

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МИКРОКОНВЕКЦИИ В ОБЛАСТЯХ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ

УДК 532.517.013.4:563.252

О. Н. Гончарова

Алтайский государственный университет, 656099 Барнаул

1. Введение. Для описания свободной гравитационной или термокапиллярной конвекции традиционно используется система уравнений Обербека — Буссинеска. В результате анализа предположений, сделанных при выводе этих уравнений из точных уравнений механики сплошной среды, В. В. Пухначев [1] показал, что классическая модель не применима для изучения конвекции в областях малой протяженности, в слабых гравитационных или быстропеременных температурных полях. Интерес к новым моделям конвекции и необходимость замены традиционной модели при изучении микроконвекции в жидкостях отмечаются в [2]. На основе классической модели конвекции и новой модели В. В. Пухначева автором проведены численные исследования течения жидкости в областях с фиксированными границами под действием микроускорений, достижимых на орбитальной станции [3, 4]. Подтверждены качественные и количественные отличия в характеристиках течения. В новой модели микроконвекции уравнения, выражающие законы сохранения массы и импульса, выполняются точно, а уравнение энергии — асимптотически точно. При линейной зависимости удельного объема $1/\rho$ от температуры исходная система уравнений преобразуется к виду, в котором модифицированный вектор скорости становится соленидальным. Это позволяет ввести аналог функции тока для плоских и осесимметричных задач и выполнить расчеты конвективных течений в переменных функция тока — вихрь.

В данной работе численно исследуется стационарная двумерная гравитационно-термокапиллярная конвекция в кольцевых областях со свободной границей. В условиях невесомости и в случае, когда параметр, ответственный за деформацию свободной поверхности термокапиллярными силами (капиллярное число), довольно мал, рассматриваются недеформируемые свободные границы, приближенно определяемые как поверхности капиллярного равновесия. Поправка к свободной границе находится из динамического условия на свободной границе. Расчеты проведены с использованием методики, апробированной при изучении свободной конвекции и микроконвекции жидкостей в фиксированных областях.

2. Постановка задачи. Стационарная гравитационно-капиллярная конвекция исследуется в кольцевой области $0 < R_1 \leq r \leq R_2 < +\infty$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ для двух случаев:

1) $I = 0$, внутренняя окружность ($r = R_1$) — твердая граница с потоком тепла через нее, внешняя окружность ($r = R_2$) — свободная граница, предполагаемая теплоизолированной;

2) $I = 1$, внешняя окружность ($r = R_2$) — твердая граница с потоком тепла через нее, внутренняя окружность ($r = R_1$) — свободная граница, предполагаемая теплоизолированной.

Уравнения конвекции рассматриваются в безразмерной форме. При этом характерный размер, скорость, температуру и давление обозначим через $l = R_0 - R_1$, $\gamma T_0/\mu$, T_0 и $\gamma T_0/l$, где γ — температурный коэффициент поверхностного натяжения, T_0 — характерный перепад температур, μ — динамическая вязкость (см., например, [5]).

• *Классическая модель Обербека — Буссинеска (ОБМ).* Функция тока ψ , завихренность ω , температура T в полярных координатах (r, θ) удовлетворяют следующей системе

уравнений:

$$\Delta\omega - \text{Re}\left(v\frac{\partial\omega}{\partial r} + \frac{u}{r}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\right) - \frac{\text{Gr}}{\text{Ma}}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\cos\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial\varphi}\sin\varphi\right) = 0; \quad (2.1)$$

$$\Delta\psi + \omega = 0; \quad (2.2)$$

$$\Delta T - \text{Ma}\left(v\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{u}{r}\frac{\partial T}{\partial\varphi}\right) = 0. \quad (2.3)$$

Здесь $\text{Re} = l\gamma T_0/\mu\nu$, $\text{Ma} = \text{Re Pr}$, $\text{Pr} = \nu/\chi$, $\text{Gr} = g\beta T_0 l^3/\nu\chi$ — числа Рейнольдса, Марангони, Прандтля и Грасгофа; ν — кинематическая вязкость, χ — коэффициент температуропроводности, g — ускорение силы тяжести, β — объемный коэффициент температурного расширения; произведение $\beta T_0 = \text{Gr}/\text{Pu}$ ($\text{Pu} = gl^3/\nu\chi$ — число Пухначева); $u = r^{-1}\partial\psi/\partial\varphi$ — радиальная компонента скорости; $v = -\partial\psi/\partial r$ — тангенциальная компонента скорости.

Граничные условия при $I = 0$ следующие:

$$r = R_1 : \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = H \cos\varphi \quad (H = \text{const}),$$

$$r = R_2 : \quad \psi = 0, \quad R_2\omega + 2\frac{\partial\psi}{\partial r} = -\frac{\partial T}{\partial\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0,$$

при $I = 1$

$$r = R_1 : \quad \psi = 0, \quad R_1\omega + 2\frac{\partial\psi}{\partial r} = -\frac{\partial T}{\partial\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0,$$

$$r = R_2 : \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = H \cos\varphi.$$

• *Новая модель* (НМ). Безразмерные уравнения для функций ψ , ω , T в полярных координатах запишем как

$$(1 + \beta T_0 T)\Delta\omega - \text{Re}\left(v\frac{\partial\omega}{\partial r} + \frac{u}{r}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\right) + \beta T_0\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial\varphi}\frac{\partial q}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial q}{\partial\varphi} + \left[\frac{\partial T}{\partial r}\left(\Delta u - \frac{u}{r^2}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial\varphi}\left(\Delta v - \frac{v}{r^2}\right)\right]\right\} - \frac{\text{Gr}}{\text{Ma}}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\cos\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial\varphi}\sin\varphi\right) - \frac{\beta T_0}{\text{Pr}}\left\{\omega\Delta T + \frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial\omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial T}{\partial\varphi}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\right\} - \frac{\beta^2 T_0^2}{\text{MaPr}}\left\{\frac{1}{r}\left(-\frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial\Delta T}{\partial\varphi} + \frac{\partial T}{\partial\varphi}\frac{\partial\Delta T}{\partial r}\right)\right\} = 0, \quad (2.4)$$

$$\Delta\psi + \omega = 0; \quad (2.5)$$

$$(1 + \beta T_0 T)\Delta T - \text{Ma}\left(v\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{u}{r}\frac{\partial T}{\partial\varphi}\right) - \beta T_0|\nabla T|^2 = 0. \quad (2.6)$$

Здесь ψ — модифицированная функция тока [1]. Граничные условия в НМ при $I = 0$ имеют вид

$$r = R_1 : \quad \psi = -R_1\frac{\beta T_0}{\text{Ma}}H \sin\varphi, \quad \frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{R_1}\frac{\beta T_0}{\text{Ma}}\frac{\partial T}{\partial\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = H \cos\varphi,$$

$$r = R_2 : \quad \psi = 0, \quad \omega + \frac{2}{R_2}\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial\varphi}\left(2\frac{\beta T_0}{\text{Ma}}\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_2}\right), \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0,$$

при $I = 1$

$$r = R_1: \quad \psi = 0, \quad \omega + \frac{2}{R_1} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial \varphi} \left(\gamma \frac{\beta T_0}{\text{Ma}} \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_1} \right), \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0,$$

$$r = R_2: \quad \psi = -R_2 \frac{\beta T_0}{\text{Ma}} H \sin \varphi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{R_2} \frac{\beta T_0}{\text{Ma}} \frac{\partial T}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = H \cos \varphi.$$

Поправки к свободной поверхности могут быть рассчитаны следующим образом. Пусть $h(\varphi)$ — отклонение свободной поверхности от $r = R_1$ (или $r = R_2$), тогда при $\text{Ca} = \gamma T_0 / \sigma_0 \rightarrow 0$, $\text{Gr} / \text{Ma}(\beta T_0) \rightarrow 0$ условие баланса нормальных напряжений на внутренней (внешней) границе дает

$$\delta P - \gamma \frac{\partial v}{\partial r} = \pm \left\{ - (T - T_*) \frac{1}{R} - \frac{1}{\text{Ca}} \frac{(h + h'')}{F^2} \right\} - \frac{\text{Gr}}{\text{Ma}(\beta T_0)} R \sin \varphi, \quad R = R_1(R_2),$$

где $(\cdot)' = d/d\varphi$; δP — отклонение давления от равновесного уровня $\delta P_0 = 1/(\text{Ca}R)$, когда $\gamma = 0$, $g = 0$.

3. Численное исследование. Вводится разностная сетка $r_n = R_1 + (n - 1)h$ ($n = 1, \dots, N + 1$), $h = (R_2 - R_1)/N$, $\varphi_m = (m - 1)\alpha$ ($m = 1, \dots, M + 1$), $\alpha = 2\pi/M$, $f_{n,m} = f(r_n, \varphi_m) = f_{n,m+M}$.

Численное исследование поставленных задач для систем уравнений (2.1)–(2.3) и (2.4)–(2.6) проводится методом установления с использованием продольно-поперечной конечно-разностной схемы. Для уравнений (2.1), (2.3) или (2.4), (2.6) эта схема может быть записана в следующем общем виде:

$$(U^{k+1/2} - U^k)/0,5\tau = \lambda_k [\Lambda_1 U^k + \Lambda_2 U^{k+1/2} + F^{k+1/2}],$$

$$(U^{k+1} - U^{k+1/2})/0,5\tau = \lambda_k [\Lambda_1 U^{k+1} + \Lambda_2 U^{k+1/2} + F^{k+1/2}].$$

Здесь $U = (\omega/T)$; $U^k = U(t^k)$; Λ_1 и Λ_2 — разностные операторы, аппроксимирующие соответственно дифференциальные операторы

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2};$$

λ_k — итерационный параметр.

Для решения уравнений (2.2) или (2.5) на каждом итерационном шаге $t_k = k\tau$ ($k = 1, \dots$) применяется итерационная схема

$$(\psi^{s+1/2} - \psi^s)/0,5\tau = \lambda_s (\Lambda_1 \psi^{s+1/2} + \Lambda_2 \psi^s + \omega^{s+1/2}),$$

$$(\psi^{s+1} - \psi^{s+1/2})/0,5\tau = \lambda_s (\Lambda_1 \psi^{s+1/2} + \Lambda_2 \psi^{s+1} + \omega^{s+1/2})$$

(λ_s — итерационный параметр).

Для нахождения $T^{k+1/2}$, $\omega^{k+1/2}$ и ψ^{s+1} используется циклическая прогонка, а ω^{k+1} , $\psi^{s+1/2}$ — прогонка по параметру, предложенная А. Ф. Воеводиным [6]. Согласно [6] запишем представления $\omega_{n,m} = P_{n,m}\omega_{N+1,m} + Q_{n,m}\omega_{1,m} + R_{n,m}$, $\psi_{n,m} = \bar{P}_{n,m}\omega_{N+1,m} + \bar{Q}_{n,m}\omega_{1,m} + \bar{R}_{n,m}$.

4. Результаты численного анализа. Расчеты выполняются для кремния, глицерина или стекла на сетке 21×21 и 41×41 . Внутренний радиус $R_1 = 0,1$ см (для некоторых вариантов $R_1 = 0,5$ см) и внешний радиус $R_2 = 1,1$ см. В табл. 1 приведены безразмерные параметры.

Когда капиллярное число Ca изменяется в пределах $10^{-5} \leq \text{Ca} \leq 10^{-2}$ и $\gamma \sim 10^{-1}$ г/(с²·К) (см., например, [7]), расчеты по двум моделям дают лишь некоторые количественные различия в характеристиках течения. На рис. 1 приводятся поля скоростей и семейства изотерм для глицерина при $\text{Pr} = 10^4$, $\text{Ma} = 3 \cdot 10^2$ ($\text{Re} = 3 \cdot 10^{-2}$).

Таблица 1

Вещество	Pr	Ma	Re	Gr	Pu	βT_0	Gr/Ma	$\beta T_0/Pr$	$\beta^2 T_0^2/MaPr$
Глицерин	10^4	$3 \cdot 10^2$	$3 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-3}$	10^{-1}	$1,5 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$1,5 \cdot 10^{-6}$	10^{-10}
	10^4	1	10^{-4}	$0,5 \cdot 10^{-5}$	10^{-1}	$0,5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$0,5 \cdot 10^{-8}$	10^{-12}
Стекло	10^4	10	10^{-3}	$0,5 \cdot 10^{-6}$	10^{-2}	$4,5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-8}$	$4,5 \cdot 10^{-9}$	10^{-14}
Кремний	$4 \cdot 10^{-3}$	1	$2,5 \cdot 10^2$	$0,3 \cdot 10^{-7}$	1	$0,3 \cdot 10^{-7}$	$0,3 \cdot 10^{-7}$	$0,8 \cdot 10^{-5}$	10^{-13}

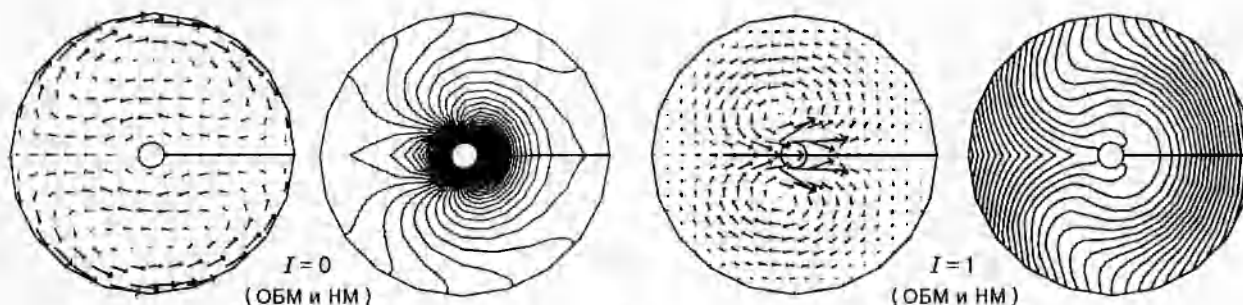


Рис. 1

Вычисления показывают, что скорости, рассчитанные по НМ, примерно на 20 % превышают скорости, рассчитанные по модели ОБМ (сравниваются абсолютные величины).

Для стекла и особенно кремния контуры изотерм деформированы меньше и напоминают по виду изотермы в расчетах конвективных течений в областях с фиксированными границами [4]. На рис. 2 демонстрируются поля скоростей и изотермы кремния при $Pr = 4 \cdot 10^{-3}$, $Ma = 1$ ($Re = 2,5 \cdot 10^2$). Центры вихрей смещены вправо.

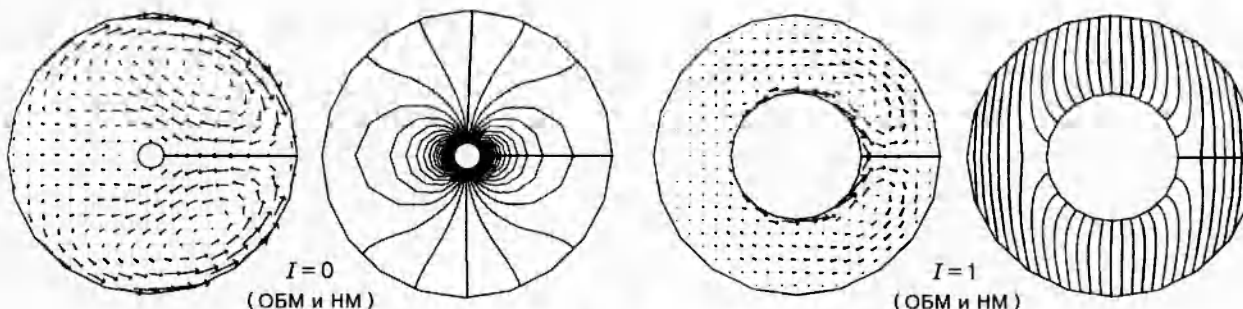


Рис. 2

Для всех случаев характерна двухвихревая структура поля скоростей с некоторым смещением центра вихрей влево для глицерина.

Некоторые количественные и качественные отличия между расчетами, проведенными по двум моделям, существуют, когда $10^{-5} \leq Ca \leq 10^{-4}$ и $\gamma \sim 10^{-3}$ и 10^{-4} г/(с²·К). Параметры для численного исследования даются в табл. 2.

На рис. 3 приведены поля скоростей при $Pr = 10^4$, $Ma = 1$ ($Re = 10^{-4}$), рассчитанные по двум моделям. Для глицерина в случае граничных условий при $I = 0$ (внешний радиус — свободная граница) НМ дает двухвихревую структуру в каждой из полукруговых областей, при $I = 1$ обе модели имеют одинаковую качественную картину течения и лишь некоторые количественные отличия.

Следует заметить, что проблема устойчивости конвекции в областях со свободными

Таблица 2

Вещество	Pr	Ma	Re	Gr	Pu	βT_0	Gr/Ma	$\beta T_0/Pr$	$\beta^2 T_0^2 / Ma Pr$
Глицерин	10^4	1	10^{-4}	$1,5 \cdot 10^{-3}$	10^{-1}	$1,5 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$1,5 \cdot 10^{-6}$	$1,8 \cdot 10^{-8}$
Кремний	$4 \cdot 10^{-3}$	1	$2,5 \cdot 10^2$	$2 \cdot 10^{-4}$	1	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-2}$	10^{-5}

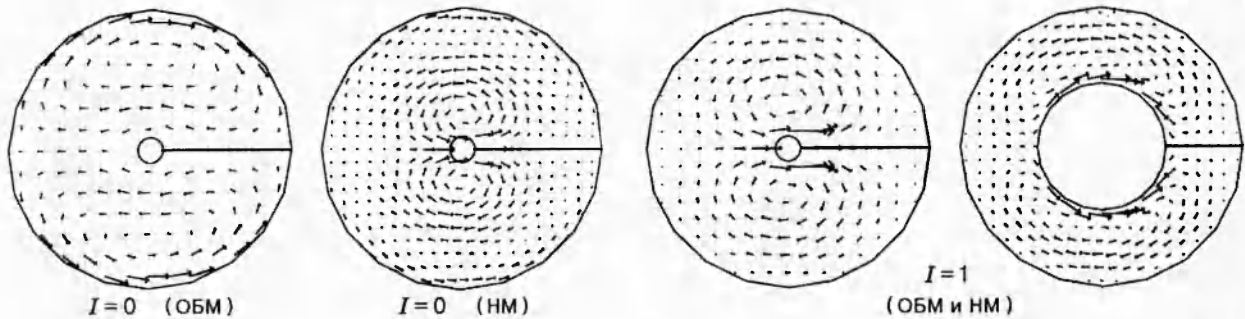


Рис. 3

границами представляет значительный интерес (см., например, [8]). Результаты расчетов, приведенные в [8], показывают, что неустойчивость может проявиться при больших значениях Re и Ma , чем те, которые достигнуты в настоящей работе.

Автор выражает благодарность сотрудникам Института прикладной математики (Университет г. Фрайбурга, Германия) за использование программы GRAPE визуализации численных исследований. Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Гумбольдта (Германия) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-01348а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Пухначев В. В. Модель конвективного движения при пониженной гравитации // Моделирование в механике / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т теорет. и прикл. механики. 1992. Т. 6(23), № 4. С. 47–56.
2. Perera P. S., Sekerka R. F. Non-solenoidal flows in a liquid diffusion couple // Phys. Fluids. 1997. V. 9. P. 376–391.
3. Гончарова О. Н. Численное исследование уравнений конвекции изотермически несжимаемой жидкости // Вычислительные технологии / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т вычисл. технологий. 1992. Вып. 2(5). С. 95–101.
4. Гончарова О. Н. Микроконвекция в слабых гравитационных полях: сравнение двух моделей при численном исследовании // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 2. С. 58–63.
5. Zebib A., Homsy G. M., Meiburg E. High Marangoni number convection in a square cavity // Phys. Fluids. 1985. V. 28, N 12. P. 3467–3476.
6. Воеводин А. Ф., Шугрин С. М. Методы решения одномерных эволюционных систем. Новосибирск: Наука, 1993.
7. Пухначев В. В. Термокапиллярная конвекция в слабых силовых полях. Новосибирск, 1988 (Препр./ ИТ СО АН СССР; № 178-88).
8. Мышкис А. Д., Бабский В. Г., Копачевский Н. Д. и др. Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976.

Поступила в редакцию 12/1 1996 г.