

**ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СВЕРХЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ КОЛЬЦЕВОГО КРЫЛА**

*Х. А. Рахматулин, К. Г. Савинов*

(Москва)

Рассматривается обтекание установившимся сверхзвуковым потоком тонких тел вращения с протоком так называемых кольцевых крыльев.

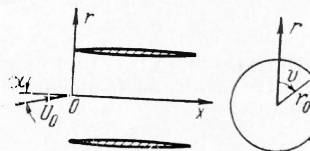
Для решения задач об обтекании тонких тел вращения в случае линеаризованных уравнений газовой динамики Карман предложил метод источников и стоков. В применении к задаче тонкого тела вращения с протоком этот метод усложняется, особенно, если обтекание тела происходит под некоторым углом.

Уард [1] при решении задачи о кольцевом крыле применяет операционное исчисление и асимптотические представления функций Бесселя мнимого аргумента.

В работе Хаака [2] применяется метод характеристик, расчеты ведутся в плоскости течения, при этом используются производные вдоль характеристик. Для каждого конкретного вида образующей кольцевого крыла по этому методу нужно проводить отдельный расчет.

А. И. Уткин [3] рассматривает бесконечно тонкий полый цилиндр под малым углом атаки и при помощи формулы Вольтерра сводит задачу к интегральному уравнению. Решение строится в виде ряда.

В работе Г. Е. Боброва [4] такая же задача решается операционным методом. Решения для коэффициентов подъемной силы и аэродинамического момента получаются в виде рядов.



Фиг. 1

Ниже решение задачи об обтекании кольцевого крыла под малым углом атаки разбивается на две независимые задачи: об обтекании кольцевого крыла осевым потоком и об обтекании бесконечно тонкого полого цилиндра под малым углом атаки; решение исходной задачи получается наложением полученных решений. Для решения осесимметричной задачи применяются операционный метод и метод характеристик. Определение сопротивления кольцевого крыла любого профиля сводится к квадратурам. Задача о цилиндре решается методом характеристик. Решение этой задачи позволяет определить подъемную силу и аэродинамический момент.

Пусть некоторое тело вращения с протоком (фиг. 1), близкое к полому круглому цилиндру радиуса  $r_0$ , обычно называемое кольцевым крылом, обтекается сверхзвуковым потоком, направление которого с осью симметрии тела составляет малый угол  $\alpha$ ;  $U_0$  — скорость потока на бесконечности. Газ считается идеальным. От обычных цилиндрических координат  $x, r, \vartheta$  перейдем к безразмерным координатам

$$\xi = x/r_0 \sqrt{M_0^2 - 1}, \quad \eta = r/r_0, \quad \vartheta = \vartheta,$$

где  $M_0$  — число Маха набегающего потока.

Так как относительно профиля крыла предполагается, что он тонкий, слабоизогнутый, с острой передней кромкой, то возмущение основного потока будет малым. Потенциал возмущенных скоростей  $\varphi(\xi, \eta, \vartheta)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} \tag{1}$$

и граничным условиям

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = r_0 U_0 [\beta_{1,2}(\xi) - \alpha \cos \vartheta] \quad \text{при } \eta = 1, \quad \varphi = 0 \quad \text{при } \eta = 1 \pm \xi \tag{2}$$

В (2) величины  $\beta_1(\xi)$  и  $\beta_2(\xi)$  обозначают наклон касательной к наружной и внутренней образующим кольцевого крыла. Знак плюс соответствует внешней задаче, знак минус — внутренней. Будем искать решение в виде

$$\varphi(\xi, \eta, \vartheta) = U_0 r_0 \psi(\xi, \eta) + U_0 r_0 \alpha f(\xi, \eta) \cos \vartheta \tag{3}$$

При подстановке выражения (3) в уравнение (1) и граничные условия (2) поставленная задача распадается на две краевые задачи для  $\psi(\xi, \eta)$  и  $f(\xi, \eta)$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \tag{задача 1}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \beta_{1,2}(\xi) \quad \text{при } \eta = 1, \quad \psi = 0 \quad \text{при } \eta = 1 \pm \xi$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial f}{\partial \eta} - \frac{1}{\eta^2} f \tag{задача 2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = -1 \quad \text{при } \eta = 1, \quad f = 0 \quad \text{при } \eta = 1 \pm \xi$$

Задача 1 есть задача об обтекании кольцевого крыла осевым потоком; задача 2 — задача об обтекании полого цилиндра под углом атаки.

Решим задачу 1 операционным методом. Изображение уравнения имеет вид

$$\frac{d^2\Psi}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{d\Psi}{d\eta} - p^2\Psi = 0 \quad \left( \Psi(p, \eta) = p \int_0^\infty e^{-p\xi} \Psi(\xi, \eta) d\xi \right)$$

Общим решением этого уравнения будет

$$\Psi(p, \eta) = A_1 I_0(p\eta) + A_2 K_0(p\eta)$$

Здесь  $I_0(p\eta)$  и  $K_0(p\eta)$  — функции Бесселя мнимого аргумента нулевого порядка. Принимая во внимание поведение функций  $I_0$  и  $K_0$ , нужно положить для внешней задачи  $\Psi = A_2 K_0(p\eta)$ , для внутренней задачи  $\Psi = A_1 I_0(p\eta)$ . Функции  $A_1$  и  $A_2$  определяются из граничных условий. Решения в изображениях внешней и внутренней задач соответственно будут

$$\Psi_1 = \frac{B_1(p) K_0(p\eta)}{p K_0'(p)}, \quad \Psi_2 = \frac{B_2(p) I_0(p\eta)}{p I_0'(p)}$$

где  $B_1(p)$  и  $B_2(p)$  — изображения  $\beta_1(\xi)$  и  $\beta_2(\xi)$ .

По этим изображениям на основании теоремы Бореля можно написать оригиналы

$$\psi_1(\xi, \eta) = \int_0^\xi \beta_1(\xi - \tau) \omega_1(\tau, \eta) d\tau, \quad \psi_2(\xi, \eta) = \int_0^\xi \beta_2(\xi - \tau) \omega_2(\tau, \eta) d\tau \quad (4)$$

Здесь  $\omega_1$  — оригинал изображения  $K_0(p\eta)/K_0'(p)$ , а  $\omega_2$  — оригинал изображения  $I_0(p\eta)/I_0'(p)$ . Отсюда следует, что функции  $\omega_1$  и  $\omega_2$  не зависят от параметров задачи.

Положим в формулах (4)  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 = 1$ . Тогда продифференцировав (4) по  $\xi$ , получим

$$\omega_1(\xi, \eta) = \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi}, \quad \omega_2(\xi, \eta) = \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi}$$

Для определения функций  $\omega_1(\xi, \eta)$  и  $\omega_2(\xi, \eta)$  нужно решить задачу

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial \eta} = 1 \quad \text{при } \eta = 1, \quad \chi = 0 \quad \text{при } \eta = 1 \pm \xi \quad (6)$$

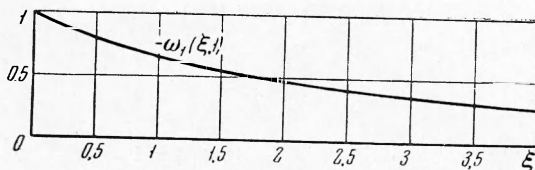
Полученные из решения этой задачи производные  $\partial \chi_1 / \partial \xi$  и  $\partial \chi_2 / \partial \xi$  и будут искомыми функциями  $\omega_1(\xi, \eta)$  и  $\omega_2(\xi, \eta)$ .

Воспользовавшись условиями на характеристиках

$$d\chi_\xi = \pm d\chi_\eta + \frac{1}{\eta} \chi_\eta d\xi$$

и граничными условиями (6), второе из которых дает соотношение

$$\frac{\partial \chi}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \chi}{\partial \eta} d\eta = 0$$



Фиг. 2

для безразмерных скоростей на головной волне Маха получим

$$\chi_\xi = -\frac{1}{\sqrt{\eta}}, \quad \chi_\eta = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \quad \text{при } \eta = 1 + \xi, \quad \chi_\xi = \chi_\eta = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \quad \text{при } \eta = 1 - \xi$$

Аналогичным образом для функции  $f$  получим

$$f_\xi = -\frac{1}{\sqrt{\eta}}, \quad f_\eta = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \quad \text{при } \eta = 1 + \xi, \quad f_\xi = f_\eta = -\frac{1}{\sqrt{\eta}} \quad \text{при } \eta = 1 - \xi$$

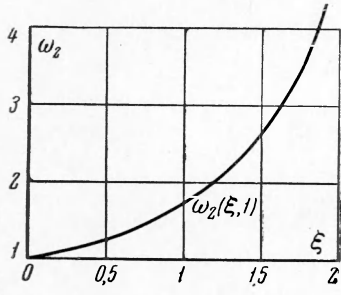
Задача для  $\chi$  и задача 2 для  $f$  решались методом характеристик. Внешние задачи считались до  $\xi = 4$ , внутренние до  $\xi = 1.88$ .

Особый интерес представляют значения функций на крыле, т. е. при  $\eta = 1$ ; на фиг. 2—5 приведены графики функций

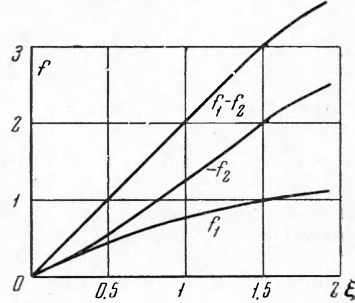
$$\omega_1(\xi, 1), \omega_2(\xi, 1), f_1 = f_1(\xi, 1), f_2 = f_2(\xi, 1), f_1(\xi, 1) - f_2(\xi, 1), \frac{\partial f_1(\xi, 1)}{\partial \xi}, \frac{\partial f_2(\xi, 1)}{\partial \xi}$$

которые входят в выражения для сопротивления, подъемной силы и момента.

Отметим, что функции  $\omega_1(\xi, 1)$ ,  $\omega_2(\xi, 1)$  хорошо аппроксимируются квадратичными парабололами.  
 Полученные результаты для свободного кольцевого крыла можно использовать для кольцевого крыла длины  $l \ll 2(r_0 - r^o) \sqrt{M_0^2 - 1}$ , находящегося на одной оси



Фиг. 3



Фиг. 4

с цилиндром, который будем считать бесконечным; здесь  $r^o$  — радиус цилиндра (фиг. 6). Потенциал возмущений, вызванных кольцевым крылом, ищется в виде

$$\varphi = U_0 r_0 \left[ \psi(\xi, \eta) + \alpha \left( 1 - \frac{r^{o2}}{r_0^2} \right) f(\xi, \eta) \cos \phi \right]$$

Для  $\chi(\xi, \eta)$  и  $f(\xi, \eta)$  получаются уже рассмотренные краевые задачи 1 и 2. Как известно, в случае малых возмущений справедливо соотношение

$$p - p_0 = -\rho_0 U_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

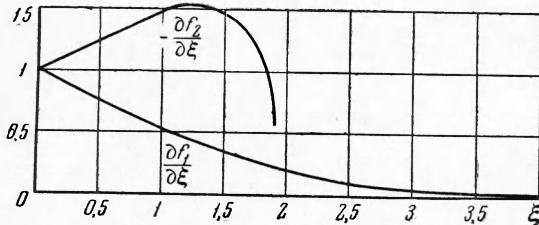
где  $p_0$  и  $\rho_0$  — давление и плотность невозмущенного потока. Если перейти к безразмерным переменным и принять во внимание (3), то получается

$$p - p_0 = -\frac{\rho_0 U_0^2}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \xi} \alpha \cos \phi \right) \quad (7)$$

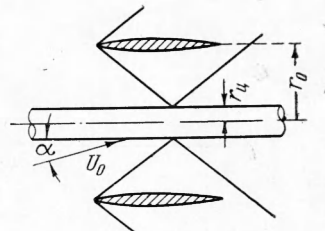
Учитывая (7), нетрудно получить выражения для сопротивления, подъемной силы и аэродинамического момента. Для сопротивления будем иметь

$$X = 2\pi\rho_0 U_0^2 r_0^2 \int_0^\delta \left[ \beta_2(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^\xi \beta_2(\xi - \tau) \omega_2(\tau, 1) d\tau - \beta_1(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^\xi \beta_1(\xi - \tau) \omega_1(\tau, 1) d\tau \right] d\xi$$

Здесь  $\delta = l / r_0 \sqrt{M_0^2 - 1}$  — безразмерная длина крыла.



Фиг. 5



Фиг. 6

Из вида функций  $\omega_1(\xi, 1)$  и  $\omega_2(\xi, 1)$  следует, что у любого кольцевого крыла с симметричным профилем внутренняя поверхность оказывает большее сопротивление, чем внешняя.

Рассмотрим коэффициент сопротивления  $C_x$  — отнеся  $X$  к площади боковой поверхности цилиндра радиуса  $r_0$  и длины  $l$

$$C_x = \frac{X}{2\pi r_0 l \frac{1}{2} \rho_0 U_0^2} = \frac{2}{\delta \sqrt{M_0^2 - 1}} \int_0^\delta \left[ \beta_2 \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^\xi \beta_2(\xi - \tau) \omega_2(\tau, 1) d\tau - \beta_1 \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^\xi \beta_1(\xi - \tau) \omega_1(\tau, 1) d\tau \right] d\xi$$

Рассмотрим в качестве примера усеченный полый конус с малым углом раствора  $\beta$ . В этом случае для  $C_x$ ,  $C_{x1}$ ,  $C_{x2}$  будем иметь

$$C_x = \frac{2\beta^2}{\delta \sqrt{M_0^2 - 1}} \int_0^\delta [\omega_2(\xi) - \omega_1(\xi)] d\xi, \quad C_{x1} = -\frac{2\beta^2}{\delta \sqrt{M_0^2 - 1}} \int_0^\delta \omega_1(\xi) d\xi$$

$$C_{x2} = \frac{2\beta^2}{\delta \sqrt{M_0^2 - 1}} \int_0^\delta \omega_2(\xi) d\xi$$

На фиг. 7 поведение величин

$$C_x^\circ = \frac{C_x \sqrt{M_0^2 - 1}}{2\beta^2}, \quad C_{x1}^\circ = \frac{C_{x1} \sqrt{M_0^2 - 1}}{2\beta^2}, \quad C_{x2}^\circ = \frac{C_{x2} \sqrt{M_0^2 - 1}}{2\beta^2}$$

представлено графически. Для сравнения с сопротивлением плоской пластинки, расположенной под углом  $\beta$  к потоку, на фиг. 7 пунктиром изображены соответствующие коэффициенты для пластинки.

Для подъемной силы получается

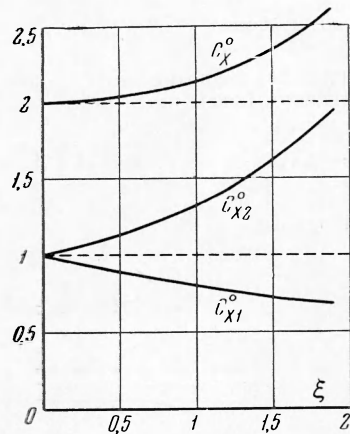
$$Y = \pi \rho_0 r_0^2 U_0^2 \alpha [f_1(\delta, 1) - f_2(\delta, 1)]$$

В пределах точности линейной теории подъемная сила кольцевого крыла, близкого к полному цилиндру, равна подъемной силе этого цилиндра. Сравним подъемную силу кольцевого крыла с подъемной силой плоской пластинки длины  $l$  и ширины  $2r_0$ , т. е. площадь которой равна площади кольцевого крыла в плане. Для этого рассмотрим коэффициент  $C_y$ , отнесенный к  $2r_0 l$

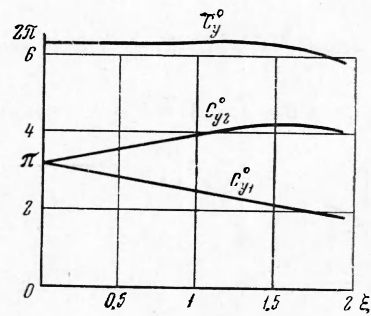
$$C_y = \frac{Y}{2r_0 l \frac{1}{2} \rho_0 U_0^2} = \frac{\pi \alpha}{\delta \sqrt{M_0^2 - 1}} [f_1(\delta, 1) - f_2(\delta, 1)] \quad (8)$$

На основании (8) на фиг. 8 построен график величины  $C_y^\circ = C_y \sqrt{M_0^2 - 1} / \alpha$ , из которого видно, что  $C_y \approx 2\pi \alpha / \sqrt{M_0^2 - 1}$  для  $0 \leq \delta \leq 1.5$  и, следовательно, в

$\pi/2$  раз больше подъемной силы пластинки. Из графиков  $C_{y1}^\circ$  и  $C_{y2}^\circ$  видно, что внутренняя поверхность кольцевого крыла создает большую подъемную силу, чем внешняя.



Фиг. 7



Фиг. 8

Для аэродинамического момента, создаваемого кольцевым крылом относительно точки  $O$ , получим

$$M = \pi \rho_0 r_0^3 U_0^2 \alpha \sqrt{M_0^2 - 1} \int_0^\delta \xi \left( \frac{\partial f_1(\xi, 1)}{\partial \xi} - \frac{\partial f_2(\xi, 1)}{\partial \xi} \right) d\xi +$$

$$+ \pi \rho_0 r_0^3 U_0^2 \alpha \int_0^\delta \left( \beta_1 \frac{\partial f_1(\xi, 1)}{\partial \xi} - \beta_2 \frac{\partial f_2(\xi, 1)}{\partial \xi} \right) d\xi \quad (9)$$

Для полого цилиндра момент  $M^\circ$  будет равен первому члену в (9). Для коэффициента момента будем иметь

$$C_m = \frac{M^\circ}{2r_0 l^2 \frac{1}{2} \rho_0 U_0^2} = \frac{\pi \alpha}{\delta^2 \sqrt{M_0^2 - 1}} \int_0^\delta \xi \left( \frac{\partial f_1(\xi, 1)}{\partial \xi} - \frac{\partial f_2(\xi, 1)}{\partial \xi} \right) d\xi$$

Построив график для  $C_m$ , можем заключить, что для  $0 \leq \delta \leq 1.5$  момент полого цилиндра в  $\pi/2$  раз больше момента пластинки, площадь которой равна площади цилиндра в плане.

В заключение отметим, что при сравнении характеристик кольцевого и плоского крыла не учитывалось влияние конечности размаха плоского крыла. Если такой учет делать, то коэффициенты  $C_y$  и  $C_m$  кольцевого крыла будут превосходить соответствующие коэффициенты плоского крыла еще больше.

Поступила  
24 I 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. W a r d G. N. The approximate external and internal flow past a quasi — cylindrical tube moving at supersonic speeds. The Quarterly journal of Mechanics and Applied Mathematics, 1948, vol. 1, part 2.
2. H a k W. Charakteristikenverfahren zur näherungsweise Berechnung der unsymmetrischen Überschallströmung um ringförmige Körper. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 1951, v. 2, No 5.
3. У т к и н А. И. Теоретическое определение аэродинамических характеристик кольцевого крыла при сверхзвуковых скоростях. ОНТИ, 1957.
4. Б о б р о в Г. Е. К теории кольцевого крыла в сверхзвуковом потоке. Изв. вузов, серия авиационная техника, 1959, № 3.

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА О НАГНЕТАНИИ ГАЗА В ВОДОНОСНЫЙ ПЛАСТ

М. В. Филинов (Москва)

Рассматриваемая ниже задача представляет интерес в связи с усилившимися исследованиями вопросов, связанных с подземным хранением газа в водоносных пластах. Кроме того, приводимое здесь точное решение может быть использовано для оценки правильности различных приближенных методов (например, метода последовательной смены стационарных состояний и др.) и для выбора наиболее удобных из них как с точки зрения точности, так и простоты конечных расчетных формул.

Задача о вытеснении воды газом была впервые сформулирована и решена при некоторых допущениях Л. С. Лейбензоном [1].

В дальнейшем решением задач, связанных с перемещением границы раздела газ — вода занимались многие авторы [2-6]. Для случая нагнетания газа в галерею, расположенную в полубесконечном пласте, точное решение получено в работе [7].

Рассмотрим задачу о нагнетании постоянного весового расхода  $G$  газа в скважину бесконечно малого радиуса, расположенную в бесконечном пласте, первоначально заполненном водой. Предполагается, что зона смеси отсутствует и имеется четкая граница раздела между газом и водой. Неполнота вытеснения, при сохранении предположения о четкой границе раздела, не вносит принципиальных трудностей в решение задачи и при желании может быть учтена. Требуется найти давление  $p_1$  (в области, занятой газом) и давление  $p_2$  (в области, занятой водой). Эти функции удовлетворяют дифференциальным уравнениям движения

$$\frac{p_1}{D} \left( \frac{\partial^2 p_1^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_1^2}{\partial r} \right) = \frac{\partial p_1^2}{\partial t} \quad (0 < r < R) \tag{1}$$

$$\kappa \left( \frac{\partial^2 p_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_2}{\partial r} \right) = \frac{\partial p_2}{\partial t} \quad (R < r < \infty) \tag{2}$$

при следующих начальных и граничных условиях:

$$p_2(r, 0) = p_0 = \text{const} \tag{3}$$

$$\left( \frac{2\pi kh\gamma_0}{\mu p_0} \lim_{r \rightarrow 0} r p_1 \frac{\partial p_1}{\partial r} \right) = G = \text{const} \tag{4}$$

$$p_2(\infty, t) = p_0 = \text{const}, \quad p_1(R, t) = p_2(R, t) \tag{5}$$

$$\frac{k_1}{\mu_1} \frac{\partial p_1(R, t)}{\partial r} = \frac{k_2}{\mu_2} \frac{\partial p_2(R, t)}{\partial r}, \quad m \frac{dR}{dt} = - \frac{k_2}{\mu_2} \frac{\partial p_2(R, t)}{\partial r}, \quad R(0) = 0 \tag{6}$$

Здесь  $m_1 = m_2 = m$  — пористость,  $k_1 = k_2 = k$  — проницаемость,  $\kappa$  — пьезопроводность,  $\mu_1, \mu_2$  — вязкость,  $p_0$  — начальное давление в водоносном пласте,  $G$  — весовой расход газа на скважине.

