ся незатухающие прогрессивные волны; когда $k \geqslant \omega^2/g$, волновая картина меняется: на фоне затухающих как $r^{-1/2}$ волн распространяются расходящиеся волны (порядок амплитуды $r^{-1/3}$).

**Приложение.**

1. Обозначения к формулам (2), (3):

$$B_k^{(\chi)} = \frac{(-1)^{n-k}}{(p+s_c)^{n-1}} \prod_{\sigma=1}^{n-1} (p^2 \sin \sigma\beta + q^2)^{-1/2} \prod_{\sigma=n-k+1}^{n-1} (p^2 \sin \sigma^2\beta + q^2) \times$$

$$\times \prod_{\sigma=1}^{n-k} \operatorname{ctg} \sigma\beta \left[\frac{1}{2} p^2 \sin 2\sigma\beta + (-1)^\chi iqs_c\right],$$

$$B_{kl} = (-1)^{n-k} \prod_{\sigma=n-k+1}^{n-1} \sin(\sigma-l)\beta \sin(\sigma+l)\beta \times$$

$$\times \prod_{\sigma=1}^{n-k} \operatorname{ctg} \sigma\beta \sin(\sigma+l)\beta \cos(\sigma-l)\beta,$$

$$\varepsilon_l = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \left\{2(1+\cos l\beta)^{2(n-1)} \sin l\beta \prod_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma\neq l}}^{n-1} \sin(\sigma+l)\beta \sin(\sigma-l)\beta\right\}^{-1},$$

$$A_0 = -(s_c \sin a_{kj} + (-1)^\chi iq \cos a_{kj}), \quad A_l = -p \sin(a_{kj} + l\beta),$$

$$a_{kj} = 2(k-j)\beta, \quad s_c = \sqrt{p^2+q^2}, \quad p = s_c \cos\lambda, \quad q = s_c \sin\lambda,$$

$$I = \exp\left\{i \frac{\pi}{4} (n-1) [(-1)^\chi + (-1)^{\chi'}]\right\}.$$

2. Операторы $D^0$, $D^1$ — операторы по условию: $D^0$ — суммирование производится по тем индексам, для которых $-(-1)^\chi \cos a_{kj} > 0$, $D^1$ — условие $(-1)^\chi \cos a_{kj} > 0$.

### ЛИТЕРАТУРА


1. **Сретенский Л. Н.** Теория волновых движений жидкости.— М.: Наука, 1977.
2. **Черкесов Л. В.** Гидродинамика поверхностных и внутренних волн.— Киев: Наук. думка, 1976.
3. **Дорфман А. А.** Пространственная задача о неустановившихся волновых движениях жидкости в области переменной глубины // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1986.— № 2.
4. **Федорюк М. В.** Метод перевала.— М.: Наука, 1977.
5. **Черкесов Л. В.** Развитие волн под действием двух систем перемещающихся давлений // Тр. МГИ.— 1961.— № 24.



*г. Ленинград* *Поступила 16/VII 1990 г.*


---


УДК 536.25 : 517.958



*В. И. Юдович*


# О ГРАНИЦЕ МОНОТОННОЙ И КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ КОНВЕКТИВНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ


Рассматривается задача о малых колебаниях теплопроводной жидкости, заполняющей горизонтальный слой, вблизи механического равновесия. Предполагается, что слой нагревается сверху, так что жидкость стратифицирована устойчиво. Как известно [1, 2], при достаточно большой вязкости все моды затухают монотонно (декременты положительны), а если вязкость мала, то имеются и колебательные моды, которым соответствуют комплексные декременты с положительной действительной и ненулевой мнимой частью.

В данной работе изучается предельный случай бесконечно больших чисел Прандтля $\sigma$ и Рэлея R, причем число Грасгофа $G = R/\sigma$ конечно и фиксировано. Дело сводится к анализу спектральной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка, нелинейной относительно спектрального параметра — декремента $\lambda$. Она содержит в качестве дополнительных параметров волновое число $\alpha$ и G. При фиксированных $\alpha$ и G, как нетрудно установить, существует счетное множество $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ собственных значений. При этом все они вещественны, если G достаточно мало. Когда G, возрастая, пересекает определенные критические значения, одна за другой появляются пары комплексно-сопряженных собственных чисел $\lambda$, которые, как обычно, определяются из соответствующего трансцендентного уравнения. Для его анализа применяется метод одномерных возмущений (возмущений краевого условия), который в задаче конвекции применялся Джеффрисом [3]. Он приводит попросту к разложению левой части трансцендентного уравнения на элементарные дроби, что помогает провести исследование — в частности, отделить корни.

Отдельно для четных и нечетных по поперечной переменной мод найдены минимизированные по $\alpha$ значения критических чисел Грасгофа $G_n$, соответствующие значения $\alpha$ и $\lambda$. Строится асимптотика $G_n$ при $n \to \infty$. Примечательно, что уже для $n = 1$ асимптотика дает очень хорошую точность.

Есть основания полагать, что критическое значение числа Грасгофа $G_* = 729$, отвечающее первому возникновению колебательной моды, соответствует переходу к турбулентной конвекции при бесконечно больших числах Прандтля [4].

**1. Постановка задачи.** Спектр устойчивости («спектр малых колебаний») определяется в данном случае краевой задачей

$$(D^2 - \alpha^2)^2\varphi + \alpha^2 R\theta = -\lambda(D^2 - \alpha^2)\varphi; \tag{1.1}$$

$$(D^2 - \alpha^2)\theta + \varphi = -\lambda\sigma\theta; \tag{1.2}$$

$$\varphi = \varphi' = \theta = 0 \ (z = \mp 1). \tag{1.3}$$

Здесь R — число Рэлея со знаком минус, так что положительным R соответствует устойчивость; $\alpha^2$ — квадрат модуля горизонтального волнового вектора; $D = d/dz$; $\lambda$ — комплексный спектральный параметр (знак выбран так, что устойчивости отвечает $\operatorname{Re}\lambda > 0$); $\varphi$, $\theta$ — комплексные амплитуды рассматриваемого нормального колебания вертикальной компоненты скорости и температуры.

Хорошо известно, что при R, $\sigma > 0$ спектр краевой задачи (1.1)—(1.3) лежит в правой полуплоскости. При достаточно малых R он веществен, но может стать комплексным, когда R, увеличиваясь, достигает некоторой, зависящей от $\sigma$, величины. При этом два вещественных собственных значения $\lambda$ сливаются, а при дальнейшем росте R превращаются в комплексно-сопряженную пару. Нас интересует это явление, когда $R \to \infty$, $\sigma \to \infty$ так, что $G = R/\sigma$ остается конечным и фиксированным.

Сделаем в (1.1)—(1.3) замену $\varphi \to \sigma\varphi$. При $\sigma \to \infty$ из (1.2) получаем $\theta = -\varphi/\lambda$. Подстановка в (1.1), (1.3) дает краевую задачу

$$L^2\varphi - (\alpha^2 G/\lambda)\varphi = -\lambda L\varphi, \ L = D^2 - \alpha^2; \tag{1.4}$$

$$\varphi = \varphi' = 0 \ (z = \mp 1). \tag{1.5}$$

В силу инвариантности задачи (1.4), (1.5) относительно зеркальной симметрии $z \to -z$ собственные и присоединенные функции делятся на четные и нечетные. Именно поэтому рассматривается симметричный интервал для $z$. Надо иметь в виду, что найденные здесь критические значения G следует умножить на 16, чтобы получить значения для слоя единичной толщины.

Признаком, по которому можно найти значения G, при переходе через которые возникают колебательные моды (пары комплексно-сопряженных $\lambda$), является дву- или более кратность собственного значения $\lambda$. Одной лишь кратности, однако, мало. Если она вызвана существованием пары независимых собственных функций, то, как нетрудно вывести из теории возмущений, в общем случае оба сливающихся собственных числа либо вещественны по обе стороны от такого G, либо комплексны. Рождение комплексно-сопряженной пары происходит, если при данном значении G имеется жорданова клетка — появляется присоединенная функция [5, 6].

Указанная трудность при анализе задачи (1.4), (1.5) легко обходится, если отдельно рассматривать четные и нечетные собственные функции: далее показано, что как в классе четных, так и нечетных функций соответствующие собственные подпространства всегда одномерны, и кратность может быть вызвана лишь появлением присоединенной функции.

**2. Трансцендентное уравнение.** Из (1.4) получаем характеристическое уравнение

$$(k^2 - \alpha^2)^2 + \lambda(k^2 - \alpha^2) - \alpha^2 G/\lambda = 0. \tag{2.1}$$

Если корни суть числа $\pm k_1$, $\pm k_2$:

$$k_1 = \sqrt{\alpha^2 + l_1},\ k_2 = \sqrt{\alpha^2 + l_2}, \tag{2.2}$$
$$l_{1,2} = (1/2)(-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 4\alpha^2 G/\lambda})$$

($l_1$ соответствует знак $+$).

Для четной собственной функции имеем $\varphi = A \operatorname{ch} k_1 z + B \operatorname{ch} k_2 z$, $A$, $B = \text{const}$. Подставляя в (1.5) и приравнивая определитель полученной системы нулю, получаем

$$k_1 \operatorname{th} k_1 - k_2 \operatorname{th} k_2 = 0, \tag{2.3}$$

так как легко проверить, что $\operatorname{ch} k_1 \cdot \operatorname{ch} k_2 \neq 0$.

В случае нечетных собственных функций все аналогично: собственная функция $\varphi = C \operatorname{sh} k_1 z + D \operatorname{sh} k_2 z$, $C$, $D = \text{const}$. Вместо (2.3) находим

$$k_1 \operatorname{cth} k_1 - k_2 \operatorname{cth} k_2 = 0. \tag{2.4}$$

Видно, что собственные подпространства в обеих задачах одномерны.

**3. Метод возмущения краевых условий.** Изменение одного из граничных условий краевой задачи на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения приводит к одномерному возмущению оператора этой задачи или соответствующего оператора Грина. При этом дисперсионное уравнение возмущенной задачи допускает весьма удобное представление. В теории самосопряженных краевых задач такой подход известен как метод Вайнштейна. В [7—9] метод одномерных возмущений развит в общем несамосопряженном случае; интересно, что рассмотрение специальных одномерных возмущений оказывается весьма полезным и для исследования самой невозмущенной задачи — для изучения системы полезно знать ее отклик на внешние воздействия.

В задаче о конвекции в слое метод приводит к дисперсионному уравнению в той форме, которая впервые применялась в [3], где вывод основывался на использовании преобразования Фурье с конечными пределами. Можно также получить это уравнение, заменяя в (2.3) и (2.4) гиперболические тангенсы и котангенсы их разложениями на элементарные дроби. Сейчас выведем дисперсионное уравнение, рассматривая краевую задачу (1.4), (1.5) как возмущенную относительно краевой задачи с условиями

$$u = u'' = 0 \ (z = \pm 1), \tag{3.1}$$

соответствующими недеформируемой свободной границе. На каждом из подпространств четных и нечетных функций такое возмущение одномерно. Начнем с четных мод.

Рассмотрим неоднородную краевую задачу для уравнения

$$L^2 u = f \tag{3.2}$$

с условием (3.1), где $f$, $u$ четны по $z$. Функцию $f$ представим в виде ряда Фурье

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos \delta_n z, \quad \delta_n = (2n-1)\pi/2, \quad f_n = 2\int_0^1 f(z) \cos \delta_n z \, dz. \tag{3.3}$$

Решение $u$ находим также в виде ряда Фурье, определяя тем самым оператор Грина $\mathscr{H}$ задачи (3.1), (3.2) $(\gamma_n = \delta_n^2 + \alpha^2)$:

$$u(z) = (\mathscr{H} f)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n/\gamma_n^2) \cos \delta_n z. \tag{3.4}$$

Теперь из (1.4), (1.5) выводим соотношение

(3.5) $$\varphi = \mathscr{H}(-\lambda L\varphi + (\alpha^2 G/\lambda)\varphi) + \gamma f.$$

Здесь $\gamma$ — число (значение функционала от $\varphi$):

(3.6) $$\gamma = \gamma(\varphi) = -[\mathscr{H}(-\lambda L\varphi + (\alpha^2 G/\lambda)\varphi)]'|_{z=1},$$

а $f$ — четное решение краевой задачи

(3.7) $$L^2 f = 0,\ f(1) = 0,\ f'(1) = 1.$$

Решая задачу (3.7), получаем ($\Delta = (\operatorname{sh} 2\alpha + 2\alpha)/2$)

(3.8) $$f(z) = (z \operatorname{sh} \alpha z \operatorname{ch} \alpha - \operatorname{ch} \alpha z \operatorname{sh} \alpha)/\Delta.$$

Представим $f$ в виде ряда Фурье (3.3) с коэффициентами

(3.9) $$f_n = (-1)^n \frac{8\alpha \operatorname{ch}^2 \alpha \delta_n}{(2\alpha + \operatorname{sh} 2\alpha)\gamma_n^2}.$$

Уравнение (3.5) принимает вид

(3.10) $$\varphi = \gamma[1 - \mathscr{H}(-\lambda L + \alpha^2 G/\lambda)]^{-1} f.$$

Подставляя (3.10) в (3.6), с учетом (3.4) и (3.9) имеем дисперсионное уравнение для $\lambda$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n^2}{\gamma_n^2 - \lambda\gamma_n - \alpha^2 G/\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n^2}{\gamma_n^2} - \frac{2\alpha + \operatorname{sh} 2\alpha}{8\alpha \operatorname{ch}^2 \alpha}.$$

Используя известное соотношение

$$\frac{\operatorname{th} \alpha}{2\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_n^2 + \alpha^2},$$

дисперсионное уравнение приводим к виду

(3.11) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n^2}{\alpha^2 G - H_n} = 0, \quad H_n = \lambda\gamma_n(\gamma_n - \lambda).$$

Выше опущены стандартные обоснования сходимости и законности почленного дифференцирования рядов. Заметим, что при использовании метода возмущения краевых условий приходится отдельно анализировать собственные значения, не изменяющиеся при возмущении (назовем их неподвижными). Покажем, что в данной задаче таких собственных значений нет. Будем говорить, что функция $f$ общего положения, если все ее коэффициенты Фурье относительно собственных функций $\varphi_n^0$ невозмущенной задачи не равны нулю. Соответственно функционал $\gamma(\varphi)$ назовем функционалом общего положения, если он не аннулирует ни одной из собственных функций $\varphi_n^0$. Из (3.5) следует, что неподвижные собственные значения существуют тогда и только тогда, когда $f$ либо $\gamma$ не общего положения. А это невозможно, как легко усмотреть из (3.6) и (3.9), так как $\varphi_n^0(z) = \cos \delta_n z$.

Перейдем к анализу уравнения (3.11). Пусть $\lambda > 0$ фиксировано. Непосредственно проверяется, что все те $H_n(\lambda)$, которые для данного $\lambda$ положительны, различны и монотонно возрастают с увеличением номера $n$. Пусть $n_0(\lambda) = \min\{n: H_n(\lambda) > 0\}$; на каждом из отрезков $(H_n\alpha^{-2}, H_{n+1}\alpha^{-2})$, $n \geqslant n_0(\lambda)$, левая часть (3.11) как функция от G монотонно убывает (дифференцируем: производная отрицательна) от $+\infty$ до $-\infty$. Таким образом, уравнение (3.11) имеет последовательность положительных корней $G_n(\alpha, \lambda)$, $n = n_0(\lambda), n_0(\lambda) + 1, \ldots$: $H_n(\lambda) < \alpha^2 G_n(\alpha, \lambda) < H_{n+1}(\lambda)$ (и, быть может, еще один положительный корень на $(0, H_{n_0}\alpha^{-2})$).

Легко видеть, что при некотором $\lambda \in (0, \gamma_{n+1})$ функция $G_n(\alpha, \lambda)$ достигает максимума по $\lambda$. Вычисления (табулирование $G_n(\alpha, \lambda)$) свидетельствуют о том, что такая точка единственна. Ясно, что она и определяет момент возникновения колебательной моды: если G становится чуть больше максимального значения $G_n$, пара вещественных собственных чисел исчезает. Представляет интерес найти минимальное по $\alpha$ значение такого критического числа. В результате приходим к задаче: найти $G_n$ ($n = 1, 2, \ldots$), удовлетворяющие условию ($\theta = \alpha^2$)

$$G_n = \min_{\theta > 0} \max_{\lambda} G_n(\alpha, \lambda), \tag{3.12}$$

и $\alpha_n$, $\lambda_n$, для которых достигается минимакс. При этом $G_1$ — то значение числа Грасгофа, начиная с которого существует хотя бы одна колебательная мода.

Для нечетных мод все рассмотрения проводятся вполне аналогично. Дисперсионное уравнение имеет тот же вид (3.11), но $\delta_n = n\pi$. Равенства, аналогичные (3.12), определяют последовательность значений G, при переходе через которые возникают новые (нечетные) колебательные моды.

**4. Асимптотика критических чисел Грасгофа.** *Четные моды.* Введем функцию $f(k) = k \operatorname{th} k$ и перепишем уравнение (2.3) в виде

$$f(k_1) = f(k_2). \tag{4.1}$$

Задача состоит в отыскании величин (3.12) ($n = 1, 2, \ldots$). Точки ($\theta_n$, $\lambda_n$), в которых достигается минимакс, суть седловые критические точки функции $G_n(\alpha, \lambda)$. Величины $G_n$, $\theta_n$ и $\lambda_n$ обязаны удовлетворять системе уравнений (4.1) и

$$f'(k_1)\frac{\partial k_1}{\partial \lambda} = f'(k_2)\frac{\partial k_2}{\partial \lambda}, \quad f'(k_1)\frac{\partial k_1}{\partial \theta} = f'(k_2)\frac{\partial k_2}{\partial \theta}. \tag{4.2}$$

Заметим, что $f'(k_1) > 0$, так как $k_1 > 0$. Поэтому должен обращаться в нуль определитель системы (4.2)

$$\frac{\partial k_1}{\partial \theta}\frac{\partial k_2}{\partial \lambda} - \frac{\partial k_1}{\partial \lambda}\frac{\partial k_2}{\partial \theta} = 0. \tag{4.3}$$

Введем параметры $m$, $q$, $p$, полагая

$$m = (k^2 - \alpha^2)/\lambda, \quad p = \alpha^2/\lambda, \quad q = \alpha^2 G/\lambda^3. \tag{4.4}$$

Заметим, что $p$ и $q$ положительны. Для $m$ в силу (2.1) имеем уравнение

$$m^2 + m - q = 0. \tag{4.5}$$

Через $m_1$ обозначим его положительный корень, а через $m_2$ — отрицательный:

$$m_1 = (-1 + \sqrt{1 + 4q})/2, \; m_2 = (1 + \sqrt{1 + 4q})/2. \tag{4.6}$$

Легко видеть, что $k_2$ — чисто мнимое число: $k_2 = i\widehat{k}_2$. При этом

$$k_1 = \sqrt{\lambda(m_1 + p)}, \; \widehat{k}_2 = \sqrt{\lambda(m_2 - p)}. \tag{4.7}$$

Уравнение (4.3) с учетом (4.4)—(4.7) приводится к виду

$$1/p + 1/q = 2. \tag{4.8}$$

Первое из уравнений (4.2) с использованием (4.4)—(4.8) записывается как ($\eta = k_1 \operatorname{th} k_1(1 - k_1 \operatorname{th} k_1)$)

$$2\eta/\lambda = p - 2q. \tag{4.9}$$

Итак, для определения $\theta_n$, $\lambda_n$, $G_n$ имеем систему уравнений (4.1), (4.8), (4.9). Из (4.1), (4.7) получаем

$$\widehat{k}_2 = n\pi - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{(m_1 + p)/(m_2 - p)} \operatorname{th} k_1\right); \tag{4.10}$$

$$\lambda = (m_2 - p)^{-1}\left(n\pi - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{(m_1 + p)/(m_2 - p)} \operatorname{th} k_1\right)\right)^2, \tag{4.11}$$

где $n = 1, 2, \ldots$

При построении асимптотики будем предполагать, что для $n \to \infty$ $p$, $q$, $m_1$, $m_2 = O(1)$, $\lambda$, $\alpha^2 = O(n^2)$, $G = O(n^4)$, $k_1$, $\widehat{k}_2 = O(n)$. Эти предположения проверяются апостериорно: найденные асимптотические разложения обосновываются при помощи одного из сингулярных вариантов теоремы о неявной функции.

Заменяя $\operatorname{th} k_1$ на 1, уравнения (4.11), (4.9) с экспоненциально малой при $n \to \infty$ ошибкой перепишем в виде

$$\lambda = (m_2 - p)^{-1}(n\pi - \operatorname{arctg}\sqrt{(m_1 + p)/(m_2 - p)})^2; \tag{4.12}$$

$$2(m_1 + p) + p - 2q = 2\sqrt{(m_1 + p)/\lambda}. \tag{4.13}$$

Имея в виду, что $m_1$, $m_2$, $p$ выражаются через $q$ равенствами (4.6) и (4.8), можно смотреть на (4.12), (4.13) как на систему уравнений, определяющих для заданного $n = 1, 2 \ldots$ величины $q$, $\lambda$. После того как $\lambda_n$, $q_n$ найдены, $G_n$, $\theta_n = \alpha_n^2$ определяются при помощи (4.4).

Для предельных при $n \to \infty$ значений $m_1$, $m_2$, $p$, $q$ получаемое из (4.13) уравнение можно представить как

$$(m_1 - 1)(2m_1 + 1)(2m_1 + 3) = 0. \tag{4.14}$$

В результате находим $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $p = 2/3$, $q = 2$. Из (4.4) и (4.12) выводим асимптотические равенства

$$\lambda_n = \frac{3}{4} n^2\pi^2, \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{\sqrt{2}}, \quad G_n = \frac{27}{16} n^4\pi^4. \tag{4.15}$$

Можно получить асимптотические разложения для $m_1$, $m_2$, $p$, $q$ по степеням $1/n$:

$$m_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} m_{1k} n^{-k}, \quad m_2 = m_1 + 1, \tag{4.16}$$

$$p = \frac{2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} p_k n^{-k}, \quad q = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} q_k n^{-k};$$

$$p_1 = 4\sqrt{5}/45\pi, \; q_1 = -4\sqrt{5}/5\pi, \quad m_{11} = -4\sqrt{5}/15\pi, \tag{4.17}$$

$$p_2 = \frac{248}{2025\pi^2} + \frac{4\sqrt{5}}{45\pi^2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$q_2 = -9p_2 + 32/(15\pi^2), \; m_{12} = -3p_2 + 16/(27\pi^2).$$

Численные значения: $q_1 = -0{,}56941$, $p_1 = 0{,}0632677$, $m_{11} = 0{,}1898033$, $p_2 = 0{,}0293466$, $q_2 = -0{,}0479676$, $m_{12} = -0{,}0279977$.

Используя (4.12), с точностью до $O(1/n)$ при $n \to \infty$ находим

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(n\pi + \frac{2\sqrt{5}}{15} \quad \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}\right). \tag{4.18}$$

Формула (4.18) дает неплохие результаты уже для $n = 1$. Приведем вычисленные по этой формуле значения $\lambda_n$, указывая в скобках правильные

Таблица 1

| $n$ | G | $\alpha$ | $\lambda$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 729,1942188 | 1,9968426 | 5,0867521 |
| 2 | 23526,77881 | 4,1811270 | 24,706872 |
| 3 | 146200,8065 | 6,3965159 | 59,165166 |
| 4 | 509650,8013 | 8,6151200 | 108,42472 |
| 5 | 1317901,713 | 10,834913 | 172,48753 |
| 6 | 2838099,643 | 13,055278 | 251,35421 |
| 7 | 5400511,782 | 15,275961 | 345,02502 |
| 8 | 9398526,413 | 17,496839 | 453,50006 |
| 9 | 15288652,91 | 19,717846 | 576,77940 |
| 10 | 23590521,74 | 21,938942 | 714,86307 |

Таблица 2

| $n$ | G | $\alpha$ | $\lambda$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 373,8634460 | 3,0760953 | 13,020459 |
| 2 | 4065,791645 | 5,2881467 | 40,086069 |
| 3 | 17909,79080 | 7,5056013 | 81,944607 |
| 4 | 52684,93200 | 9,7249200 | 138,60566 |
| 5 | 123115,3126 | 11,945044 | 210,07037 |
| 6 | 247870,0981 | 14,165589 | 296,33909 |

последние знаки (табл. 1): $\lambda_1 = 5{,}06(8)$, $\lambda_2 = 24{,}713(707)$, $\lambda_3 = 59{,}1655(2)$, $\lambda_4 = 108{,}4224(5)$, $\lambda_5 = 172{,}484(8)$.

*Нечетные моды.* В случае нечетных мод анализ проводится вполне аналогично. Вместо (4.1) имеем уравнение (2.4), в (4.9) для $\eta$ возьмем выражение $\eta = k_1 \operatorname{cth} k_1(1 - k_1 \operatorname{cth} k_1)$. Соответственно в (4.10), (4.11) нужно заменить $n$ на $n + 1/2$. Предельные значения параметров $m_1$, $m_2$, $p$, $q$ при $n \to \infty$, асимптотические формулы (4.15) и выражения (4.17) сохраняются. Вместо (4.18) получаем

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{2\sqrt{5}}{15} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}\right). \tag{4.19}$$

Ошибка здесь по-прежнему — $O(1/n)$ при $n \to \infty$. Конечно, эта формула работает еще лучше, чем аналогичная для четных мод. Например, по (4.19) имеем $\lambda_1 = 13{,}04$ и $\lambda_2 = 40{,}089$. Вычисленные значения (табл. 2) $\lambda_1 = 13{,}020459$ и $\lambda_2 = 40{,}086069$.

**5. Численные результаты.** Уравнение (4.9) запишем в виде

$$m_1^4 + m_1^3 + (B - 1{,}25)\,m_1^2 + (B - 0{,}75)\,m_1 - B/2 = 0, \tag{5.1}$$

где

$$B = \sqrt{(m_1 + p)/\lambda}\, \operatorname{th} k_1 + (m_1 + p)(1 - \operatorname{th}^2 k_1), \tag{5.2}$$

$$k_1 = \sqrt{\lambda (m_1 + p)}, \quad p = q/(2q - 1), \quad q = m_1^2 + m_1.$$

Присоединяя (4.11), получаем систему уравнений для четных мод, а для нечетных надо лишь в выражении для $B$ и $\lambda_n$ заменить th на cth и в (4.11)— $n$ на $n + 0{,}5$.

Система (4.11), (5.1), (5.2) решается численно следующим образом. Имея приближенное значение для $\lambda_n$ (можно начинать хотя бы с $\lambda_n^0 = \infty$), вычисляем $B$ и находим $m_1$, решая уравнение четвертой степени (5.1). Пользуясь правилом Декарта, устанавливаем, что у последнего уравнения есть единственный положительный корень, который определяется методом Ньютона. Найдя $m_1$, вычисляем $\lambda_n$ по (4.11), (5.2), а $\alpha_n$ и $G_n$ — по (4.4).

Численные результаты представлены в табл. 1 и 2.

Автор весьма благодарен Л. Х. Беленькой за помощь при программировании и проведении расчетов.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Pellew A., Southwell R. V.** On maintained convective motion in a fluid heated from below // Proc. Roy. Soc.— 1940.— V. A176, N 966.
2. **Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.** Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости.— М.: Наука, 1972.
3. **Jeffreys H.** Some cases of instability in fluid motion // Proc. Roy. Soc.— 1928.— V. A118.— P. 195.
4. **Krishnamurti R.** Some further studies on the transition to turbulent convection // J. Fluid Mech.— 1973.— V. 60.— P. 285.
5. **Данфорд Н., Шварц Дж.** Линейные операторы.— М.: ИЛ, 1962.— Т. 1.
6. **Като Т.** Теория возмущений линейных операторов.— М.: Мир, 1972.
7. **Барковский Ю. С., Юдович В. И.** Рождение вихрей Тейлора в случае разновращающихся цилиндров и спектральные свойства одного класса краевых задач // ДАН СССР.— 1978.— Т. 242.
8. **Барковский Ю. С., Юдович В. И.** Спектральные свойства конечномерных операторов и проблема моментов // Изв. Сев.-Кавк. науч. центра высш. шк. Естеств. науки.— 1975.— № 4.
9. **Барковский Ю. С., Юдович В. И.** Спектральные свойства одного класса краевых задач // Мат. сб.— 1981.— Т. 114, № 3.


*г. Ростов-на-Дону* *Поступила 31/VIII 1990 г.*