К ВАРИАЦИОННЫМ МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О ДЕФОРМИРОВАНИИ И УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Г. В. Иванов (*Новосибирск*)

Вариационные методы решения задач о деформировании и устойчивости пластин и оболочек в условиях ползучести рассматривались в работах [1,2]. В [1] указано вариационное уравнение при условии варьирования скоростей напряжений и скоростей перемещений. В [2] выведено вариационное уравнение при условии варьирования только скоростей перемещений.

В. И. Розенблюмом [3] (см. также [4]) вариационным методом решена задача об устойчивости продольно сжатого стержня, имеющего начальный (в недеформированном состоянии) прогиб. При этом варьировались напряжения и смещения, удовлетворяющие уравнениям равновесия и граничным условиям. Ниже выводится аналогичное вариационное уравнение для пологой круговой цилиндрической панели (фигура). Для пластин и замкнутых цилиндрических оболочек оно имеет тот же вид.

1. В фиксированный момент времени t действительные напряжения σ_x, σ_y, τ и смещения u, v, w в панели связаны между собою и со скоростями напряжений, скоростями смещений уравнениями [4,5]:

$$\frac{\partial T_x}{\partial x}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial T_y}{\partial y}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}+T_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+T_y\left(\frac{1}{R}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+2T_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+q=0$$

$$\frac{\partial \dot T_x}{\partial x}+\frac{\partial \dot T_{xy}}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial \dot T_y}{\partial y}+\frac{\partial \dot T_{xy}}{\partial x}=0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial^2 \dot M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 \dot H}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 \dot M_y}{\partial y^2}+\dot T_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dot T_y\left(\frac{1}{R}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+2\dot T_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+$$

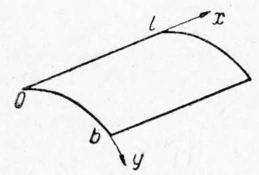
$$+T_x\frac{\partial^2 \dot w}{\partial x^2}+T_y\frac{\partial^2 \dot w}{\partial y^2}+2T_{xy}\frac{\partial^2 \dot w}{\partial x\,\partial y}+\dot q=0$$

$$\dot\varepsilon_x=\frac{\partial}{\partial \sigma_x}\left(\Lambda+\frac{\partial \Pi}{\partial t}\right), \qquad \dot\varepsilon_y=\frac{\partial}{\partial \sigma_y}\left(\Lambda+\frac{\partial \Pi}{\partial t}\right), \qquad \dot\gamma=\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\Lambda+\frac{\partial \Pi}{\partial t}\right) \tag{1.2}$$

$$\dot\varepsilon_x=\frac{\partial \dot u}{\partial x}+\frac{\partial \dot w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}-z\frac{\partial^2 \dot w}{\partial x^2}, \qquad \dot\varepsilon_y=\frac{\partial \dot v}{\partial y}+\frac{\partial \dot w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}-z\frac{\partial^2 \dot w}{\partial y^2}-\frac{1}{R}\dot w$$

$$\dot\gamma=\frac{\partial \dot u}{\partial y}+\frac{\partial \dot v}{\partial x}+\frac{\partial \dot w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial \dot w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}-z\frac{\partial^2 \dot w}{\partial x\,\partial y} \tag{1.3}$$

Принятая здесь криволинейная система координат для точек срединной поверхности указана на фигуре, T_x, T_y, T_{xy}, M_x, M_y, H — усилия и моменты в срединной поверхности, R — радиус панели, w — «полный» прогиб, т. е. сумма начального (в недеформированном состоянии) прогиба и прогиба, возникшего в процессе деформации, q — интенсивность поверхностной нагрузки, точка означает дифференцирование по времени, Λ — функция напряжений и времени, Π — функция напряжений (энергия упругих деформаций), z — координата точек панели, отсчитываемая от срединной поверхности в сторону внутренней нормали.



Кроме указанных выше уравнений, действительные напряжения и смещения в панели удовлетворяют заданным условиям на кромках $x=0$, l, $y=0$, b (фигура). Полагаем, что эти условия заданы в усилиях, моментах и нулевых смещениях. Например, на кромках $x=0$, $x=l$ заданы либо

$$M_x, \quad T_x, \quad T_{xy}, \quad T_x\frac{\partial w}{\partial x}+T_{xy}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial M_x}{\partial x}+2\frac{\partial H}{\partial y}$$

либо, соответственно,

$$dw\,/\,dx=0, \qquad u=0, \qquad v=0, \qquad w=0$$

Случаи, когда на кромках панели вместо усилий и моментов заданы ненулевые скорости смещений, не рассматриваются.

2. Сопоставим в фиксированный момент времени t истинное напряженное и деформированное состояние с другим, характеризующимся теми же скоростями напряжений и скоростями смещений, но другими напряжениями и смещениями, именно напряжениями $\sigma_x + \delta\sigma_x$, $\sigma_y + \delta\sigma_y$, $\tau + \delta\tau$, и смещениями $u + \delta u$, $v + \delta v$, $w + \delta w$, бесконечно близкими к действительным, удовлетворяющими уравнениям равновесия, уравнениям равновесия в скоростях и заданным граничным условиям. Эти напряжения и смещения будем называть допустимыми.

Подставляя допустимые напряжения и смещения в уравнения равновесия, в уравнения равновесия в скоростях, сохраняя в них бесконечно малые величины только первого порядка, находим, что вариации напряжений и смещений должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial x}\delta T_x + \frac{\partial}{\partial y}\delta T_{xy} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\delta T_y + \frac{\partial}{\partial x}\delta T_{xy} = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\delta M_x + 2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\delta H + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\delta M_y + \delta T_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \delta T_y\left(\frac{1}{R} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) +$$

$$+ 2\delta T_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + T_x\delta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_y\delta\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2T_{xy}\delta\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} = 0 \tag{2.1}$$

$$\delta T_x\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} + \delta T_y\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2} + 2\delta T_{xy}\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x\,\partial y} + \dot{T}_x\delta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dot{T}_y\delta\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\dot{T}_{xy}\delta\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} = 0 \tag{2.2}$$

Согласно (1.3) вариации скоростей деформаций зависят от вариации только смещения w

$$\delta\dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial \dot{w}}{\partial x}\delta\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \delta\dot{\varepsilon}_y = \frac{\partial \dot{w}}{\partial y}\delta\frac{\partial w}{\partial y}, \qquad \delta\dot{\gamma} = \frac{\partial \dot{w}}{\partial x}\delta\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y}\delta\frac{\partial w}{\partial x} \tag{2.3}$$

3. Из того, что действительные напряжения и смещения удовлетворяют уравнениям равновесия и граничным условиям, следует (см., например, [5], § 7)

$$\int\limits_V (\sigma_x\dot{\varepsilon}_x + \sigma_y\dot{\varepsilon}_y + \tau\dot{\gamma})\,dV = A$$

где V — занимаемый панелью объем, A — мощность приложенных к панели внешних сил. Допустимые напряжения и смещения также удовлетворяют уравнениям равновесия и заданным граничным условиям (напомним, что эти условия считаются заданными в усилиях, моментах и нулевых смещениях; случаи, когда на кромках панели вместо усилий и моментов заданы ненулевые скорости смещений, не рассматриваются). Поэтому

$$\int\limits_V [(\sigma_x + \delta\sigma_x)(\dot{\varepsilon}_x + \delta\dot{\varepsilon}_x) + (\sigma_y + \delta\sigma_y)(\dot{\varepsilon}_y + \delta\dot{\varepsilon}_y) + (\tau + \delta\tau)(\dot{\gamma} + \delta\dot{\gamma})]\,dV = A \tag{3.1}$$

т. е. мощность деформаций в классе допустимых напряжений и смещений стационарна. Опуская в (3.1) произведения вариаций как бесконечно малые величины второго порядка, находим

$$\int\limits_V (\sigma_x\delta\dot{\varepsilon}_x + \sigma_y\delta\dot{\varepsilon}_y + \tau\delta\dot{\gamma})\,dV + \int\limits_V (\dot{\varepsilon}_x\delta\sigma_x + \dot{\varepsilon}_y\delta\sigma_y + \dot{\gamma}\delta\tau)\,dV = 0 \tag{3.2}$$

В справедливости (3.2) нетрудно убедиться и непосредственно интегрированием по частям с использованием уравнений (2.1), соотношений (2.3).

4. Из уравнений (1.2) следует, что второе слагаемое в (3.2) есть вариация интеграла

$$\int\limits_V \left(\Lambda + \frac{\partial \Pi}{\partial t}\right) dV$$

При определенных условиях и первое слагаемое в (3.2) также есть вариация некоторого выражения.

Используя первые два из уравнений (2.1) и первые два из уравнений (1.1), запишем (2.2) в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta T_x\frac{\partial \dot{w}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\delta T_y\frac{\partial \dot{w}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\delta T_{xy}\frac{\partial \dot{w}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\delta T_{xy}\frac{\partial \dot{w}}{\partial x}\right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x}\left(\dot{T}_x\delta\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\dot{T}_y\delta\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\dot{T}_{xy}\delta\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\dot{T}_{xy}\delta\frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0 \tag{4.1}$$

Умножая (4.1) на w и интегрируя по площади срединной поверхности Ω, находим

$$\int\limits_{\Omega}\left[\delta T_x \frac{\partial \dot{w}}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \delta T_y \frac{\partial \dot{w}}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} + \delta T_{xy}\left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \right.$$

$$\left. + \dot{T}_x \frac{\partial w}{\partial x}\delta\frac{\partial w}{\partial x} + \dot{T}_y \frac{\partial w}{\partial y}\delta\frac{\partial w}{\partial y} + \dot{T}_{xy}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\delta\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}\delta\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]d\Omega =$$

$$= \int\limits_0^l \left[w\delta\frac{d}{dt}\left(T_y\frac{\partial w}{\partial y} + T_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]_{y=0}^{y=b} dx + \int\limits_0^b \left[w\delta\frac{d}{dt}\left(T_x\frac{\partial w}{\partial x} + T_{xy}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]_{x=0}^{x=l} dy \qquad (4.2)$$

Используя (2.3), (4.2), первое слагаемое в (3.2) можно записать в виде

$$\int\limits_V (\sigma_x\delta\dot{\varepsilon}_x + \sigma_y\delta\dot{\varepsilon}_y + \tau\delta\dot{\gamma})\,dv =$$

$$= \frac{1}{2}\delta\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\left[T_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + T_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 2T_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right]d\Omega -$$

$$- \int\limits_0^l w\delta\frac{d}{dt}\left(T_y\frac{\partial w}{\partial y} + T_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\Bigg]_{y=0}^{y=b} dx - \int\limits_0^b \left[w\delta\frac{d}{dt}\left(T_x\frac{\partial w}{\partial x} + T_{xy}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]_{x=0}^{x=l} dy \qquad (4.3)$$

Если граничные условия таковы, что контурный интеграл в (4.3) исчезает (например, в случае, когда на всех краях панели $w = 0$), то первое слагаемое в (3.2) есть полная вариация и (3.2) принимает вид

$$\delta\Phi = \delta\left\{\int\limits_V\left(\Lambda + \frac{\partial \Pi}{\partial t}\right)dv + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\left[T_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + T_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 2T_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right]d\Omega\right\} = 0 \qquad (4.4)$$

При этих условиях среди всех допустимых напряжений и смещений истинное распределение напряжений и смещений характеризуется стационарностью функционала Φ.

Нетрудно усмотреть, что определение прогибов при помощи вариационного уравнения (4.4) сводится к интегрированию системы разрешенных относительно производных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Увеличение числа параметров при задании класса допустимых напряжений и смещений сказывается только на увеличении числа уравнений системы, подлежащей интегрированию.

Поступила 9 IV 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Sanders J. L., McComb H. G., Schlechte F. R. A Variational Theorem for Creep With Applications to Plates and Columns. NACA Rep. 1342, 1958.
2. Терегулов И. Г. К вариационным методам решения задач установившейся ползучести пластин и оболочек в случае конечных перемещений. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 3.
3. Розенблюм В. И. Устойчивость сжатого стержня в состоянии ползучести. Инж. сб., 1954, т. 18.
4. Качанов Л. М. Теория ползучести. Физматгиз, 1960.
5. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. Гостехиздат, 1956.