объяснена не только коалесценция пузырьков, всплывающих в жидкости, но и коалесценция при воздействии на жидкость мощным звуковым излучением [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Медников Е. П.** Акустическая коагуляция и осаждение аэрозолей.— М.: Изд-во АН СССР, 1963.
2. **Физические** основы ультразвуковой технологии/Под ред. Л. Д. Розенберга.— М.: Наука, 1970.
3. **Миронов М. А.** Силы Бьеркнесса в вязкой среде и акустическая коагуляция аэрозолей // Акуст. журн.— 1976.— Т. 22, № 6.
4. **Иорданский С. В., Куликовский А. Г.** О движении жидкости, содержащей мелкие частицы // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1977.— № 4.
5. **Котюсов А. Н., Немцов Б. Е.** Неустойчивость равномерного распределения твердых частиц в потоке газа // Изв. вузов. Радиофизика.— 1990.— Т. 33, № 11.
6. **Немцов Б. Е., Эйдман В. Я.** Коллективный эффект конденсации капель под действием звука // Акуст. журн.— 1989.— Т. 25, № 5.
7. **Нигматулин Р. И.** Основы механики гетерогенных сред.— М.: Наука, 1978.

г. Нижний Новгород *Поступила 8/I 1991 г.*