

3. Волков В. И., Мухин В. А., Накоряков В. Е. Исследование структуры течения в пористой среде // ЖПХ.— 1981.— Т. 34, № 4.
4. Mickley H. S., Smith K. A., Korchah E. T. Fluid flow in packed beds // Chem. Eng. Sci.— 1965.— V. 20, N 3.
5. Van der Merwe D. G., Gauvin W. H. Velocity and turbulence measurement of air flow through a packed bed // AIChE J.— 1971.— V. 17, N 3.
6. Хинце И. О. Турбулентность.— М.: Физматгиз, 1963.
7. Гольдштик М. А. Процессы переноса в зернистом слое.— Новосибирск: ИТ СО АН СССР, 1984.
8. Колмогоров А. Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. Сер. физ.— 1942.— Т. 2, № 1, 2.
9. Маджумдар, Сингхал, Сполдинг. Численное моделирование градиент. Ч. 1. Математическая и физическая модель // Теплопередача.— 1983.— Т. 105, № 4.
10. Аэров М. Э., Тодес О. М., Наринский Д. А. Аппараты со стационарным зернистым слоем.— Л.: Химия, 1979.
11. Кокорев Л. С., Федосеев В. И., Харитонов В. В., Воскобойников В. В. Новый подход к расчету теплоотдачи в пористых средах.— М., 1986.— (Препр. // МИФИ; № 024—86).
12. Ершин Ш. А., Хадиева Л. Г. О гидравлическом сопротивлении и преломляющем действии мелкоячеистых сеток // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1988.— № 2.
13. Chien K. I. Predictions of channel and boundary layer flows with a low-Reynolds-number turbulence model // AIAA J.— 1982.— V. 20, N 1.
14. Ершин Ш. А., Жапбасбаев У. К., Кулымбаева М. Ш., Хадиева Л. Г. Исследование аэродинамики аппаратов с неподвижным зернистым слоем // ПМТФ.— 1990.— № 4.
15. Vortmeyer D., Schuster J. Evaluation of steady flow profiles in rectangular and circular packed beds by a variational method // Chem. Eng. Sci.— 1983.— V. 38, N 10.
16. Струминский В. В. Пути совершенствования технологии машиностроения в промышленности и сельском хозяйстве на основе достижений механики неоднородных сред // Гидродинамические проблемы технологических процессов.— М.: Наука, 1988.
17. Ерошенко В. М., Зайчик Л. И. Гидродинамика и тепломассообмен на пронизываемых поверхностях.— М.: Наука, 1984.
18. Aggarwal J. K., Hollingsworth M. A., Mayhew J. R. Experimental friction factors for turbulent flow with suction in porous tube // Int. J. Heat and Mass Transfer.— 1972.— V. 15, N 5.

г. Алма-Ата

Поступила 22/V 1991 г.

УДК 534.1.1/2; 533.6.013.42

В. П. Рейтов

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ПРОГИБА ПАНЕЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Исследование колебательной неустойчивости пластин в потоках жидкости и газа (панельного флаттера)— одна из основных задач теории аэро- и гидроупругости [1, 2]. В данной работе изучается неустойчивость прогиба плоской панельной поверхности, находящейся в турбулентном пограничном слое несжимаемого течения. Рассматривается простая модель такой поверхности — цепочка бесконечных в направлении поперек течения пластин с шарнирно закрепленными краями. Гидродинамическая часть задачи решается в «квазиламинарном» приближении, когда ламинарному потоку присваивается профиль скорости среднего течения в турбулентном пограничном слое. Толщина пограничного слоя предполагается постоянной вдоль цепочки. Изучается неустойчивость одного типа колебаний — периодического прогиба поверхности с разными знаками отклонения смежных пластинок. Известно, что при потенциальном обтекании отдельного гладкого выступа на плоской поверхности над ним образуется область пониженного давления, а за его пределами давление повышается. Поэтому можно предположить, что знакопеременный прогиб пластин будет наиболее типичной формой прогиба при установившихся колебаниях цепочки. Такая форма прогиба была выбрана в [3] при ана-

лизе сверхзвукового флаттера периодически подкрепленной большой панели (см. также обзор [4]).

Задача о флаттере цепочки пластин тесно связана с известной задачей об устойчивости однородной упругой поверхности, обтекаемой плоскопараллельным потоком [5]. Наиболее детально исследовалась неустойчивость изгибных волн на такой поверхности при ламинарном течении над ней (пограничный слой Блазиуса, течение Пуазейля и др.) [5—7]. Задача определения отклика среднего течения в турбулентном пограничном слое на прогиб поверхности в форме бегущей волны рассматривалась в [8]. Однако в этой работе использовалось интерполяционное представление решений уравнения Рэлея, что не позволяет получить надежные результаты для практически важного случая «умеренных» волновых чисел прогиба и произвольных значений фазовой скорости изгибных гармоник. Аналогичная задача для колебаний морской поверхности в атмосферном пограничном слое решалась на основе асимптотической теории в [9—12].

В данной работе для определения отклика течения на периодический прогиб панельной поверхности также используется асимптотическая теория устойчивости сдвиговых течений. Уравнение Рэлея для профиля возмущений скорости в пограничном слое решается численно.

1. Характеристическое уравнение для колебаний с периодическим знакопеременным прогибом пластин. Рассмотрим цепочку бесконечных в направлении поперек течения одинаковых пластин с длиной L . Края пластин состыкованы вплотную друг с другом и закреплены шарнирно. В области $y > 0$ цепочка обтекается плоскопараллельным потоком с профилем скорости $\bar{u}(y)$ в форме пограничного слоя. В области $y < 0$ жидкость неподвижна. Плотность жидкости в областях $y > 0$ и $y < 0$ соответственно равна ρ_1 и ρ_2 .

Для описания одномерного прогиба поверхности $y = w(x, t)$ воспользуемся уравнениями движения тонкой пластинки [1]

$$(1.1) \quad \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2r \frac{\partial w}{\partial t} = p_2 - p_1,$$

где γ — масса на единицу площади поверхности пластинки; $D = Eh^3/(12(1 - \mu^2))$ — ее изгибная жесткость (h — толщина пластинки, E — модуль Юнга, μ — коэффициент Пуассона); r — феноменологический коэффициент потерь; N — внешнее поджатие; $p_{1,2}$ — давление на поверхности со стороны полупространств $y > 0$ и $y < 0$.

Граничные условия при независимом шарнирном закреплении пластинок на линиях $x_n = (n - 1)L \pm 0$ (n — целое) имеют вид [1] $w = 0$, $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$. Смещение поверхности каждой пластинки представим как ряд Бубнова — Галеркина:

$$(1.2) \quad w = \sum_{s=1,2,\dots} w_n^{(s)}(t) \sin [sk_0(x - x_n)] \quad (x_n < x < x_{n+1})$$

($k_0 = \pi/L$ — волновое число главной моды прогиба, $w_n^{(s)}$ — амплитуда s -й моды на n -й пластинке). Подстановка (1.2) в (1.1) приводит к уравнениям возбуждения для амплитуд мод:

$$(1.3) \quad \frac{\partial^2 w_n^{(s)}}{\partial t^2} + 2r \frac{\partial w_n^{(s)}}{\partial t} + (Dk_0^4 s^4 - Nk_0^2 s^2) w_n^{(s)} = \frac{2}{L} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (p_2 - p_1) \times \\ \times \sin [sk_0(x - x_n)] dx.$$

Для замыкания системы (1.3) необходимо связать $p_{1,2}$ со смещением поверхности. В случае линейной среды достаточно знать отклик на элементарные прогибы $w \sim \exp(ikx - i\omega t)$. Обозначая символом Λ сверху комплексные амплитуды переменных, введем входную комплексную упру-

гость (гидроупругость) для полупространств $y > 0$ и $y < 0$ соответственно:

$$(1.4) \quad Y_{1,2}(c, k) = \pm \widehat{p}_{1,2}(c, k) \widehat{w}(c, k)$$

($c = \omega/k$ — фазовая скорость гармоника (ω, k)). Можно ввести также полную комплексную упругость среды $Y = Y_1 + Y_2$. В данном определении вещественное положительное и не зависящее от частоты Y означает наличие «возвращающей силы» со стороны среды. Если $Y \sim -\omega^2$, то воздействие среды сводится к появлению присоединенной массы. В отличие от обычно используемой в акустике «проводимости» среды [6] комплексная упругость позволяет описывать отклик на статические ($\omega = 0$) прогибы поверхности.

Наиболее простым для анализа и в то же время практически важным (в силу приведенных выше соображений) является случай периодического одномодового прогиба, когда колебания поверхности можно описать с помощью одной амплитуды $A(t)$: $w_n^{(1)} = (-1)^{n+1} A$, $w(x, t) = A \sin k_0 x$. Это простейшая из возможных форм периодического прогиба, так как прогиб при другом соотношении амплитуд отклонений соседних пластинок приводит к бесконечной комплексной упругости. Полагая $A = A_0 e^{-i\omega t}$, нетрудно убедиться, что система (1.3) сводится к одному уравнению для A_0 , из которого получается характеристическое уравнение вида

$$(1.5) \quad \gamma \omega^2 + 2ir\omega - [(Dk_0^4 - Nk_0^2) = \frac{1}{2} J(c, k_0),$$

где $J = Y(c, k) + Y(c, -k)$.

Функции $Y(c, k)$ и $J(c, k)$ определяются при действительных c как аналитическое продолжение с контура интегрирования в обратном преобразовании Лапласа, которое возникает при решении задачи с заданным в начальный момент прогибом поверхности. Это позволяет в дальнейшем вычислять функцию J при действительных c и k по формуле $J = Y(c, k) + Y^*(-c, k)$, продолжая результат аналитически в область комплексных c .

Явное выражение для Y легко найти в случае потенциального обтекания поверхности однородным потоком: $\bar{u}(y) = u_\infty$. Несложные расчеты дают

$$(1.6) \quad Y = -\rho_1 |k| (c - u_\infty)^2 - \rho_2 |k| c^2.$$

Соответственно уравнение (1.5) принимает вид

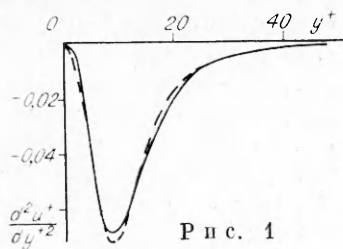
$$(1.7) \quad \gamma_0 \omega^2 + 2ir\omega - (Dk_0^4 - Nk_0^2 - \gamma_1 k_0^2 u_\infty^2) = 0,$$

где $\gamma_0 = \gamma + \gamma_1 + \gamma_2$; $\gamma_{1,2} = \rho_{1,2}/k_0$ — присоединенная масса на единицу площади от полупространств $y > 0$ и $y < 0$ для данного типа колебаний.

В дальнейшем будем рассматривать только случай устойчивого пулевого отклонения поверхности в отсутствие потока: $N < Dk_0^2$. Решая (1.7), можно определить критическую скорость потока $u_{\infty c}$, превышение которой приводит к статической неустойчивости (дивергенции [2]) поверхности: $u_{\infty c} = \omega_0/k_0 \sqrt{\alpha_1}$ ($\alpha_1 = \gamma_1/\gamma_0$, $\omega_0 = [(Dk_0^4 - Nk_0^2)/\gamma_0]^{1/2}$ — частота собственных колебаний цепочки без потерь при $u_\infty = 0$). При $u_\infty < u_{\infty c}$ колебания поверхности нейтрально-устойчивы в отсутствие потерь ($r = 0$) либо затухают при $r > 0$.

2. Комплексная упругость течения в турбулентном пограничном слое. Для исследования на устойчивость прогиба поверхности в турбулентном пограничном слое необходимо найти комплексную упругость этого течения $Y_1(c, k)$. Профиль средней скорости в турбулентном пограничном слое имеет универсальный логарифмический участок [13]

$$(2.1) \quad u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B.$$



Р и с. 1

R	u_*/u_∞	δ^+
$4 \cdot 10^4$	0,0381	1523
$8 \cdot 10^4$	0,0359	2873
$1,5 \cdot 10^5$	0,0341	5121

Здесь $y^+ = yu_*/\nu$; $u^+ = \bar{u}/u_*$ (u_* — динамическая скорость); $\kappa = 0,4$; B — постоянная ($B \approx 5,0$ для гидравлически гладкой поверхности). Закон (2.4) действует в области $\delta_L^+ < y^+ < 0,15\delta^+$ ($\delta^+ = u_*\delta/\nu$, $\delta_L^+ = u_*\delta_L/\nu$ — безразмерные аналоги толщины пограничного слоя δ и толщины пристеночной буферной области δ_L , обычно принимается $\delta_L \approx 30$ [14]). Характерным масштабом профиля (2.4) является текущее расстояние от стенки y^+ . Зависимость (2.4) нарушается вблизи стенки, где профиль скорости стремится к линейному ($u^+ \rightarrow y^+$), а также в области «следа» $y^+ > 0,15\delta^+$, где отклонение u^+ от (2.4) можно учесть с помощью малой корректирующей добавки [15]. В приложении дана явная аналитическая аппроксимация для полного профиля скорости в турбулентном пограничном слое (см. (П. 4)), близкая к одной из известных неявных аппроксимаций [16]. На рис. 1 показаны профили второй производной, вычисленные по формуле (П. 4) (сплошная линия) и для аппроксимации [16] (штриховая). Использование явного представления для профиля скорости (П. 4) существенно упрощает численное решение уравнения Рэлея, содержащего особую точку. Задавая в качестве исходного параметра число Рейнольдса $R = u_\infty\delta/\nu$, можно вычислить δ^+ и u_*/u_∞ (см. таблицу).

Для применения асимптотической теории перейдем к безразмерным переменным, выбирая в качестве масштабов длины и скорости δ и u_∞ . Для безразмерных переменных возьмем обозначения их размерных аналогов с нижним индексом e : $k_e = k\delta$, $\omega_e = \omega\delta/u_\infty$, $c_e = c/u_\infty$, $p_{1,2e} = p_{1,2}/\rho_{1,2}u_\infty^2$, $Y_{1,2e} = Y_{1,2}\delta/\rho_{1,2}u_\infty^2$ и т. п. Переход от переменных с верхним индексом $+$ к переменным с индексом e определяется выражениями

$$(2.2) \quad y_e = y^+/\delta^+, \quad \bar{u}_e = u^+(u_*/u_\infty), \quad \delta^+ = R(u_*/u_\infty).$$

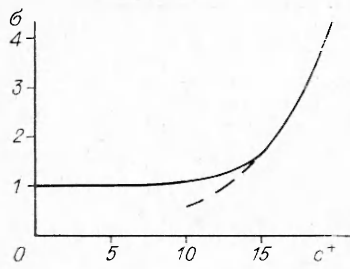
В данном пункте индекс e для краткости опускается.

Обозначим через \widehat{v} комплексный профиль y -компоненты скорости, который удовлетворяет уравнению Орра — Зоммерфельда. В асимптотической теории \widehat{v} представляется в виде суммы «невязкого» \widehat{v}_{iV} и «вязкого» \widehat{v}_V решений [7]. Невязкое решение удовлетворяет уравнению Рэлея

$$(2.3) \quad \widehat{v}_{iV}'' - \left(k^2 + \frac{\bar{u}''}{\bar{u} - c} \right) \widehat{v}_{iV} = 0$$

(штрихи обозначают производные по y). Строго говоря, производные \widehat{v}_{iV} существенно отклоняются от искомого решения в окрестности слоя совпадения $y = y_c$, где $\bar{u}(y_c) = c$. Однако влияние критического слоя можно учесть с помощью правила обхода особенности в (2.3). Как показано в [17], при $k\bar{u}'_c > 0$ ($\bar{u}'_c \equiv \bar{u}'(y_c)$) особенность должна обходиться со стороны нижней полуплоскости комплексной плоскости y . К такому же правилу обхода особенности приводит аналитическое продолжение решения с контура интегрирования в обратном преобразовании Лапласа при решении задачи с начальными условиями (см. п. 1).

Граничные условия на волнистой поверхности можно привести к уровню $y = 0$ с помощью стандартного приема разложения решения в ряд по малому y . Они имеют вид $v = \partial w/\partial t$, $v' = \bar{u}'_0 \partial w/\partial x$ ($\bar{u}'_0 \equiv \bar{u}'(0)$). При этом предполагается, что подъем поверхности мал по сравнению с толщиной буферной области δ_L , которая составляет малую часть δ



Р и с. 2

($\delta_L \sim 0,016$). Кроме того, подъем должен быть мал по сравнению с вязким масштабом $\varepsilon = (k\bar{u}'_0 R)^{-1/3}$, который в асимптотической теории предполагается малым по сравнению с δ_L . В [7] проведен анализ краевых условий с записью уравнений задачи в криволинейных координатах, связанных с искривленной поверхностью. При этом оказалось, что уравнение Орра — Зоммерфельда и приведенные выше краевые условия остаются в силе при значительно более слабом

ограничении на подъем поверхности: $kw \ll 1$ (переменные x, y, \bar{v} в этом случае приобретают другой смысл).

Влияние вязкого решения \bar{v}_V , возникающего в силу условия прилипания на стенке, можно учесть путем задания при $y = 0$ эффективного краевого условия для \bar{v}_{iV} (аналогично [18, 19]). При $k > 0$ и любом действительном c получим

$$(2.4) \quad \bar{v}_{iV} + i\omega\bar{w} = -\varepsilon\bar{D}(k, c)(\bar{v}'_{iV} - ik\bar{u}'_0\bar{w}),$$

где $z_c = c/\bar{u}'_0\varepsilon$ — координата слоя совпадения на линейном профиле $\bar{u} = \bar{u}'_0 y$ в единицах ε ; $\bar{D} = -\bar{v}_V(0)/\varepsilon\bar{v}'_V(0)$ — обобщенная функция Титъенса. Если при нахождении \bar{v}_V профиль скорости заменить линейным, $\bar{D}(k, c)$ переходит в функцию Титъенса в определении Холстейна $D(z_c)$ [8, 20]. При $z_c > 4-5$ можно воспользоваться асимптотическим представлением, согласно которому $D \rightarrow (1 \pm i)/\sqrt{2|z_c|}$, когда $z_c \rightarrow \pm\infty$ [20].

Поскольку в дальнейшем фазовая скорость c не предполагается малой, следует воспользоваться результатами работы [7], в которой решалась задача построения вязких решений с учетом кривизны профиля скорости. Это позволяет записать выражение для функции \bar{D} при $c > 0$ в виде

$$(2.5) \quad \bar{D} = V\bar{\sigma} D(\sigma z_c), \quad \sigma = \frac{1}{c} \left[\frac{3}{2} \bar{u}'_0 \int_0^{y_c} (c - \bar{u})^{1/2} dy \right]^{2/3}.$$

При $c < 0$ можно принять $\sigma \approx 1$. Выражение для σ остается без изменения при переходе в нем к переменным с верхним индексом $+$. На рис. 2 представлена зависимость σ от c^+ , построенная для логарифмического профиля (2.1), продолженного до бесконечности и исправленного вблизи стенки в соответствии с (П. 4). Штриховой линией показана асимптотика для достаточно больших c^+

$$\sigma = \frac{1}{c} \left[\frac{3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}} e^{\kappa(c^+ - B)} \right]^{2/3},$$

которая находится при подстановке в (2.5) зависимости (2.1) для всех y^+ . Поскольку $\sigma \geq 1$, выражение для \bar{D} при больших z_c совпадает с асимптотикой $D(z_c)$, но переход к нему происходит при меньших значениях z_c .

Уравнение (2.3) следует дополнить граничным условием [21]

$$(2.6) \quad \bar{v}'_{iV} + k\bar{v}_{iV} = 0|_{y=1}.$$

Для вычисления Y_1 необходимо иметь также выражение для давления на поверхности $y = 0$ [7]:

$$(2.7) \quad \bar{p}_1 = \frac{i}{k} [c\bar{v}'_{iV}(0) + \bar{u}'_0\bar{v}_{iV}(0)].$$

Обозначим через $\varphi(y)$ решение уравнения Рэлея (2.3), удовлетворяющее указанному выше правилу обхода особенности и краевому условию

(2.6). Подставляя φ в (2.4) и используя (2.7), получим для Y_1 искомое выражение

$$(2.8) \quad Y_1(c, k) = [c\varphi'(0) + \bar{u}'_0\varphi(0)] \frac{c - \varepsilon \bar{u}'_0 \bar{D}}{\varphi(0) + \varepsilon \bar{D}\varphi'(0)}.$$

Отметим, что ε в (2.8) предполагается достаточно малым, а вязкая функция $\bar{D}(k, c)$ определена выше только при $k > 0$. Переход в (2.8) к комплексным c производится путем аналитического продолжения $Y_1(c, k)$ как функции действительного c .

Хорошо известны фундаментальные решения уравнения Рэлея в виде рядов Зоммерфельда по степеням k^2 [17]. С их помощью можно найти относительно простое явное представление для Y_1 при малых волновых числах прогиба (см., например, [6, 7]). Для определения Y_1 в практически важном случае умеренных волновых чисел прогиба ($k \geq 1$) воспользуемся численным решением уравнения Рэлея, опираясь на подходы работ [22, 23]. Чтобы преобразовать правило обхода особенности к более подходящей для численного решения форме, представим искомое решение $\varphi(y)$ в виде линейной комбинации функций Толлмина φ_a и φ_b [23]: $\varphi = A_{\pm}\varphi_a(y) + B_{\pm}\varphi_b(y)$, где индексы \pm относятся к постоянным в областях $y > y_c$ и $y < y_c$ соответственно. Тогда указанное выше правило обхода принимает вид [18]

$$(2.9) \quad B_+ = B_- = B, \quad A_+ - A_- = i\pi(\bar{u}'_c/\bar{u}'_c)B.$$

Учитывая, что вронскиан от пары функций φ_a и φ_b строго равен -1 , имеем $A_{\pm} = \varphi'_b - \varphi\varphi'_b$, $B_{\pm} = \varphi\varphi'_a - \varphi'_a\varphi_a$. Интегрируя уравнение (2.3) с условием (2.6) в начальной точке $y = 1$ и применяя явные разложения для φ_a , φ_b при $y \rightarrow y_c$ [23], приближенно выразим A_+ , B_+ через значения φ и φ' в точке $y = y_c + \Delta$ (Δ — малая положительная величина). Определяя далее A_- и B_- с помощью (2.9), рассчитаем необходимые для продолжения интегрирования значения φ и φ' в точке $y = y_c - \Delta$.

Использование соответственно двух и трех первых членов разложений для φ_a и φ_b при $y \rightarrow y_c$ и выбор $\Delta = 0,01y_c$ позволяют получить практически не зависящие от вариаций Δ результаты. Контрольное применение описанной схемы к задаче о ветровой неустойчивости дало результаты, совпадающие с приведенными в [9] (там для обхода особенности использовалась другая процедура).

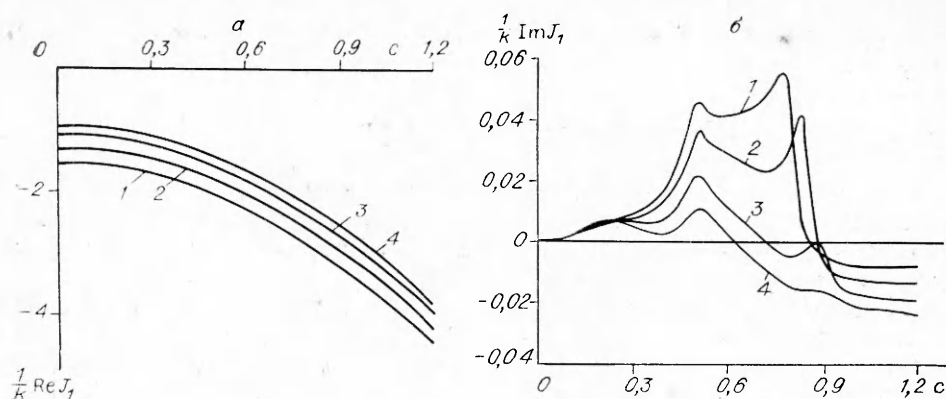
Входящая в выражение (2.8) функция $D(z_c)$ табулировалась в области $|z_c| < 8$ с помощью численного решения уравнения для \bar{v}_v с последующим применением интерполяции. Это дало результаты, совпадающие с известными [4, 20]. В области $|z_c| > 8$ применялась асимптотическая формула для $z_c \rightarrow \pm\infty$.

На рис. 3 представлены зависимости величин $\text{Re } J_1/k$ (а) и $\text{Im } J_1/k$ (б) от c , определенные при $R = 8 \cdot 10^4$ (кривые 1—4 отвечают $k = 0,5; 1,0; 2,0; 3,0$). При $k \rightarrow 0$ функция $\text{Re } J_1(c, k)$ совпадает с полной функцией $J_1(c, k)$ в случае однородного течения: $J_1 = -2k(1 + c^2)$ (см. также (1.6)). Результаты выполненных расчетов для $0 < k \leq 6$ и чисел Рейнольдса из таблицы позволяют предложить квазипотенциальную модель обтекания вибрирующей поверхности, суть которой выражается аппроксимацией

$$(2.10) \quad \text{Re } J_1(c, k) = -2k(f + c^2),$$

где $f \leq 1$ и слабо зависит от числа Рейнольдса. Зависимость f от k хорошо аппроксимируется простой формулой $f = \ln 2,05 / \ln(2,05 + k)$. Таким образом, падение скорости течения внутри пограничного слоя приводит к уменьшению статической компоненты комплексной упругости.

Комплексная упругость течения в пограничном слое имеет малую мнимую часть, которая определяет энергообмен между потоком и колебаниями поверхности, причем энергия поступает к поверхности при $\text{Im } Y_1 > 0$ [7]. Наличие областей с $\text{Im } J_1 > 0$ на рис. 3, б обусловлено дейст-



Р и с. 3

вием майлсовского механизма усиления резонансных с потоком гармоник прогиба, фазовые скорости которых лежат в интервале $0 < c < 1$. Нерезонансные с потоком гармоники дают отрицательный вклад в $\text{Im } J_1$, определяемый возбуждением вязких возмущений вблизи стенки ($\tilde{D} \neq 0$). Расчеты показывают, что на поведение $\text{Im } Y_1(c, k)$ в резонансной области фазовых скоростей практически не влияет замена \tilde{D} на D в (2.8). Более того, поведение $\text{Im } Y_1$ оказывается почти таким же, как для идеального течения ($\tilde{D} \equiv 0$). Это согласуется с известными результатами теории Майлса для ветровых волн [11], так как $\text{Im } Y_1/k$ совпадает с введенным им коэффициентом взаимодействия волн с ветром. В согласии с теорией Майлса находится также тот факт, что при умеренных волновых числах прогиба не проявляется резонанс изгибных гармоник с собственными волнами пограничного слоя. Такой резонанс возможен лишь для достаточно коротких поверхностных волн [12].

Отметим, что для корректного определения $Y_1(c, k)$ необходимо использовать аппроксимацию профиля скорости, удовлетворяющую условию $\bar{u}'(1) = 0$. При наличии скачка первой производной на границе с однородным течением в краевое условие (2.6) войдут поправки, которые становятся малыми при $\bar{u}'(1) \ll k|1 - c|$. По этой причине в предварительных расчетах для профиля (П. 4) с параметром $\xi = 0$ отсутствовала сходимость $\text{Re } J_1$ к пределу потенциального течения при малых k .

3. Резистивная неустойчивость периодического прогиба панельной поверхности. В рамках квазипотенциальной модели (2.10) критическая скорость дивергенции оказывается в $1/\sqrt{f}$ раз больше полученной в п. 1 величины $u_{\infty c}$. Поскольку на пороге дивергенции частота собственных колебаний поверхности обращается в нуль, фазовая скорость попутных с потоком гармоник прогиба попадает в область с $\text{Im } J_1 > 0$ (см. рис. 3, б) при скоростях потока меньше критической. Это приводит к появлению докритической резистивной неустойчивости собственных колебаний.

В характеристическое уравнение (1.5) наряду с Y_1 дает также вклад комплексная упругость слоя $y \leq 0$, в котором среднее течение отсутствует. Полагая в уравнениях п. 2 $\bar{u} \rightarrow 0$, $z_c \gg 1$ и восстанавливая нижний индекс e возле безразмерных величин, получим

$$(3.1) \quad J_{2e} = Y_{2e}(c_e, k_e) + Y_{2e}^*(-c_e, k_e) = -2k_e c_e^2 \left[1 + k_e \frac{1+i}{(2|\omega_e| R_2)^{1/2}} \right],$$

где $R_2 = (v/v_2)R$ (v_2 — кинематическая вязкость жидкости в полупространстве $y < 0$).

Представим полные функции $J_{1,2e}$ в виде суммы их значений в случае потенциального (квазипотенциального) обтекания и малых добавок $\tilde{J}_{1,2}$, характеризующих диссипативные процессы:

$$(3.2) \quad J_{1e} = -2k_e(f + c_e^2) + \tilde{J}_1, \quad J_{2e} = -2k_e c_e^2 + \tilde{J}_2.$$

Для решения (1.5) введем новые переменные с нормированием частоты, не зависящим от скорости течения, и нормировкой скорости потока через фазовую скорость изгибных волн:

$$(3.3) \quad \bar{\omega} = \omega/\omega_0, \quad V = u_\infty k_0/\omega_0, \quad \bar{r} = r/\gamma_0 \omega_0.$$

Их связь с безразмерными переменными теории устойчивости (п. 2) определяется выражениями

$$(3.4) \quad c_e = \bar{\omega}/V, \quad R = VR_0$$

($R_0 = \omega_0 \delta/k_0 v$ — число Рейнольдса по фазовой скорости изгибных волн). Используя (1.5) и (3.2), получим характеристическое уравнение в новых переменных:

$$(3.5) \quad \bar{\omega}^3 + 2i\bar{r}\bar{\omega} - (1 - \alpha_1 f V^2) = \frac{1}{2} (V^2/k_{0e}) [\alpha_1 \tilde{J}_1(c_e, k_{0e}; R) + \alpha_2 \tilde{J}_2(c_e, k_{0e}; R)]$$

($\alpha_2 = \gamma_2/\gamma_0$). В отсутствие диссипативных процессов (3.5) дает колебания с частотой $\bar{\omega}^{(0)} = \sqrt{1 - \alpha_1 f V^2}$, которая действительна при $V < V_c = 1/\sqrt{\alpha_1 f}$ (V_c — безразмерная скорость квазипотенциальной дивергенции). Решение (3.5) при $\bar{\omega}^{(0)} \sim 1$ будем искать с помощью метода возмущений по малым $\tilde{J}_{1,2}$ и \bar{r} . Вычисляя первую поправку к $\bar{\omega}^{(0)}$, имеем инкремент колебаний

$$(3.6) \quad \text{Im } \bar{\omega} = -\bar{r} + \frac{1}{4} \frac{V^2}{\bar{\omega}^{(0)2} k_{0e}} (\alpha_1 \text{Im } J_{1e} + \alpha_2 \text{Im } J_{2e})_{\bar{\omega}=\bar{\omega}^{(0)}}.$$

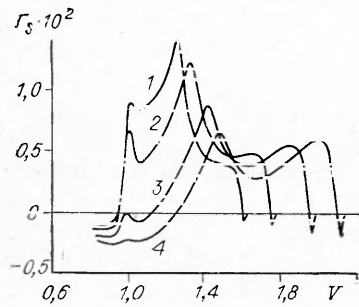
При обтекании поверхности «легкой» жидкостью ($\gamma_1 \ll \gamma + \gamma_2$, $\alpha_1 \ll 1$) порог дивергенции $V_c \gg 1$ и резистивная неустойчивость возможна уже при $V \ll V_c$. Ситуация здесь аналогична известной при возбуждении волн на воде ветром. Далее будем рассматривать обтекание поверхности «тяжелой» жидкостью ($\gamma_1 \gtrsim \gamma + \gamma_2$, $\alpha_1 \leq 1$), когда резистивная неустойчивость возникает при значениях V , сравнимых с V_c . Кроме того, при численных расчетах ограничимся случаем одинаковых жидкостей по обе стороны поверхности ($\gamma_2 = \gamma_1$, $v_2 = v$) и относительно малого вклада в γ_0 собственной массы пластинок ($\gamma/2\gamma_1 \ll 1$), что позволяет принять $\alpha_{1,2} \approx 1/2$.

При $\bar{\omega}^{(0)} \rightarrow 0$ ($V \rightarrow V_c$) метод возмущений в приведенном виде неприменим. Однако, используя при малых c_e линейную аппроксимацию $\tilde{J}_1 = \beta_0 + i\beta_1 c_e$ (β_0 и β_1 — действительные коэффициенты), можно показать, что формула (3.6) пригодна для оценки инкремента и при $V \rightarrow V_c$.

Задаваясь значениями V и R , с помощью графических данных на рис. 3, б можно найти $\text{Im } \bar{\omega}$ для $R_0 = R/V$. Этих данных, однако, недостаточно для построения непрерывной зависимости $\text{Im } \bar{\omega}$ от V , так как при фиксированном R_0 одновременно с V изменяется R . Кроме того, от V зависит толщина пограничного слоя, входящая в определение k_{0e} и R . Зависимость δ от u_∞ и V можно пренебречь. Например, при степенном законе $\delta \sim u_\infty^{-1/5}$ [21] изменение u_∞ в 1,5–2,5 раза, характерное для области докритической неустойчивости, приводит к изменению δ в 1,1–1,2 раза. Расчеты показывают, что в случае достаточно больших положительных $\text{Im } J_{1e}$ зависимость $\text{Im } J_{1e}$ от R оказывается слабой. Это позволяет построить $\text{Im } \bar{\omega}$ как функцию V по графикам на рис. 3, б.

На рис. 4 приведена аэродинамическая составляющая инкремента Γ_s (слагаемое $\sim \text{Im } J_{1e}$ в (3.6)), построенная при $\alpha_1 = 1/2$, $R_0 = 8 \cdot 10^4$ в докритической области значений V (кривые 1–4 соответствуют $k_{0e} = 0,5; 1,0; 2,0; 3,0$). Расчет сделан с учетом зависимости $\text{Im } J_{1e}$ от R .

Оценки величины $\text{Im } J_{2e}$, определяющей потери в неподвижной жидкости, дают для кривых на рис. 3, б значение $\sim 2 \cdot 10^{-3}$, что позволяет пренебречь ее вкладом в (3.6). Показанные на рис. 4 зависимости дают возможность оценить уровень потерь в материале пластинок, который



Р и с. 4

Таким образом, инкремент неустойчивости периодического знакопеременного прогиба в цепочке пластин можно выразить через комплексную упругость потока для двух гармоник такого прогиба. При умеренных волновых числах прогиба реализуется квазипотенциальное обтекание поверхности, приводящее к увеличению критической скорости дивергенции по сравнению со случаем однородного потока. Резонансное взаимодействие колебаний поверхности с течением в критическом слое (механизм Майлса) определяет возникновение резистивной неустойчивости поверхности при скоростях меньше критической. В данной работе найдено условие подавления резистивной неустойчивости за счет потерь в материале пластинок. Добавим, что определение границ применимости одномодового приближения связано с анализом двухмодовой модели для периодического прогиба с периодом $2L$. Можно показать, что для однородного потока влияние второй моды мало при $u_\infty < 1,5u_{\infty c}$. При этом резонансный механизм раскачки второй моды прогиба пластин также несуществен ввиду большой фазовой скорости порождаемых ею гармоник прогиба поверхности.

Приложение. Известно несколько аппроксимаций для профиля скорости в турбулентном пограничном слое [13—16]. Однако почти все они исходят из явного представления для первой производной профиля у стенки. Сам же профиль скорости должен определяться численно. Явная аппроксимация Рейхардта ([13], с. 547) не удовлетворяет условию обращения в нуль третьей производной на стенке и дает отклонение $\sim 25\%$ от линейного закона на границе вязкого подслоя $y^+ = 5$. Неявная аппроксимация [16]

$$(П.1) \quad \frac{du^+}{dy^+} = \left\{ 1 + \kappa y^+ \left[1 - \exp\left(-\frac{8}{\kappa} 10^{-4} y^{+2}\right) \right] \right\}^{-1}$$

дает аналогичное отклонение $\sim 8\%$, что в большей степени соответствует экспериментальным данным. Здесь предлагается явная аппроксимация профиля скорости, близкая к (П. 1).

Запишем при $y^+ \ll \delta^+$ следующее выражение для производной u^+ :

$$(П.2) \quad \frac{du^+}{dy^+} = \frac{1}{1 + \kappa y^+} + \kappa y^+ e^{-\lambda_2 y^+} + b y^+ e^{-\lambda_1 y^+}$$

(b , λ и λ_1 — параметры). При $y^+ \rightarrow \infty$ (П. 2) приводит к закону (2.1), причем $B = (\kappa/\lambda^2) + (2b/\lambda_1^3) + (1/\kappa) \ln \kappa$. Из (П. 2) следует, что $du^+/dy^+ = 1$ и $d^2u^+/dy^{+2} = 0$ при $y^+ = 0$. Тогда, налагая условие $d^3u^+/dy^{+3} = 0$ при $y^+ = 0$, можно выразить λ_1 и b через λ , B :

$$(П.3) \quad b = \kappa(\lambda - \kappa), \lambda_1 = [2b/(B - \kappa/\lambda^2 - \ln \kappa/\kappa)]^{1/3}.$$

Результаты построения второй производной профиля скорости при $\lambda = 0,2285$ и $B = 5,0$ представлены на рис. 1.

Корректирующую добавку к (2.1) в области следа запишем в форме Коулса [14, 15]. В результате получим аппроксимацию для полного про-

необходим для подавления неустойчивости. Связывая \bar{r} с добротностью колебаний свободной (находящейся в вакууме) поверхности с данной формой прогиба $Q_f = \text{Re } \omega_f/2 \text{Im } \omega_f$ (ω_f — частота свободных колебаний), можно записать условие подавления неустойчивости в виде

$$(3.7) \quad \Gamma_s < \bar{r} = \frac{1}{2Q_f} \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_0}}$$

Например, при $\Gamma_s \sim 10^{-2}$, $\gamma/\gamma_0 \sim 0,2$ из (3.7) получим, что неустойчивость исчезает при $Q_f < 23$.

филя скорости ($0 < y^+ < \delta^+$):

$$(П.4) \quad u^+ = \frac{4}{\kappa} \ln(1 + \kappa y^+) + B - \frac{1}{\kappa} \ln \kappa - q(y^+) + h_m \sin^2 \left[\frac{\pi}{2} (1 + \xi) \frac{y^+}{\delta^+} \right].$$

Здесь $q = \kappa e^{-\lambda y^+} \left(\frac{y^+}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \right) + b e^{-\lambda_1 y^+} \left(\frac{y^{+2}}{\lambda_1} + \frac{2y^+}{\lambda_1^2} + \frac{2}{\lambda_1^3} \right)$. Для пограничного слоя без градиента давления $h_m = 3,1$ [15]. В отличие от [15] корректирующая добавка в (П. 4) взята в смещенной форме. Введение параметра ξ позволяет выполнить условие обращения в нуль первой производной u^+ на границе с однородным потоком $y^+ = \delta^+$ (см. п. 2). При $h_m = 3,1$ это условие дает $\xi = 0,1476$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластин и оболочек.— М.: Наука, 1972.
2. Вольмир А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа: задачи гидроупругости.— М.: Наука, 1979.
3. Hedefeth J. M., Budiansky B., Leonard R. W. Analysis of flutter in compressible flow of a pannel on many supports // J. Aeronaut. Sci.— 1954.— V. 21, N 7.
4. Григолюк Э. И., Лампер Р. Е., Шандаров Л. Г. Флаттер панелей и оболочек // Механика, 1963.— М.: ВИНТИ, 1965.
5. Беглов Р., Криминали В. Вопросы гидродинамической устойчивости.— М.: Мир, 1971.
6. Benjamin T. B. Effects of a flexible boundary on hydrodynamic stability // J. Fluid Mech.— 1960.— V. 9, N 4.
7. Landahl M. T. On the stability of a laminar incompressible boundary layer over a flexible surface // J. Fluid Mech.— 1962.— V. 13, N 4.
8. Benjamin T. B. Shearing flow over a wave boundary // J. Fluid Mech.— 1959.— V. 6, N 2.
9. Miles J. W. On the generation of surface waves by shear flows // J. Fluid Mech.— 1957.— V. 3, N 2.
10. Conte S. D., Miles J. W. On the numerical integration of the Orr — Sommerfeld equation // J. Soc. Indust. Appl. Math.— 1959.— V. 7, N 4.
11. Майлс Д. Б. Генерация поверхностных волн потоками с градиентом скорости // Гидродинамическая неустойчивость.— М.: Мир, 1964.
12. Miles J. W. On the generation of surface waves by shear flows. Pt 4 // J. Fluid Mech.— 1962.— V. 13, N 3.
13. Хинце И. О. Турбулентность.— М.: Физматгиз, 1963.
14. Кангуэл Б. Дж. Организованные движения в турбулентных потоках // Новое в зарубежной науке: Механика.— М.: Мир, 1984.— Вып. 33.
15. Coles D. E. The flow of the wake in the turbulent boundary layer // J. Fluid Mech.— 1956.— V. 1, N 2.
16. Смольяков А. В. Интенсивность акустического излучения турбулентного пограничного слоя на пластине // Акуст. журн.— 1973.— Т. 19, № 2.
17. Линь Цзя-Цзяо. Теория гидродинамической устойчивости.— М.: ИЛ, 1958.
18. Реутов В. П. Нелинейные волны и стабилизация двумерной неустойчивости в пограничном слое // ПМТФ.— 1985.— № 4.
19. Реутов В. П. Плотность энергии модулированных волн в пограничном слое.— Горький, 1988.— (Препр./ИПФ АН СССР; № 218).
20. Holstein H. Über die äussere und innere Reibungsschicht bei Störungen laminar Strömungen // ZAMM.— 1950.— V. 30, N 1/2.
21. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.— М.: Наука, 1974.
22. Реутов В. П. О неустойчивости внутренних волн в стратифицированной жидкости с приповерхностным сдвиговым течением // Изв. АН СССР. Физ. атмос. и океана.— 1990.— Т. 28, № 8.
23. Benney D. J., Bergeron R. F. A new class of nonlinear waves in parallel flows // Stud. Appl. Math.— 1969.— V. 48, N 3.

г. Нижний Новгород

Поступила 11/III 1991 г.,
в окончательном варианте — 9/VII 1991 г.