ПМТФ, № 3, 1972

УДК 538.4

ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА И ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ ПРИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАКОНАХ ОМА

Ю. П. Емец, В. Б. Таранов

(Киев)

Рассмотрены групповые свойства одномерных нестационарных уравнений электрического поля в однородных изотропных средах с нелинейной проводимостью. Определяются нелинейные законы Ома, при которых эти уравнения обладают наиболее широкими свойствами симметрии. Получены обыкновенные дифференциальные уравнения, определяющие инвариантные решения; порядок уравнений понижен или они проинтегрированы до конца.

Отклонения от линейного закона Ома наблюдаются уже в сравнительно не сильных полях для таких проводящих сред, как плазма и полупроводники. При расчете электромагнитных полей закон Ома обычно берется из экспериментальных данных либо рассчитывается теоретически в рамках конкретной физической модели проводимости.

Здесь задача ставится иначе: принимается произвольная форма закона Ома $j = j(E)$ и рассматриваются одномерные нестационарные уравнения электрического поля в однородной среде с учетом токов смещения (нелинейное телеграфное уравнение) и в квазистационарном приближении (нелинейное уравнение теплопроводности). При проведении групповой классификации этих уравнений выделяется совокупность законов Ома, при которых симметрия уравнений расширяется. Оказывается, что эти законы Ома одинаковы для обоих уравнений, и группа, допускаемая нелинейным телеграфным уравнением, есть подгруппа группы, допускаемой нелинейным уравнением теплопроводности.

Интересно, что полученные таким путем зависимости $j(E)$ реализуются на практике в достаточно широком диапазоне изменения j и E и соответствуют нелинейным законам Ома, встречающимся в плазме и полупроводниках.

Групповая классификация нелинейного уравнения теплопроводности дана Л. В. Овсянниковым в работе [1], где была получена также форма всех инвариантных решений. В настоящей работе проведена параллельная групповая классификация обоих нелинейных уравнений — телеграфного и теплопроводности (последнее взято в более обычной для электродинамики форме уравнения для напряженности электрического поля E) — и найден явный вид инвариантных решений или простейший вид обыкновенных дифференциальных уравнений, которые определяют инвариантные решения.

1. Для одномерной модели

$$\mathbf{E} = \{0, 0, E(x, t)\}, \qquad \mathbf{H} = \{0, H(x, t), 0\}$$

уравнения Максвелла

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\mu}{c}\frac{\partial H}{\partial t}, \qquad \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j(E) \tag{1.1}$$

приводят к нелинейному телеграфному уравнению для E

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \sigma(E)\frac{\partial E}{\partial t} = 0, \qquad \sigma(E) \equiv \frac{dj}{dE} \tag{1.2}$$

где предполагается выполненным преобразование

$$x^* = \frac{4\pi}{c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,x, \qquad t^* = \frac{4\pi}{\varepsilon}\,t$$

и звездочки опущены.

Для квазистационарных процессов, когда можно пренебречь токами смещения, приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \sigma(E)\frac{\partial E}{\partial t} = 0 \tag{1.3}$$

Если записать это уравнение в символах плотности тока j, то оно совпадет по форме с уравнением, которое анализирует Л. В. Овсянников в работе [1]. Действительно, обращая закон Ома, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho(j)\frac{\partial j}{\partial x}\right] = \frac{\partial j}{\partial t}, \qquad \rho(j) \equiv \frac{dE(j)}{dj} \tag{1.4}$$

Отсюда видно, что j соответствует температуре, а дифференциальное сопротивление $\rho(j)$ — коэффициенту теплопроводности вещества.

Следует отметить, что проблема критерия квазистационарности процесса в нелинейной электродинамике значительно усложняется и ее рассмотрение выходит за рамки данной работы.

2. При определении непрерывной группы преобразований G_r, допускаемой уравнением (1.2), исходим, согласно общей теории [2-4], из условия, что (1.2) определяет относительный инвариант дважды продолженной группы $G_r^{(2)}$.

Для векторов $\xi^i(x, t, E)$ $(i = 1, 2, 3)$ однопараметрической группы

$$X = e^a X_a = \xi^1\frac{\partial}{\partial x} + \xi^2\frac{\partial}{\partial t} + \xi^3\frac{\partial}{\partial E}$$
$$(\xi^i = e^k\xi_k^i,\ e^k = \text{const},\ k = 1, \ldots, r) \tag{2.1}$$

получаем систему определяющих уравнений инфинитезимальных преобразований

$$\begin{gathered}\xi^3_{xx} - \xi_{tt}{}^3 - \sigma\xi_t{}^3 = 0, \quad 2\xi^3_{tE} + \sigma\xi_t{}^2 + \sigma'\xi^3 = 0\\ 2\xi^3_{xE} + \sigma\xi_x{}^2 = 0, \quad \xi_x{}^1 - \xi_t{}^2 = 0, \quad \xi_t{}^1 - \xi_x{}^2 = 0\\ \xi_E{}^1 = \xi_E{}^2 = \xi^3_{EE} = 0, \quad \sigma \equiv dj/dE\end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь нижние индексы означают дифференцирование по соответствующим переменным, штрих — полную производную по E.

В случае нелинейной проводимости ($\sigma'(E) \neq 0$) решение системы (2.2) имеет вид

$$\xi^1 = e^1 x + e^2, \quad \xi^2 = e^1 t + e^3, \quad \xi^3 = e^4 E + e^5 \tag{2.3}$$

причем зависимость $\sigma(E)$ подчинена условию

$$(e^4 E + e^5)\,\sigma' + e^1\sigma = 0 \tag{2.4}$$

В самом общем случае, когда закон Ома произволен (и, следовательно, произвольной может быть дифференциальная проводимость $\sigma(E)$), выполнение (2.4) возможно только при

$$e^1 = e^4 = e^5 = 0$$

и базис группы образуют операторы

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial t} \tag{2.5}$$

Расширение группы возможно при ограничении произвола в выборе функции $\sigma(E)$ предположением, что она удовлетворяет условию (2.4) с отличными от нуля константами.

Из условия $\sigma'(E) \neq 0$ следует в этом случае, что только одна из констант в (2.4) может быть выбрана произвольной. Без ограничения общности можно предположить, что это e^1. Тогда $e^4 = ae^1$, $e^5 = be^1$, где a и b — фиксированные константы.

В этом случае группа расширяется добавлением оператора

$$X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t} + (aE + b)\frac{\partial}{\partial E} \tag{2.6}$$

Интегрируя (2.4), получим

$$\sigma(E) = \begin{cases} c(aE+b)^{-1/a} & \text{при } a \neq 0 \\ c\exp(-E/b) & \text{при } a = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

а затем, учитывая, что $\sigma(E) = dj/dE$, находим

$$j(E) = \begin{cases} \dfrac{c}{a-1}(aE+b)^{1-1/a} + d & \text{при } a \neq 0,\ a \neq 1 \\ c\ln(E+b) + d & \text{при } a = 1 \\ -bc\exp(-E/b) + d & \text{при } a = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

Смысл констант a, b, c и d в формулах (2.7), (2.8) определяется физическим содержанием рассматриваемых задач. Если, например, положить $j = 0$ при $E = 0$, что соответствует предположению об отсутствии сторонних токов в среде, то формулы (2.8) принимают вид

$$\frac{j(E)}{j(E_0)} = 1 - \left(1 - \frac{E}{E_0}\right)^{\alpha} \quad \text{при } a > 1 \text{ или } a < 0 \quad (\alpha \equiv 1 - 1/a > 0) \tag{2.9}$$

$$\frac{j(E)}{j(\infty)} = 1 - \left(1 + \frac{E}{E_0}\right)^{\alpha} \quad \text{при } 0 < a < 1 \quad (\alpha < 0) \tag{2.10}$$

$$\frac{j(E)}{j_0} = \ln\left(1 + \frac{E}{E_0}\right) \quad \text{при } a = 1 \quad (j_0 \equiv j((e-1)E_0)) \tag{2.11}$$

$$\frac{j(E)}{j(\infty)} = 1 - \exp(-E/E_0) \quad \text{при } a = 0 \tag{2.12}$$

Такие зависимости или, точнее, некоторые их ветви в достаточно широком диапазоне изменения j и E реализуются на практике. Так, зависимость (2.12) есть нелинейный закон Ома высокотемпературной плазмы при развитии в ней акустической неустойчивости [5]. В низкотемпературной плазме с неравновесной проводимостью закон Ома имеет вид (2.9) [6].

3. Групповая классификация уравнения поля для квазистационарных процессов (1.3) проводится аналогично предыдущему случаю. Для нахождения вектора ξ^i получаем систему определяющих уравнений

$$\begin{gathered} \xi^3_{xx} - \sigma\xi_t^3 = 0, \quad \xi^1_{xx} - 2\xi^3_{xE} - \sigma\xi_t^1 = 0 \\ (2\xi_x^1 - \xi_t^2)\sigma + \xi^3\sigma' = 0, \quad \xi_E^1 = \xi_E^2 = \xi_x^2 = \xi^3_{EE} = 0 \end{gathered} \tag{3.1}$$

Анализ решений этой системы приводит к следующему результату: при произвольном законе нелинейности среды базис группы, допускаемой уравнением (1.3), образуют операторы

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} \tag{3.2}$$

Расширение группы происходит при тех же законах Ома (2.8), которые приводят к расширению группы нелинейного телеграфного уравнения. В этом случае добавляется оператор

$$X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t} + (aE + b)\frac{\partial}{\partial E} \tag{3.3}$$

Дальнейшее расширение группы происходит при одном частном значении $a = {}^1/_4$, имеется дополнительный оператор

$$X_5 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + x(E + 4b)\frac{\partial}{\partial E} \tag{3.4}$$

Как видно, группа Ли нелинейного телеграфного уравнения (1.2) составляет подгруппу группы, допускаемой нелинейным уравнением теплопроводности (1.3).

4. Переходя к нахождению инвариантных решений ранга 1 уравнения (1.2), сделаем некоторые упрощения.

При произвольном законе Ома это уравнение допускает группу с операторами

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial t} \tag{4.1}$$

Расширение группы происходит при

$$\sigma(E) = \begin{cases} \exp(-E) & \text{(А)} \\ E^{-1/a} & \text{(Б)} \end{cases} \tag{4.2}$$

К этим двум основным случаям сводится все разнообразие (2.7) нелинейных зависимостей $\sigma(E)$. Если имеет место (4.2), то добавляется оператор

$$X_3 = \begin{cases} x\dfrac{\partial}{\partial x} + t\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial E} & \text{(А)} \qquad (4.3) \\ x\dfrac{\partial}{\partial x} + t\dfrac{\partial}{\partial t} + aE\dfrac{\partial}{\partial E} & \text{(Б)} \qquad (4.4) \end{cases}$$

Для получения существенно различных инвариантных решений необходимо строить оптимальную систему неподобных подгрупп [1]. В случае телеграфного уравнения число операторов невелико и можно ограничиться простым перебором однопараметрических подгрупп.

1°. Рассмотрим решение на однопараметрической подгруппе $X = X_1 + \alpha^{-1} X_2$, допускаемой уравнением (1.2) при произвольной $\sigma(E)$.

Инварианты оператора X определяют форму решений (бегущие волны) $E = E(x - \alpha t)$, для которых из (1.2) следует уравнение:

$$(1 - \alpha^2)\frac{d^2F}{d\xi^2} + \alpha\sigma(E)\frac{dE}{d\xi} = 0 \qquad (\xi = x - \alpha t) \tag{4.5}$$

Отсюда видно, что, как и для линейного телеграфного уравнения ($\sigma = \mathrm{const}$), не существует волн, распространяющихся со скоростью $\alpha = \pm 1$. Для всех волн со скоростями $\alpha \neq \pm 1$ и $\alpha \neq 0$ преобразование $\xi^* =$

$=\alpha\xi / (1-\alpha^2)$ приводит уравнение (4.5) к виду (звездочки опускаем)

$$\frac{d^2E}{d\xi^2}+\sigma(E)\frac{dE}{d\xi}=0 \tag{4.6}$$

В случае (А) (4.6) имеет решение

$$E=\begin{cases}\ln\{(1/C_1)[\exp(C_1\xi+C_2)-1]\}, & C_1\neq 0\\ \ln(\xi+C_2)\end{cases} \tag{4.7}$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.

В случае (Б) решение дается формулами

$$\xi+C_2=\int\frac{dE}{C_1-\ln E} \qquad \text{при } a=1$$

$$\left.\begin{aligned}&E=\left(\frac{m+1}{m}\xi+C_2\right)^{1/(m+1)}\\ &C_1\xi+C_2=E-\frac{1}{C_1m}\int\frac{dE}{E^m+1/C_1m}\end{aligned}\right\} \qquad \text{при } a\neq 1,\ a\neq 0,\ m\equiv\frac{1}{a}-1 \tag{4.8}$$

Последнее решение можно переписать в удобной для анализа форме

$$\xi=E\mp\int_0^E\frac{du}{u^m\pm 1}, \qquad m\neq 0 \tag{4.9}$$

принимая (в зависимости от значения m)

$$1/C_1m=\pm q^m \qquad (q>0)$$

выполняя преобразование

$$E=qE^*, \qquad C_1\xi+C_2=q\xi^*$$

и опуская звездочки. Выпишем эти решения при знаке плюс в (4.9) для некоторых значений m

$$\xi=E-\ln(1+E) \qquad \text{при } m=1 \tag{4.10}$$

$$\xi=E-\operatorname{arc\,tg} E \qquad \text{при } m=2 \tag{4.11}$$

$$\xi=E-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}-\frac{1}{6}\ln\left[\frac{(E+1)^2}{E^2-E+1}\right]-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2E-1}{\sqrt{3}}\right) \tag{4.12}$$

при $m=3$ $(a={}^1/_4)$.

Таким образом, нелинейное телеграфное уравнение допускает решение типа бегущих волн разнообразной формы в отличие от линейного, допускающего волны только специального вида (экспоненты).

2°. Рассмотрим инвариантные решения на подгруппе X_3. Решения имеют вид

$$E=\begin{cases}\ln[tF(\xi)] & \text{(А)}\\ [tF(\xi)]^a & \text{(Б)}\end{cases} \tag{4.13}$$

где $\xi=(x/t)$.

Уравнение (1.2) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению для $F(\xi)$

$$\left[(1-\xi^2)\frac{F'}{F}+\xi-\frac{\xi}{F}\right]'+a\left[(1-\xi)\frac{F'}{F}+1\right]\left[(1+\xi)\frac{F'}{F}-1\right]=0 \tag{4.14}$$

Случаю (А) соответствует значение $a = 0$, при котором уравнение (4.14) легко интегрируется

$$E = \begin{cases} \ln\left[\dfrac{t + C_1 x}{1 - C_1^2} + C_2 \sqrt{|t^2 - x^2|}\,\left|\dfrac{x+t}{x-t}\right|^{C_1/2}\right], & C_1^2 \neq 1 \\ \ln\left[+\dfrac{x}{2} + C_2 (x \pm t) + \dfrac{1}{4}(x \pm t)\ln\left|\dfrac{x+t}{x-t}\right|\right] \end{cases} \tag{4.15}$$

5. Рассмотрим теперь инвариантные решения ранга 1 нелинейного уравнения теплопроводности (1.3), допускающего при произвольной $\sigma(E)$ группу

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} \tag{5.1}$$

Группа расширяется при специальных зависимостях $\sigma(E)$, данных в (4.2)

$$X_4 = \begin{cases} x\dfrac{\partial}{\partial x} + t\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial E} & (\text{А}) \\ x\dfrac{\partial}{\partial x} + t\dfrac{\partial}{\partial t} + aE\dfrac{\partial}{\partial E} & (\text{Б}) \end{cases} \tag{5.2}$$

Кроме того, в случае (Б) при $a = {}^1/_4$ добавляется оператор

$$X_5 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xE\frac{\partial}{\partial E} \tag{5.3}$$

При получении инвариантных решений будем руководствоваться оптимальной системой неподобных подгрупп, найденной Л. В. Овсянниковым [1].

1°. Решения типа волн $E = E(x - \alpha t)$ определяются теперь из уравнения

$$\frac{d^2E}{d\xi^2} + \alpha\sigma(E)\frac{dE}{d\xi} = 0, \qquad \xi = x - \alpha t \tag{5.4}$$

В отличие от предыдущего случая (4.5) волны распространяются с произвольными скоростями. Выполняя преобразование $\xi^* = \alpha\xi$ (звезду ниже опускаем), приведем уравнение (5.4) к виду (4.6), что позволяет распространить результаты пункта 1° предыдущего раздела на рассматриваемый случай.

2°. Рассмотрим решение на подгруппе $X = \alpha X_3 + X_4$, имеющее форму

$$E = \ln\left[x^{1/1+\alpha} e^{F(\xi)}\right], \quad E = \left[x^{1/1+\alpha} e^{F(\xi)}\right]^a$$

в случаях (А) и (Б) соответственно. Здесь $\xi = xt^{-(1+\alpha)/(1+2\alpha)}$, а F удовлетворяет уравнению

$$\xi^2 F'' + \frac{1+\alpha}{1+2\alpha}\xi^{(1+2\alpha)/(1+\alpha)} e^{-F}\xi F' + a\left(\frac{1}{1+\alpha} + \xi F'\right)^2 - \frac{1}{1+\alpha} = 0 \tag{5.5}$$

причем случаю (А) соответствует $a = 0$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что уравнение (5.5) допускает оператор

$$Y = \xi\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{1+2\alpha}{1+\alpha}\frac{\partial}{\partial F} \tag{5.6}$$

С помощью Y получаем

$$\xi = e^z, \qquad F = \Phi(z) + \frac{1+2\alpha}{1+\alpha}z \tag{5.7}$$

$$\Phi'' - \left(1 - \frac{1+\alpha}{1+2\alpha}e^{-\Phi}\right)\Phi' - 2\left(1 - \frac12 e^{-\Phi}\right) + a(\Phi' + 2)^2 = 0 \tag{5.8}$$

В случае (А) при $\alpha = 0$ ($X = X_4$) уравнение (5.8) интегрируется до конца и приводит к следующим выражениям для E:

$$E = \begin{cases} \ln\left[C_2 t \exp\left(C_1 \frac{x}{t}\right) - \frac{1}{C_1}\left(x + \frac{t}{C_1}\right)\right], & C_1 \neq 0 \\ \ln\left[C_2 t + x^2 / 2t\right] \end{cases} \qquad (5.9)$$

При другом предельном значении $\alpha \to \infty$ (автомодельное решение на операторе X_3) уравнение (5.8) допускает первый интеграл

$$\Phi' - 2\ln(\Phi' + 2) - {}^1/_2\, e^{-\Phi} - \Phi = C_1 \qquad (5.10)$$

В случае (Б) имеется частное решение вида

$$E = \left[\frac{x^2}{2(1-2a)t}\right]^a, \quad a \neq \frac{1}{2} \qquad (5.11)$$

3°. Решение на подгруппе $X = \alpha^{-1} X_1 - X_3 + X_4$. Здесь соответственно для (А) и (Б) имеем

$$E = \ln\left[\frac{1}{t} e^{F(\xi)}\right], \quad E = \left[\frac{1}{t} e^{F(\xi)}\right]^a \quad (\xi = te^{\alpha x})$$

и F определяется из уравнения

$$\alpha^2\xi^2 F'' + \alpha^2 \xi F' + e^{-F}(1 - \xi F') + a\alpha^2\xi^2 (F')^2 = 0 \qquad (5.12)$$

Если $a = 0$, (5.12) допускает первый интеграл ($\xi = e^z$)

$$\frac{dF}{dz} + \ln\left(\frac{dF}{dz} - 1\right) + \frac{1}{\alpha^2} e^{-F} = C_1 \qquad (5.13)$$

4°. Перейдем к подгруппе $\alpha X_2 - {}^1/_2\, X_3 + X_4$. Для (А) и (Б) имеем

$$E = \ln\left[x^2 e^{F(\xi)}\right], \quad E = \left[x^2 e^{F(\xi)}\right]^a$$

где $\xi = e^t x^{-2\alpha}$ и F удовлетворяет

$$2\alpha^2\xi^2 F'' + 2\alpha^2\xi F' + \alpha\xi F' - 1 - {}^1/_2 e^{-F}\xi F' + 2a(1 - \alpha\xi F')^2 = 0 \qquad (5.14)$$

откуда следует:

$$2\frac{d^2F}{dy^2} + \frac{dF}{dy} - \frac{1}{2\alpha} e^{-F}\frac{dF}{dy} + 2a\left(1 - \frac{dF}{dy}\right)^2 - 1 = 0 \qquad (5.15)$$

где $y = \alpha^{-1}\ln\xi$. При $a = 0$ уравнение (5.15) допускает первый интеграл

$$2\frac{dF}{dy} + \frac{1}{2\alpha} e^{-F} + F - y = C_1 \qquad (5.16)$$

5°. В случае (Б) при $a = {}^1/_4$ нелинейное уравнение теплопроводности интегрируется до конца на подгруппе $\sigma X_2 + X_5$. Решения имеют вид

$$E = xF(\xi), \quad \xi = t + \alpha/x$$

Для F получаем уравнение

$$\alpha^2 \frac{d^2F}{d\xi^2} - \frac{1}{F^4}\frac{dF}{d\xi} = 0 \qquad (5.17)$$

интегрируя которое, имеем выражение для E

$$E = x\left[-\frac{4}{3\alpha^2}\left(C_2 + t + \frac{\alpha}{x}\right)\right]^{1/4}$$

$$C_1\left(t + \frac{\alpha}{x}\right) + C_2 = 3\alpha^2 C_1 \frac{E}{x} + \frac{1}{6}\ln\left\{\left(a - \frac{E}{x}\right)^2\left[a^2 + a\frac{E}{x} + \left(\frac{E}{x}\right)^2\right]^{-1}\right\} -$$

$$-\frac{1}{a^2\sqrt{3}}\,\mathrm{arc\,tg}\left[a^{-1}3^{-1/2}\left(2\frac{E}{x} + a\right)\right] \quad \left(a^3 = \frac{1}{3\alpha^2 C_1}\right) \tag{5.18}$$

6°. Рассмотрим, наконец, решение на подгруппе $X_3 + X_5$. Здесь имеем

$$E = (1 + x)F(\xi), \qquad \xi = \frac{1}{t}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2$$

где F подчинено условию

$$\frac{d^2F}{d\xi^2} + \left(\frac{1}{2\xi} + \frac{1}{4F^4}\right)\frac{dF}{d\xi} = 0 \tag{5.19}$$

которое с помощью подстановки

$$\xi = e^{4z}, \quad F = e^z\,\Phi(z)$$

приводится к виду

$$P\left(\frac{dP}{d\Phi} + \frac{1}{\Phi^4}\right) - \Phi\left(1 - \frac{1}{\Phi^4}\right) = 0, \qquad P(\Phi) = \frac{d\Phi}{dz} \tag{5.20}$$

(5.20) допускает частное решение $\Phi = 1$, которому соответствует

$$E = [x(1 + x)]^{1/2}\, t^{-1/4} \tag{5.21}$$

7°. Рассмотрим решение на подгруппе X_3, допускаемой уравнением (1.3) при произвольной $\sigma(E)$. Инварианты оператора X_3

$$I_1 = x^2 / 4t, \qquad I_2 = E$$

определяют форму искомых решений

$$E = E(\xi), \quad \xi = x^2 / 4t$$

а из (1.3) следует уравнение

$$\frac{d^2E}{d\xi^2} + \left[\frac{1}{2\xi} + \sigma(E)\right]\frac{dE}{d\xi} = 0 \tag{5.22}$$

6. Некоторые из приведенных решений нелинейного уравнения теплопроводности были получены ранее другими авторами.

Обыкновенные дифференциальные уравнения для инвариантных решений на подгруппе $X_3 + \alpha X_4$ в случае (Б) были получены Г. И. Баренблаттом [7] методом теории размерностей и решались им приближенно.

Уравнение (5.10) было получено и решалось Т. Р. Солдатенковым приближенно при рассмотрении задачи о проникновении электромагнитного поля в плазму (задача о нелинейном скин-эффекте) [5].

Форма же всех возможных инвариантных решений нелинейного уравнения теплопроводности, как уже отмечалось, была дана Л. В. Овсянниковым в работе [1].

Поступила 14 VI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности. Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 3, стр. 492—495.
2. Чеботарев Н. Г. Теория групп Ли. М.— Л., Гостехтеоретиздат, 1940.
3. Эйзенхарт Л. П. Непрерывные группы преобразований. М., Изд-во иностр. лит., 1947.
4. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
5. Soldatenkov T. R. Penetration of an electromagnetic field into a plasma in the case of a non-linear Ohm's law. Nucl. fusion, 1970, vol. 10, No. 1, pp. 69—73.
6. Керреброк Дж. Электропроводность газов при повышенной электронной температуре. В сб. «Инженерные вопросы магнитной гидродинамики», М., «Мир», 1965.
7. Баренблатт Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде. ПММ, 1952, т. 16, вып. 1, стр. 67—78.