ПМТФ, № 1, 1962

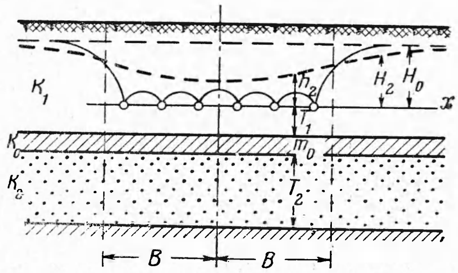
О СНИЖЕНИИ ПЬЕЗОМЕТРИЧЕСКИХ НАПОРОВ В ПОДСТИЛАЮЩИХ ДРЕНИРУЕМЫЕ ГРУНТЫ ВОДОНОСНЫХ ГОРИЗОНТАХ

Н. И. Гамаюнов, Б. С. Шержуков

(*Калинин*)

При дренировании грунтов, подстилаемых хорошо проницаемыми водоносными горизонтами, режим грунтовых вод существенно зависит от величины действующего напора. Ряд задач неустановившейся фильтрации в дрены при наличии питания через слабопроницаемый водоупор рассмотрен в условиях постоянства напора в подстилающем водоносном горизонте [1,2]. Такой подход может быть оправдан, если водоносный горизонт имеет значительную мощность и формируется в стороне от дренируемой территории, охватывающей небольшую площадь в плане. В случае же относительно малой мощности водоносного горизонта и действии дренажа на значительной площади имеет место уменьшение запасов подземных вод водоносного пласта и снижение его напора, что требует специального учета в инженерных расчетах. Параметры установившегося потока в дрены в условиях сниженного и уравновешенного напора в подстилающем водоносном горизонте определены С. Ф. Аверьяновым [3] для круговой в плане площади дренирования. Ниже приводится решение этой задачи для условий неустановившейся фильтрации.

§ 1. Площадь дренирования имеет в плане форму неограниченной полосы. В расчетной схеме (фиг. 1) систематический дренаж, заложенный на расстоянии T_1 от верхней кровли слабопроницаемого водоупора мощностью m_0 с коэффициентом фильтрации k_0 на полосе шириной $2B$, обеспечивает понижение уровня грунтовых вод в верхнем пласте с коэффициентом фильтрации k_1. Результатом этого является снижение напора и в подстилающем водоносном горизонте мощностью T_2 с коэффициентом фильтрации k_2. Динамика напоров в последнем рассматривается в предположении, что во внутренней зоне $(-B < x < +B)$ имеет место восходящий ток жидкости из водоносного горизонта в дренируемый пласт, а во внешней зоне $(-B > x > +B)$ — нисходящий. Полагая далее, что это течение осуществляется нормально к слоям с коэффициентом фильтрации k_0 и k_1 при их мощности m_0 и T_1, а градиент напорного подпитывания снизу определяется разностью напора подстилающего слоя h_2 (в начале процесса H_0) и некоторого сниженного дренами напора в верхнем слое H° (в общем случае переменного во времени), получим обычным способом дифференциальное уравнение для напоров в подстилающем водоносном горизонте (t — время)



Фиг. 1

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} - \alpha^2\eta = 0 \qquad (1.1)$$

Здесь

$$\eta = h_2(x, t) - H^\circ, \quad \alpha^2 = \frac{k_0k_1}{k_2T_2(k_1m_0 + k_0T_1)}$$

Общее решение $\eta = C_1 \operatorname{ch} \alpha x + C_2 \operatorname{sh} \alpha x$ уравнения (1.1) для граничного условия $dh_2/dx = 0$ при $x = 0$ дает $C_2 = 0$ и, следовательно,

$$\eta = h_2 - H^\circ = C_1 \operatorname{ch} \alpha x \tag{1.2}$$

Постоянную C_1 определяем из условия $h_2 = h_2(B, t)$ на границе $x = B$. Таким образом, в расчет вводится переменный во времени расход, поступающий из внешней зоны, что обуславливает параметрическую зависимость искомого напора h_2 от времени. Приняв очевидное равенство $h_2(B, t) = H_2(B, t)$, где H_2 — напор в подстилающем горизонте во внешней области ($B < x < \infty$), напишем систему уравнений, определяющих течение в ней

$$k_2 T_2 \frac{d^2 H_2}{dx^2} + \frac{k_0}{m_0}(H_1 - H_2) = 0 \tag{1.3}$$

$$k_1 \frac{\partial}{\partial x}\left[(H_1 + T_1)\frac{\partial H_1}{\partial x}\right] - k_0 \frac{H_1 - H_2}{m_0} = \delta \frac{\partial H_1}{\partial t} \tag{1.4}$$

где δ — коэффициент водоотдачи.

Определив H_1 из уравнения (1.3), подставив в (1.4) и опустив производные порядка выше второго, получим при осреднении $H_1 + T_1 \approx H_0 + T_1$

$$a_2 \frac{\partial^2 H_2}{\partial x^2} = \frac{\partial H_2}{\partial t} \qquad \left(a_2 = \frac{k_1 (H_0 + T_1) + k_2 T_2}{\delta}\right) \tag{1.5}$$

Последнее уравнение рассматривается при начальном и граничном условиях

$$H_2(x, 0) = H_0 \tag{1.6}$$

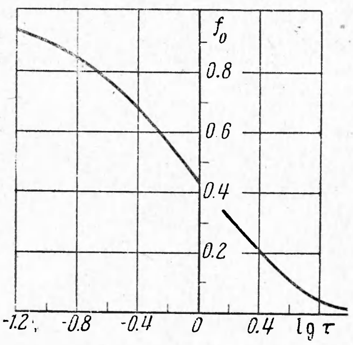
$$H_2(\infty, t) = H_0 \quad \text{или} \quad [\partial H_2/\partial x]_{x=\infty} = 0 \tag{1.7}$$

Второе граничное условие получается из следующих рассуждений. Подставив $h_2 = h_2(B, t)$ в уравнение (1.2), найдем $C_1 = [h_2(B, t) - H^\circ]/\operatorname{ch}\alpha B$; следовательно, (1.2) примет вид

$$h_2(x, t) - H^\circ = \frac{h_2(B, t) - H^\circ}{\operatorname{ch} \alpha B} \operatorname{ch} \alpha x \tag{1.8}$$

На границе $x = B$

$$\frac{\partial h_2(B, t)}{\partial x} = \alpha [h_2(B, t) - H^\circ] \operatorname{th} \alpha B$$



Фиг. 2

Учитывая, что $h_2 = H_2$ при $x = B$, получим граничное условие третьего рода в виде

$$\frac{\partial H_2(B, t)}{\partial x} + \beta [H^\circ - H_2(B, t)] = 0 \quad (\beta = \alpha \operatorname{th} \alpha B) \tag{1.9}$$

Решение уравнения (1.5) при начальном (1.6) и граничных условиях (1.7), (1.9) (задача Римана), как известно, имеет вид

$$H_2(x, t) = H_0 - (H_0 - H^\circ)\left\{\operatorname{erfc}\left(\frac{x - B}{2\sqrt{a_2 t}}\right) - \right.$$

$$\left. - \exp[\beta(x - B) + a_2 \beta^2 t] \operatorname{erfc}\left(\frac{x - B}{2\sqrt{a_2 t}} + \beta\sqrt{a_2 t}\right)\right\} \tag{1.10}$$

Так как на границе $x = B$

$$H_2(B, t) = h_2(B, t) = H_0 - (H_0 - H^\circ)[1 - \exp(\alpha_2 \beta^2 t) \operatorname{erfc}(\beta\sqrt{a_2 t})]$$

то подстановка в (1.8) дает выражение для напоров в подстилающем водоносном горизонте внутренней области

$$h_2(x, t) = H^\circ + (H_0 - H^\circ)\frac{\operatorname{ch} \alpha x}{\operatorname{ch} \alpha B} f_0(\tau) \tag{1.11}$$

График функции $f_0 = \exp(\tau^2)\operatorname{erfc}(\tau)$, где $\tau = \beta\sqrt{a_2 t}$, дан на фиг. 2.

Стационарному состоянию отвечает $h_2 = H^\circ$, однако процесс приближения к нему замедлен, так как стремление $\operatorname{erfc}(\tau)$ к нулю при $\tau \to \infty$ сдерживается ростом экспоненты.

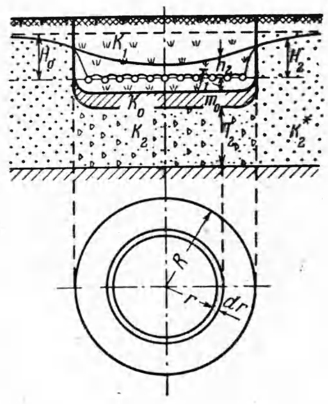
Для общей оценки напорности подстилающего водоносного горизонта может быть получено среднее значение h_{2m} пьезометрического напора

$$h_{2m}(t) = \frac{1}{B}\int\limits_0^B h_2(x, t)\,dx = H^\circ + \frac{H_0 - H^\circ}{\alpha} f_0 \operatorname{th} \alpha B$$

§ 2. Площадь дренирования имеет в плане форму круга (осесимметричная задача). Рассматриваемый случай может иметь место, например, при дренировании торфяников сточных и бессточных котловин, а также некоторых месторождений водораздельного залегания. Если соотношение сторон дренируемого месторождения $L/B \leqslant 2$, то его площадь приводится к площади круга с радиусом $R = \sqrt{\omega/\pi}$, где ω — площадь, ограниченная реальным контуром.

Пусть в районе месторождения имеется бассейн грунтовых вод. Водовмещающие породы имеют на периферии торфяника коэффициент фильтрации k_2^*, а под ним водоносный пласт (фиг. 3) мощностью T_2 с коэффициентом фильтрации k_2. Естественный уровень грунтовых вод в торфяной залежи залегает на расстоянии H_0 от плоскости заложения дрен; его отметка соответствует напору в подстилающем водоносном горизонте. Рассмотрение баланса расходов в последнем дает уравнение

$$\frac{d^2h_2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dh_2}{dr} - \alpha^2 (h_2 - H^\circ) = 0 \qquad (2.1)$$



Фиг. 3

В общем решении $h_2 - H^\circ = C_1 I_0(\alpha r) + C_2 K_0(\alpha r)$ этого уравнения, где $I_0(\alpha r)$ и $K_0(\alpha r)$ — модифицированные функции Бесселя нулевого порядка первого и второго рода, постоянная $C_2 = 0$, как это видно из очевидного условия $dh_2/dr = 0$ при $r = 0$. Постоянная C_1 определяется из условия на границе $h_2 = h_2(R, t)$; получим

$$h_2(r, t) - H^\circ = [h_2(R, t) - H^\circ]\,\frac{I_0(\alpha r)}{I_0(\alpha R)} \qquad (2.2)$$

Неустановившаяся фильтрация во внешней области ($R \leqslant r < \infty$) описывается дифференциальным уравнением

$$a\left(\frac{\partial^2 H_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_2}{\partial r}\right) = \frac{\partial H_2}{\partial t} \qquad \left(a = \frac{k_2^* H_m}{\delta}\right) \qquad (2.3)$$

Здесь H_m — средняя мощность потока грунтовых вод во внешней области, которая может быть принята равной $H_m = T_2 + m_0 + T_1 + H_0$.

Вводя новую переменную $u = H_2 - H_0$, представим (2.3) в виде

$$a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (2.4)$$

Условия однозначности, из которых третье формулируется на тех же началах, что и для плоской задачи, имеют вид

$$u(r, 0) = 0, \qquad \lim u(r, t) = 0 \quad \text{при } r \to \infty$$

$$\frac{\partial u(R,t)}{\partial r} - \frac{k_2^*}{k_2}\,\alpha\,\frac{I_1(\alpha R)}{I_0(\alpha R)}\,[u(R,t) - H^\circ] = 0 \qquad (2.5)$$

Применив к уравнению (2.4) преобразование Лапласа, получим

$$U''(r, p) + \frac{1}{r}U'(r, p) - \frac{p}{a}U = 0 \qquad \left(U(r, p) = \int\limits_0^\infty u(r, t)\,e^{-pt}\,dt\right) \qquad (2.6)$$

Общее решение уравнения (2.6) имеет вид [4]

$$U(r, p) = C_3 I_0\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\, r\right) + C_4 K_0\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\, r\right) \tag{2.7}$$

Здесь следует принять $C_3 = 0$, так как

$$I_0\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\, r\right) \to \infty\,, \quad K_0\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\, r\right) \to 0 \quad \text{при } r \to \infty$$

Переходя к изображениям $U(R, p) \doteqdot u(R, p)$ в третьем граничном условии (2.5)

$$U'(R, p) - \frac{k_2^*}{k_2}\alpha \frac{I_1(\alpha R)}{I_0(\alpha R)}\left[U(R, p) - \frac{H^\circ}{p}\right] = 0 \tag{2.8}$$

найдем постоянную

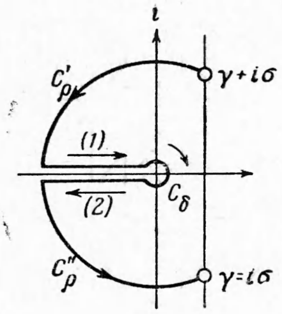
$$C_4 = \frac{H^\circ}{p}\left[K_0\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\, R\right) + \frac{k_2 I_0(\alpha R)}{\alpha k_2^* I_1(\alpha R)}\sqrt{\frac{p}{a}}\, K_1\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\, R\right)\right]^{-1}$$

С учетом постоянных решение уравнения (2.6) имеет вид

$$U(r, p) = \frac{H^\circ}{p}\,\frac{K_0(\beta r)}{K_0(\beta R) + \beta / m K_1(\beta R)} \qquad \left(m = \alpha \frac{k_2^*}{k_2}\frac{I_1(\alpha R)}{I_0(\alpha R)},\ \beta = \sqrt{\frac{p}{a}}\right) \tag{2.9}$$

Оригинал изображения (2.9) по формуле обращения Римана — Меллина будет

$$u(r, t) = \frac{H^\circ}{2\pi i}\int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty}\frac{K_0(\beta r)\, e^{pt}\, dp}{p\,[K_0(\beta R) + \beta / m K_1(\beta R)]}$$



Фиг. 4

Введем в рассмотрение замкнутый контур (фиг. 4), составленный из отрезка $(\gamma - i\sigma, \gamma + i\sigma)$, дуг C_ρ' и C_ρ'' окружности $|p| = \rho$, двубережного разреза (*1*), (*2*) и окружности $c_\delta\,(|p| = \varepsilon)$. Внутри этого контура подынтегральная функция аналитична и однозначна, поэтому по теореме Коши интеграл вдоль отрезка $(\gamma - i\sigma,\ \gamma + i\sigma)$ можно заменить интегралом вдоль остальной части контура (направление интегрирования показано стрелками).

Так как $t > 0$, то на дугах C_ρ' и C_ρ'' подынтегральная функция стремится к нулю при $\rho \to \infty$; к этому же пределу по лемме Жордана стремится рассматриваемый интеграл.

Найдем интеграл по малой окружности $c_\delta\,(p = \varepsilon \exp i\varphi)$, для чего при $\varepsilon \to 0\,(p \to 0)$ воспользуемся разложением функций Макдональда в ряды

$$K_0(z) = -\left(\ln \frac{1}{2} z + c\right) + \left[1 - \left(\ln \frac{1}{2} z + c\right)\right]\left(\frac{1}{2} z\right)^2 + \ldots$$

$$K_1(z) = \frac{1}{z} - \left[\frac{1}{2} - \left(\ln \frac{1}{2} z + c\right)\right]\frac{1}{2} z + \ldots$$

Получив при $|p| \to 0$ неопределенность вида ∞ / ∞, раскроем ее по правилу Лопиталя, дифференцируя по β, что дает

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{c_\varepsilon} = 1$$

Учитывая равенства

$$K_0(\pm iz) = \mp \frac{\pi}{2} i[J_0(z) \mp iY_0(z)], \qquad K_1(\pm iz) = -\frac{\pi}{2}[J_1(z) \mp iY_1(z)]$$

найдем интеграл по берегам разреза (1), (2)

$$\int\limits_{(1),(2)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty \frac{J_0(\beta r) - iY_0(\beta r)}{[J_0(\beta R) - iY_0(\beta R)] - \beta/m\,[J_1(\beta R) - iY_1(\beta R)]}\frac{d\rho}{\rho} -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty \frac{J_0(\beta r) + iY_0(\beta r)}{[J_0(\beta R) + iY_0(\beta R)] + \beta/m\,[J_1(\beta R) + iY_1(\beta R)]}\frac{d\rho}{\rho}$$

Собирая результаты и полагая $\mu = \beta R = \sqrt{\rho/a}R$, получим уравнение депрессионной поверхности грунтовых вод во внешней зоне

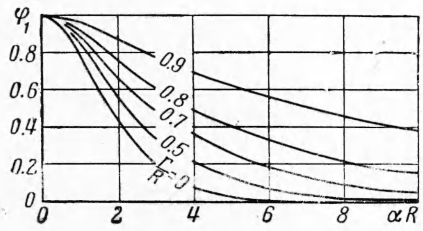
$$\frac{H_0 - H_2(r,t)}{H_0 - H^\circ} =$$

$$= 1 - \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{[Y_0(\mu')J_0(\mu) - J_0(\mu')Y_0(\mu)] + \mu/mR\,[Y_0(\mu')J_1(\mu) - J_0(\mu')Y_1(\mu)]}{[J_0(\mu) + \mu/mRJ_1(\mu)]^2 + [Y_0(\mu) + \mu/mRY_1(\mu)]^2} \times$$

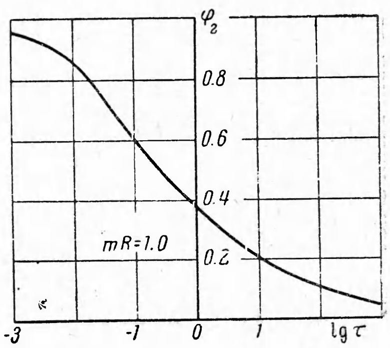
$$\times \exp(-\mu^2\tau)\frac{d\mu}{\mu} \qquad \left(\tau = \frac{at}{R^2},\ \mu' = \mu\frac{r}{R}\right)$$

После определения из последнего выражения $h_2(R,t)$ при $r = R$ и подстановки в (2.2) уравнение поверхности пьезометрических напоров подстилающего водоносного горизонта можно представить в виде

$$h_2(r,t) = H^\circ + (H_0 - H^\circ)\varphi_1\varphi_2 \quad (2.10)$$



Фиг. 5



Фиг. 6

Здесь введены вспомогательные функции понижения напора

$$\varphi_1 = \frac{I_0(\alpha r)}{I_0(\alpha R)}$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{mR}\frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^\infty \frac{\exp(-\mu^2\tau)}{[J_0(\mu) + \mu/mRJ_1(\mu)]^2 + [Y_0(\mu) + \mu/mRY_1(\mu)]^2}\frac{d\mu}{\mu}$$

Вид функции $\varphi_1 = \varphi_1(dR)$ представлен на фиг. 5. На фиг. 6 приведен вид функции $\varphi_2 = \varphi_2(\tau)$ при значении $mR = 1$.

При $\tau \to 0$, имея в виду асимптотические разложения функций Макдональда и полагая в (2.9) $r = R$, получим

$$u(R,t) \approx H^\circ mR\left\{2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} - \left(mR + \frac{1}{2}\right)\tau + \left[(mR)^2 + mR + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{3}{8}\right]\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\tau^{3/2} - \left[(mR)^3 + \frac{3}{2}(mR)^2 + mR + \frac{3}{8}\right]\frac{1}{2}\tau^2 + \cdots\right\}$$

Переход к оригиналу с учетом $H_2(R, t) = H_0 - u(R, t) = h_2(R, t)$ дает для напоров в подстилающем водоносном горизонте следующее приближенное выражение

$$h_2(r, t) = H^\circ + (H_0 - H^\circ)\varphi_1\{1 - mR\,[1.1284\sqrt{\tau} - (mR + 0.5)\tau + ((mR)^2 + mR + 0.375)\,0.752\tau^{3/2} - ((mR)^3 + 1.5(mR)^2 + mR + 0.375)\,0.5\tau^2 + \ldots]\}$$

Полученный ряд хорошо сходится при $mR < 1$ и $\tau < 0.25$.

Возвращаясь к структуре области дренирования, рассмотренной в первой задаче (фиг. 1), можно характеризовать течение во внешней области системой уравнений

$$k_1H_1^\circ\left(\frac{\partial^2 H_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_1}{\partial r}\right) - \frac{k_0}{m_0}(H_1 - H_2) = \delta\frac{\partial H_1}{\partial t} \qquad (2.11)$$

$$k_2T_2\left(\frac{d^2H_2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dH_2}{dr}\right) - \frac{k_0}{m_0}(H_1 - H_2) = 0 \qquad (2.12)$$

Решая (2.12) относительно H_1, подставляя в (2.11) и пренебрегая производными порядка выше второго, получим дифференциальное уравнение (2.3), но с новым значением коэффициента пьезопроводности

$$a_1 = (k_1H_1^\circ + k_2T_2)\,/\,\delta$$

Следовательно, для этого случая действительно выражение (2.10), только вместо τ надо положить $\tau_1 = a_1t\,/\,R^2$.

Среднее значение напора в верхнем слое H_{1m} находится из [2]

$$H_{1m}(t) = \eta f(\alpha_0, \tau_0) - (\eta - H_0)\,e^{-b_0t} f(0, \tau_0) \qquad \left(\eta = H_0 + \frac{\varepsilon m_0}{k_0}\right)$$

Здесь

$$f(\alpha_0, \tau_0) = 1 - \frac{\operatorname{th}\alpha_0}{\alpha_0} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2\sin\mu_n}{\mu_n^2 + \alpha_0^2}\exp\left[-(\mu_n^2 + \alpha_0^2)\,\tau_0\right]$$

$$f(0, \tau_0) = \lim_{\alpha_0\to 0} f(\alpha_0, \tau_0) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2\sin\mu_n}{\mu_n^2}\exp(-\mu_n^2\tau_0)$$

где

$$\mu_n = (2n - 1)\frac{\pi}{2}, \quad \alpha_0 = \sqrt{\frac{b_0}{a_0}}\,l, \quad \tau_0 = \frac{a_0t}{l^2} \qquad \left(a_0 = \frac{k_1H_{\text{ср}}}{\delta},\ b_0 = \frac{k_0}{\delta m_0}\right)$$

$2l$ — расстояние между дренами; ε — интенсивность инфильтрации.

Авторы с благодарностью отмечают полезность обсуждения ряда вопросов с Н. Н. Веригиным.

Калининский торфяной институт Поступила 26 VIII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. Гостехтеориздат, М., 1952.
2. Шержуков Б. С. Неустановившаяся фильтрация в горизонтальные дрены при осушении торфяных месторождений напорно-грунтового питания. ПМТФ, 1960, № 3.
3. Аверьянов С. Ф. Горизонтальный дренаж при борьбе с засолением орошаемых земель. М., Изд-во АН СССР, 1959.
4. Грей Э., Мэтьюз Г. Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. ИИЛ, 1953.