

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ЗАДАЧ  
МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ,  
ПРИВОДИМЫХ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ  
С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ СТАРШЕЙ  
ПРОИЗВОДНОЙ

Н. С. Ерохин, С. С. Моисеев

(Новосибирск)

Исследуются асимптотические свойства решений дифференциального уравнения четвертого порядка с произвольным параметром при старшей производной. Показано подобие асимптотик независимо от значения параметра при старшей производной при наличии нулей коэффициента при второй производной.

Рассматривается влияние продольного тока, конечности ларморовского радиуса ионів и ион-ионной вязкости на устойчивость плазмы в магнитном поле. Вычисляется инкремент развивающейся неустойчивости, а также выясняется стабилизирующая роль вращения ионов в магнитном поле.

1. Известно, что в ряде случаев при исследовании спектров колебаний в обычной и магнитной гидродинамике задача сводится к дифференциальному уравнению выше второго порядка [1, 2]. В частности, особую роль играет случай, когда в дифференциальном уравнении  $n$ -го порядка коэффициент при  $(n - 2)$  производной обращается в нуль в некоторой точке комплексной  $X$ -плоскости. В связи с этим в [3, 4] было предпринято исследование дифференциального уравнения

$$\alpha \beta^2 \varphi^{IV} - \beta u_2(x) \varphi'' + u_1(x) \varphi = 0 \quad (1.1)$$

с двумя малыми параметрами:  $\beta$  — малый параметр «квазиклассичности», характеризующий слабую неоднородность среды,  $\alpha$  — другой малый параметр (например, связанный с влиянием малой вязкости); отметим, что, в частности,  $\alpha$  и  $\beta$  могут равняться единице. Коэффициенты  $u_2, u_1 \sim 1$ , за исключением точек, в которых они могут обращаться в нуль.

Основное внимание в работах [3, 4] было уделено исследованию влияния точек «пересечения» решений на характер спектра колебаний. В частности, вблизи точки  $u_2 = 0$  существуют две точки «пересечения» решений, и расстояние между ними, пропорциональное параметру  $\alpha / \beta^2$ , определяет размер особой области в данном случае. Классификация методов решения задачи была проведена по параметру  $\alpha / \beta^2$ , причем основное внимание уделялось случаю  $\alpha / \beta^2 \gg 1$ , когда можно воспользоваться методом фазовых интегралов при обходе каждой особенности в отдельности, так как расстояние между точками пересечения решений велико по сравнению с характерной длиной волны пересекающихся решений.

В настоящей работе будет показано, что, используя метод Лапласа в сочетании с аналитическими свойствами решений, можно, с единой точки зрения, провести исследование задачи при любых значениях параметра  $\alpha / \beta^2$ . В [3] было отмечено, что, согласно результатам работы [5], следует ожидать аномального перехода одного решения в другое в некоторой области комплексной  $X$ -плоскости вблизи точки  $u_2 = 0$  также и при  $(\alpha / \beta^2) \ll 1$ . С этим связано, что, как будет видно из дальнейшего, решения обладают в известном смысле сходными асимптотическими свойствами при произвольных значениях  $\alpha / \beta^2$ . Для простоты ограничимся дифференциальным уравнением четвертого порядка.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\varphi^{IV} + \lambda^2 (x\varphi'' + u_{10}\varphi) = 0 \quad (1.2)$$

исследованное в [6] при больших значениях параметра  $\lambda$ . Как показано в [3], к подобному виду можно привести (1.1) вблизи точки  $u_2 = 0$ , причем  $\lambda^2 = \beta^2 / \alpha$ .

Используя метод Лапласа, запишем решение уравнения (1.2)

$$\varphi(x) = \int t^{-2} \exp\left(tx - \frac{u_{10}}{t} + \frac{t^3}{3} \lambda^{-2}\right) dt$$

Как и в [6], выберем контуры  $C$ , как указано на фигуре. Концы контуров, уходящих в бесконечность, лежат в секторах  $t$ -плоскости, где  $\operatorname{Re}(t^3/\lambda^2) < 0$ . Тогда, согласно теореме Коши, имеем следующую связь между решениями:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= V, & u_3 - u_2 &= A_1, \\ u_1 - u_3 &= A_2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Выясним поведение на действительной оси  $X$  указанных решений при малых значениях параметра  $\lambda$ . Рассмотрим прежде всего решение  $V$ . Вычисляя вычет при  $t = 0$ , получим

$$V = 2\pi i \left(\frac{x}{u_{10}}\right)^{1/2} \left\{ J_1(2\sqrt{xu_{10}}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{3n-1}(2\sqrt{xu_{10}})}{n! a^n} \right\} \quad \left(a = -3\lambda^2 \left(\frac{x}{u_{10}}\right)^{3/2}\right)$$

Для достаточно больших значений  $x$ , когда  $|a| \gg 1$ , в выражении (1.5) можно пренебречь суммой, и оно переходит в соответствующее выражение, полученное в [6].

Рассмотрим теперь решения  $A_k$ . Сделав замену  $t = \lambda x^{1/2} \sigma$ , имеем

$$A_k = \frac{1}{\lambda \sqrt{x}} \int_{c_k} \exp\left[\lambda x^{3/2} \left(\sigma + \frac{\sigma^3}{3}\right) - \frac{u_{10}}{\sigma \lambda x^{1/2}}\right] \frac{d\sigma}{\sigma^2} \quad (1.6)$$

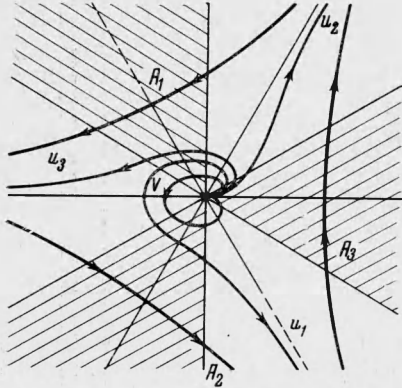
Из (1.6) видим, что, как и в случае  $\lambda \gg 1$ , можно пренебречь членом  $u_{10}\sigma^{-1}/\lambda x^{1/2}$  в показателе экспоненты, тогда дальнейшие вычисления вполне подобны проведенным в [6]. Аналогичные рассуждения могут быть проведены для решений  $U_k$ . Приведем здесь асимптотическое выражение для  $A_3$  на вещественной оси

$$A_3 \approx \sqrt{\pi} \lambda^{-2/3} e^{-1/3 i \pi} \left(\frac{3\xi}{2}\right)^{-2/3} e^{\xi}, \quad \arg x = -\pi$$

$$A_3 \approx \sqrt{\pi} \lambda^{-2/3} e^{1/3 i \pi} \left(\frac{3\xi}{2}\right)^{-2/3} [e^{\xi} + i e^{-\xi}] + V, \quad \arg x = 0 \quad \xi = i \lambda x^{3/2}$$

Отметим, что приведенные здесь выражения совпадают с полученными по методу фазовых интегралов. В секторе  $\arg x = \pi + 1/3 \gamma \pi$ ,  $|\gamma| < 1$  решение  $A_3$  ведет себя как наиболее быстро спадающее и не содержит «примесей» других решений. В секторе  $\arg x = 2/3 \gamma \pi$  в пределах ошибки метода перевала решение  $V$  не влияет на поведение  $A_3$ .

Наконец, на линии  $x > 0$  оба типа решений — чисто осциллирующие и имеют «слабое» различие порядков, выражающееся степенями  $x$  и  $\lambda$ .



Фиг. 1

Легко заметить, что вблизи линий  $c_k$ , удовлетворяющих условию  $\arg x = \frac{2}{3}\pi (k-2)$ , к решениям  $A_k$  (имеющим на них чисто колебательный характер) присоединяются члены, имеющие вид решений типа V. Это связано с расположением перевальных точек и линий стока относительно контуров решений, что определяет наши возможности деформирования контура в отрезки линий стока. Вблизи линий  $c_k$  перевальные точки  $t_{1,2}^2 = -\lambda^2 x$  попадают на границу незаштрихованных секторов, и контур  $C(A_k)$  деформируется в линии, проходящие через все перевальные точки. Отметим, что для решений типа  $U_k$ , в силу их меньшей степени роста, существует сектор в  $x$ -плоскости, в котором есть примесь растущих  $A_k$  (или же чисто осциллирующих), поскольку невозможно деформацией контура исключить влияние точек перевала  $t_{1,2}$ . Подобие асимптотик при  $\lambda \ll 1$  и  $\lambda \gg 1$  приводит к тому, что в обоих указанных случаях правила нахождения спектра частот для финитных решений аналогичны полученным в [3].

Разумеется, граничные условия на стенках могут привести к другим правилам нахождения частот и, в частности, нарушить сильную связь между решениями.

Отметим, что в рассматриваемом случае в окрестности особой области  $u_2 = 0$  испытывают ветвление как  $k_1 - k_2$ , так и  $k_1 + k_2$ . Здесь  $k_1(x)$ ,  $k_2(x)$  — волновые вектора зацепляющихся решений, легко определяемые из (1.1). В случае, если ветвление испытывает только, например,  $k_1 - k_2$  и точки ветвления расположены не на вещественной оси, связь между решениями ослабляется [7].

2. Прежде чем переходить к конкретным приложениям теории, сделаем еще несколько замечаний. Во-первых, как следует из предыдущих рассуждений, нет необходимости исследовать размер «резонансной» области между точками «пересечения» решений, поскольку при наличии точки  $u_2 = 0$  спектр колебаний финитных решений от этого не зависит. Нужно только, чтобы ширина «резонансной» области была мала по сравнению с шириной «ямы», в которой локализовано финитное решение; однако ширина «ямы» равняется  $\sim R$  ( $R$  — характерный размер неоднородности), а размер «резонансной» области —  $\sim R\sqrt{\alpha}$ . Поэтому последнее требование фактически всегда выполняется. Далее, так как коэффициент  $u_2$  является в конкретных задачах, вообще говоря, функцией частоты, то важную роль играет расположение точек  $u_2 = 0$  в комплексной  $X$ -плоскости. Если точки  $u_2 = 0$  расположены далеко от вещественной оси (это обычно бывает, если  $\operatorname{Re} \omega \sim \operatorname{Im} \omega$ ), а на вещественной оси существуют финитные решения (1.1), соответствующие данной частоте, то на такие решения точки  $u_2 = 0$  оказывают слабое влияние. Иначе говоря, рассматриваемая здесь теория применима, вообще говоря, к случаю

$$\operatorname{Im} \omega \ll \operatorname{Re} \omega$$

Отметим также, что особенности типа «пересечения» решений или «точек поворота» будут влиять на возмущение в виде пакета волн, если

$$\frac{d(\operatorname{Re} \omega)}{dk} \frac{1}{\operatorname{Im} \omega} \ln \frac{A}{A_m} > L$$

Здесь  $L$  — расстояние от места локализации пакета до области, где нарушается приближение геометрической оптики,  $A_m$  — амплитуда начальных «шумов» в среде,  $A$  — амплитуда возмущения в нелинейном режиме. В противном случае необходимо учитывать нелинейные эффекты.

Рассмотрим теперь влияние конечности ларморовского радиуса ионов, а также ион-ионной вязкости на развитие неустойчивости плазмы в маг-

нитном поле за счет продольного тока [8, 9]. Уравнение для возмущенных величин имеет следующий вид [9, 10]:

$$\alpha \varphi^{IV} + k_y^2 \left[ -2\alpha + \frac{\omega - \omega_i}{i\nu_i} \right] \varphi'' + k_y^4 \left[ \alpha - \frac{\omega - \omega_i}{i\nu_i} + \frac{\omega - \omega_i}{\nu_i} \frac{\omega_s}{\omega} \left( 1 - \frac{\omega_e}{\omega - \omega_i} + \frac{i\omega_0}{\omega - \frac{2}{3} \frac{\chi k_z^2}{\nu_e} - \omega_i} \right) \right] \varphi = 0 \quad (2.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha &= (k_y r_i)^2 & \omega_e &= k_y \frac{c T_{0e}}{e H_0} \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dx} \\ \omega_i &= k_y \frac{c T_{0i}}{e H_0} \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dx}, & \omega_s &= \left( \frac{k_z}{k_y} \right)^2 \frac{\omega_{Hi} \omega_{He}}{\nu_e} \\ \chi &= \frac{\kappa}{n_0}, & \omega_0 &= \frac{k_y}{k_z} \frac{j_0 c}{H_0 \sigma_{\parallel}^2} \frac{d\sigma_{\parallel}}{dx} \end{aligned} \quad (2.2)$$

В (2.1) и (2.2) приняты следующие обозначения:  $k_y, k_z$  — проекции волнового вектора на оси  $y$  и  $z$  соответственно;  $r_i$  — ларморовский радиус ионов;  $H_0$  — магнитное поле, направленное по  $z$ -оси;  $T_{0e}, T_{0i}, \omega_{He}, \omega_{Hi}$  — соответственно электронная и ионная температуры и ларморовские частоты;  $j_0$  — начальный продольный ток;  $\sigma_{\parallel}$  — продольная проводимость;  $\nu_e, \nu_i$  — соответственно частоты соударения электронов с ионами и ионов с ионами;  $n_0$  — невозмущенная плотность;  $e$  — заряд электронов;  $c$  — скорость света;  $\kappa$  — коэффициент электронной теплопроводности. Качественные исследования устойчивости удобно провести при помощи соотношения [10]

$$\text{Im} (u_1 + \beta u_2 |k|^2) = 0, \quad \text{Re} (\alpha \beta^2 k_x^4) - \text{Re} (u_1 + \beta u_2 k_x^2) = 0 \quad (2.3)$$

записанных для некоторой точки  $x^{(0)}$  в области локализации  $\varphi(x)$  для (1.1). В (2.3) вместо  $k_x$  берется  $k_1$  или  $k_2$  в зависимости от интегрального вклада мод в критерий устойчивости  $k_1 / k_2 \sim \sqrt{\alpha}$ . Выясним прежде всего, как влияет конечность ларморовского радиуса ионов на неустойчивость за счет продольного тока, если коэффициент при второй производной в нуль не обращается. Тогда в уравнении (2.3) можно не учитывать четвертую производную. Рассматривая для простоты случай, когда  $\omega_0 \gg \omega_s, \omega_e, \alpha \nu_i, \chi k_z^2$ , из (2.3) получим

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2} \omega_i \pm \frac{1}{2} \sqrt{\omega_i^2 - 4\omega_0 \omega_s} \quad (2.4)$$

Из (2.4) видим, что возможна стабилизация токовой неустойчивости за счет конечности ларморовского радиуса ионов, если

$$\omega_i^2 > 4\omega_0 \omega_s$$

Если теперь имеется в окрестности вещественной оси точка  $u_2 = 0$ , то влияние «моды»  $k_2$  оказывается существенным. Из (2.3) тогда получим следующее условие стабилизации:

$$\omega_i^2 > 4\alpha \omega_0 \omega_s$$

т. е. условие стабилизации заметно улучшается.

Учтем теперь влияние ион-ионной вязкости, которой соответствует член  $\alpha \nu_i$ . Тогда при условии  $\omega^2 \gg 4\omega_0 \omega_s$  (откуда, в частности, следует стабилизация обычной токовой неустойчивости), а также  $\omega_i \gg \alpha \nu_i$  из (2.3) в случае, когда можно пренебречь четвертой производной, имеем

$$\omega = \frac{\omega_0 \omega_s}{\omega_i} - i \alpha \nu_i \frac{\omega_0 \omega_s}{\omega_i^2} \quad (2.5)$$

Из (2.5) видим, что одновременный учет продольного тока, конечности ионного ларморовского радиуса и ион-ионной вязкости вновь приводит к неустойчивости с малым инкрементом ( $\text{Im } \omega \ll \sqrt{\omega_0 \omega_s}$ ). При наличии точек  $u_2 = 0$  из (2.3) следует, что  $\text{Re } \omega$  и  $\text{Im } \omega$  уменьшаются в  $\alpha$  раз, однако неустойчивость остается.

Благодарим Г. М. Заславского и Р. З. Сагдеева за полезные дискуссии.

Поступила 10 XI 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Линь Цзяцзяо. Теория гидродинамической устойчивости. Изд. иностр. лит., 1958.
2. Furth H. P., Killen T., Rosenbluth. Finite-Resistivity Instabilities — of a sheet Pinch. 1963, vol. 6, p. 459.
3. Заславский Г. М., Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. Асимптотические методы гидродинамической теории устойчивости. Докл. АН СССР, 1964, т. 158, стр. 1295.
4. Заславский Г. М., Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. Асимптотические методы гидродинамической теории устойчивости. ПМТФ, 1964, № 5, стр. 44.
5. Wasow W. The complex asymptotic theory of a fourth order differential equation of hydrodynamics. Annals of Mathematics, 1948, vol. 49, p. 852.
6. Wasow W. «A study of the solitons of the differential equation  $y^{(iv)} + \lambda^2(xy'' + y) = 0$  for large values of  $\lambda$ ». Annals of Mathematics, 1950, vol. 52, p. 350.
7. Железняков В. В. Радиоизлучение солнца и планет. Изд-во «Наука», 1964.
8. Кадомцев Б. Б. Турбулентная утечка частиц из разряда в сильном магнитном поле. ЖТФ, 1961, т. 31, стр. 1209.
9. Заславский Г. М., Моисеев С. С. Об аномальной диффузии плазмы в магнитном поле. ЖТФ, 1964, т. 34, стр. 410.
10. Галеев А. А., Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. Теория устойчивости неоднородной плазмы и аномальная диффузия. Атомная энергия, 1963, т. 15, стр. 45.