ОТРАЖЕНИЕ МАГНИТОЗВУКОВЫХ ВОЛН

Л. Я. Косачевский

(Донецк)

В работе [1] рассматривалась задача об отражении магнитозвуковых волн на границе раздела упругой и жидкой сред с бесконечной проводимостью при произвольном постоянном магнитном поле. При записи граничных условий была использована непрерывность касательной компоненты магнитного поля. Это условие, спроведливое при конечной проводимости сред, не имеет места при бесконечной проводимости. В связи с этим решается задача, аналогичная [1], без использования указанного граничного условия. Полученные амплитудные коэффициенты конверсии в предельных случаях слабого и сильного магнитных полей совпадают с соответствующими коэффициентами, приведенными в работах [2,3] для сред с конечной проводимостью, если в последних устремить проводимость к бесконечности.

1. Линеаризованные уравнения, описывающие распространение возмущений в сплошной среде с бесконечной проводимостью, имеют вид [4]

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_k}(P_{ik}+T_{ik}),\qquad \frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\operatorname{div}\mathbf{v}=0 \tag{1.1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-c^{-1}\partial\mathbf{h}/\partial t,\qquad \operatorname{div}\mathbf{h}=0,\qquad \mathbf{E}=-c^{-1}\mathbf{v}\times\mathbf{H}$$

Здесь $\mathbf{H}$ — внешнее магнитное поле, предполагаемое постоянным; $\mathbf{h}$ — малое изменение магнитного поля в волне; $\mathbf{E}$ — индуцированное электрическое поле; ρ и $\mathbf{v}$ — плотность и скорость среды; c — скорость света; P_{ik} — тензор напряжений; T_{ik} — максвеллов тензор напряжений, принимающий после линеаризации вид

$$T_{ik}={}^1/_4\pi^{-1}\left[H_iH_k+H_ih_k+H_kh_i-{}^1/_2(H^2+2H_lh_l)\delta_{ik}\right]$$

На границе раздела двух сред первым четырем уравнениям (1.1) соответствуют граничные условия [5]

$$[P_{ik}n_k+T_{ik}n_k]=0,\quad [v_in_i]=0,\quad [E_i\tau_i]=0,\quad [h_in_i]=0 \tag{1.2}$$

где $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$ — единичные векторы нормали и касательной к границе, а квадратная скобка означает скачок заключенной в нее величины на границе. Из пятого уравнения (1.1) с учетом второго и третьего условий (1.2) следует непрерывность касательной компоненты вектора скорости на границе

$$[v_i\tau_i]=0 \tag{1.3}$$

2. Для случая плоских волн в жидкости уравнения (1.1) сводятся к системе алгебраических уравнений

$$\omega\mathbf{v}=\frac{p}{\rho_0}\mathbf{k}+\frac{1}{4\pi\rho_0}\mathbf{H}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{h})$$

$$\omega p=\rho_0a_0^2\mathbf{k}\cdot\mathbf{v},\quad \omega\mathbf{h}=-\mathbf{k}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{H}),\quad P_{ik}=-p\delta_{ik} \tag{2.1}$$

где ρ_0 и a_0 — плотность и скорость звука в жидкости, p — гидродинамическое давление. Вязкостью среды пренебрегаем.

Будем предполагать, что волновой вектор **k** и вектор **H** лежат в плоскости xz. Для волн, поляризованных в этой плоскости, из (2.1) вытекает дисперсионное уравнение

$$u^2 - (1 + \psi_0) u + \psi_0 \cos^2 \alpha = 0, \quad u = \left(\frac{\omega}{ka_0}\right)^2, \quad \psi_0 = \frac{H^2}{4\pi\rho_0 a_0^2} \qquad (2.2)$$

Здесь u и ψ_0 — квадраты фазовой скорости и напряженности магнитного поля в безразмерной форме, α — угол между векторами **k** и **H**. Два корня u_1 и u_2 уравнения (2.2) соответствуют быстрой и медленной магнитозвуковым волнам.

Из (2.1) получаются также следующие соотношения:

$$V_x = Mv_z, \; h_x = Av_z, \; E_y = Bv_z, \; -p = Zv_z$$

$$M = \beta^{-1}(k_z \cos\alpha - ku \sin\varphi), \; \beta = ku \cos\varphi - k_x \cos\alpha \qquad (2.3)$$

$$A = \frac{k_z}{ka_0} u^{-1/2}(H_x - MH_z), \quad B = -\frac{\omega}{ck_z} A, \quad Z = -\frac{\rho_0 a_0}{k} u^{-1/2}(k_x M + k_z)$$

где φ — угол наклона магнитного поля к оси x.

3. Распространение волн в неограниченной упругой проводящей среде рассматривалось в работах [6, 7].

В упругой среде

$$P_{ik} = \lambda u_{ll}\delta_{ik} + 2\mu u_{ik}, \qquad u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$$

где λ и μ — коэффициенты Лямэ.

Принимая во внимание, что в случае плоских монохроматических волн вектор смещения **u** связан с вектором скорости соотношением

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{i\omega}\mathbf{v}$$

и учитывая (1.1), получаем

$$\omega^2 \mathbf{v} = a^2 \mathbf{k}(\mathbf{kv}) - b^2 \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{v}) + \frac{\omega}{4\pi\rho} \mathbf{H} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{h})$$

$$\omega \mathbf{h} = -\mathbf{k} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}), \quad a^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad b^2 = \frac{\mu}{\rho} \qquad (3.1)$$

Здесь a и b — скорости чисто упругих продольной и поперечной волн, ρ — плотность упругой среды.

Для волн, поляризованных в плоскости xz, из (3.1) следует дисперсионное уравнение

$$u^2 - (1 + \xi + \psi) u + \xi + \psi(\cos^2 \alpha + \xi \sin^2 \alpha) = 0$$

$$u = \left(\frac{\omega}{ka}\right)^2, \quad \psi = \frac{H^2}{4\pi\rho a^2}, \quad \xi = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \qquad (3.2)$$

Корни u_3 и u_4 этого уравнения соответствуют быстрой и медленной магнитоупругим волнам.

Согласно (3.1) для волн в упругой среде имеем соотношения

$$v_x = Mv_z, \; h_x = Av_z, \; E_y = Bv_z, \; P_{zz} = Zv_z, \; P_{xz} = Xv_z \qquad (3.3)$$

$$M = \beta^{-1}[(1 - \xi)k_z \cos\alpha - k(u - \xi)\sin\varphi]$$

$$\beta = k(u - \xi)\cos\varphi - (1 - \xi) k_x \cos\alpha$$

$$A = \frac{k_z}{ka} u^{-1/2}(H_x - MH_z), \qquad B = -\frac{\omega}{ck_z} A$$

$$Z = -\frac{\rho a}{k} u^{-1/2}[k_z + (1 - 2\xi)k_x M], \qquad X = -\frac{\xi\rho a}{k} u^{-1/2}(k_x + k_z M)$$

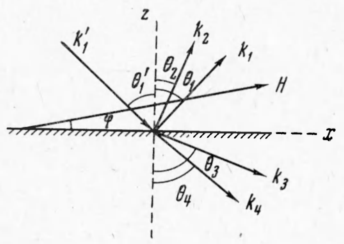
4. Будем считать границу раздела жидкой и упругой сред совпадающей с плоскостью xy.

Граничные условия для волн, поляризованных в плоскости xz, согласно (1.2) и (1.3) принимают вид

$$\left[P_{zz} - \frac{1}{4\pi} H_x h_x\right] = 0, \quad \left[P_{xz} + \frac{1}{4\pi} H_z h_x\right] = 0, \quad [v_z] = 0, \quad [v_x] = 0 \qquad (4.1)$$

Волны, поляризованные перпендикулярно плоскости xz (волны Альфвена), распространяются независимо и рассматриваться здесь не будут.

Пусть из жидкости на границу падает быстрая магнитозвуковая волна (фиг. 1). Падающая волна возбуждает на границе систему четырех волн: двух магнитозвуковых в жидкости и двух магнитоупругих в упругой среде. Величины, относящиеся к падающим возмущениям, будем обозначать штрихами. Принимая амплитуду v_{1z}' за единицу, записываем поле скоростей в жидкости



Фиг. 1

$$v_z = -\exp\{-i[\omega t - (k_1' r)]\} + \sum_{\nu=1}^{2} W_\nu \exp\{-i[\omega t - (k_\nu r)]\}$$

и в упругой среде

$$v_z = -\sum_{\nu=3}^{4} W_\nu \exp\{-i[\omega t - (k_\nu r)]\}$$

Здесь W_ν — амплитудные коэффициенты конверсии.

Из условий (4.1) с учетом (2.3) и (3.3) получаем систему уравнений для определения этих коэффициентов

$$\sum_{\nu=1}^{4} W_\nu = 1, \qquad \sum_{\nu=1}^{4}\left(Z_\nu - \frac{H_x}{4\pi} A_\nu\right) W_\nu = Z_1' - \frac{H_x}{4\pi} A_1'$$

$$\sum_{\nu=1}^{4} M_\nu W_\nu = M_1', \qquad \sum_{\nu=1}^{4}\left(X_\nu + \frac{H_z}{4\pi} A_\nu\right) W_\nu = \frac{H_z}{4\pi} A_1', \qquad X_1 = X_2 = 0 \qquad (4.2)$$

Решение системы (4.2) имеет вид

$$\begin{aligned}
W_1 &= \Delta^{-1} \{\xi [(M_2 - M_1') N + mQ_1'] + \psi \sin^2 \varphi (P_1' + mR_1')\} \\
W_2 &= \Delta^{-1} \{\xi [(M_1' - M_1) N + mQ_2'] + \psi \sin^2 \varphi (P_2' + mR_2')\} \qquad (4.3) \\
W_3 &= (M_4 - M_3)^{-1} [M_4 - M_1' - (M_4 - M_1) W_1 - (M_4 - M_2) W_2] \\
W_4 &= (M_3 - M_4)^{-1} [M_3 - M_1' - (M_3 - M_1) W_1 - (M_3 - M_2) W_2]
\end{aligned}$$

Здесь

$$\Delta = \xi [(M_2 - M_1) N + mQ] + \psi \sin^2 \varphi (P + mR)$$

$$N = (1 - M_4 \operatorname{ctg} \theta_4) [(1 - 2\xi) M_3 - \operatorname{ctg} \theta_3] - (1 - M_3 \operatorname{ctg} \theta_3) [(1 - 2\xi) M_4 - \operatorname{ctg} \theta_4]$$

$$Q = [M_4 - M_3 + M_3 M_4 (\operatorname{ctg} \theta_4 - \operatorname{ctg} \theta_3)] (M_2 - M_1 + \operatorname{ctg}\theta_2 - \operatorname{ctg}\theta_1) + (M_4 \operatorname{ctg} \theta_4 - M_3 \operatorname{ctg}\theta_3)(M_2 \operatorname{ctg} \theta_1 - M_1 \operatorname{ctg} \theta_2)$$

$$R = (M_2 + \operatorname{ctg} \theta_2) \gamma_1 - (M_1 + \operatorname{ctg} \theta_1) \gamma_2, \quad P = \Gamma_3 \gamma_4 - \Gamma_4 \gamma_3$$

$$\gamma_\nu = (M_4 - M_3)(\operatorname{ctg}\varphi - M_\nu)\operatorname{ctg}\theta_\nu + (M_4 - M_\nu)(\operatorname{ctg}\varphi - M_3)\cdot\operatorname{ctg}\theta_3 + (M_\nu - M_3)(\operatorname{ctg}\varphi - M_4)\operatorname{ctg}\theta_4 \qquad (\nu = 1,2)$$

$$\gamma_\nu = (M_2 - M_1)(\operatorname{ctg}\varphi - M_\nu)\operatorname{ctg}\theta_\nu + (M_2 - M_\nu)(\operatorname{ctg}\varphi - M_1)\operatorname{ctg}\theta_1 + (M_\nu - M_1)(\operatorname{ctg}\varphi - M_2)\operatorname{ctg}\theta_2 \qquad (\nu = 3,4)$$

$$\Gamma_\nu = \xi\,(1 - M_\nu \operatorname{ctg}\theta_\nu)\operatorname{ctg}\varphi + (1-2\xi)\,M^2 - \operatorname{ctg}\theta_\nu, \quad m = \rho_0 a_0^2/\rho a^2$$

Величины P_ν, Q_ν', R_ν' получаются соответственно из P, Q, R, если в последних произвести замену M_ν на M_1' и $\operatorname{ctg}\theta_\nu$ на $-\operatorname{ctg}\theta_1'$.

При слабом магнитном поле ($\psi_0 \ll 1$, $\psi \ll 1$) с точностью до главных членов имеем

$$\theta_1' = \theta_1, \qquad \sin\theta_1 = \frac{\sin\theta_2}{\sqrt{u_2}} = \frac{a_0}{a}\sin\theta_3 = \frac{a_0}{b}\sin\theta_4 \tag{4.4}$$

$$u_1 = 1 + \psi_0 \sin^2\alpha_1, \quad u_2 = \psi_2\cos^2\alpha_2 = \psi_0 \sin^2\varphi\,(1 + 2\sqrt{\psi_0}\cos\varphi\sin\theta_1)$$

$$u_3 = 1 + \psi\sin^2\alpha_3, \quad u_4 = \xi + \psi\cos^2\alpha_4, \qquad M_1 = \operatorname{tg}\theta_1$$

$$M_2 = -\operatorname{ctg}\theta_2 - \operatorname{ctg}\varphi/\sin^2\theta_1, \qquad M_3 = -\operatorname{tg}\theta_3, \qquad M_4 = \operatorname{ctg}\theta_4,$$

$$M_1' = -M_1$$

И коэффициенты конверсии принимают вид (4.5)

$$W_1 = W_1^\circ - \frac{\sqrt{\psi_0}Y^2}{2\sin\varphi}\cos\theta_1, \quad W_3 = (1 - W_1^\circ)\cos 2\theta_4 + \frac{\sqrt{\psi}YF}{2\sin\varphi}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{1/2}\cos\theta_3$$

$$W_2 = \sqrt{\psi_0}Y\sin\theta_1, \quad W_4 = 2(1 - W_1^\circ)\sin^2\theta_4 - \frac{\sqrt{\psi}Y\Phi}{2\sin\varphi}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{1/2}\sin\theta_3$$

$$Y = \frac{2\sin\varphi}{Z_n + Z_1^\circ}\left[Z_n\operatorname{tg}\theta_1 + Z_1^\circ\frac{\sin(2\theta_4 - \theta_3)}{\cos\theta_3}\right], \quad Z_1^\circ = \frac{\rho_0 a_0}{\cos\theta_1}$$

$$F = \frac{2\sin\varphi}{Z_n + Z_1^\circ}\left[Z_1^\circ\operatorname{tg}\theta_3 + Z_3^\circ\frac{\sin(2\theta_4 - \theta_1)}{\cos\theta_1}\right], \quad Z_3^\circ = \frac{\rho a}{\cos\theta_3}$$

$$\Phi = \frac{2\sin\varphi}{Z_n + Z_1^\circ}(Z_1^\circ + Z_3^\circ\cos 2\theta_4 + Z_4^\circ\sin 2\theta_4\operatorname{tg}\theta_1), \quad Z_4^\circ = \frac{\rho b}{\cos\theta_4}$$

$$W_1^\circ = \frac{Z_n - Z_1^\circ}{Z_n + Z_1^\circ}, \qquad Z_n = Z_3^\circ\cos^2 2\theta_4 + Z_4^\circ\sin^2 2\theta_4$$

Величины W_1° и Z_n представляют собой соответственно коэффициент отражения и полный акустический импеданс границы в отсутствие магнитного поля [8].

В работе [2] были получены выражения коэффициентов W_ν для сред с конечной проводимостью при слабом магнитном поле. Если в этих выражениях устремить проводимость к бесконечности, получим формулы (4.5).

В противоположном предельном случае сильного магнитного поля ($\psi_0 \gg 1$, $\psi \gg 1$)

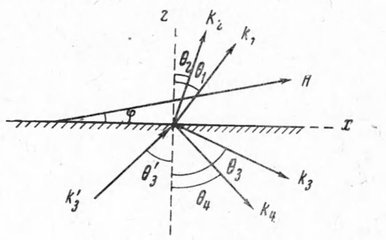
$$\theta_1' = \theta_1, \qquad \sin\theta_3 = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{1/2}\sin\theta_1, \qquad \operatorname{ctg}\theta_2 = \frac{\sqrt{\psi_0}}{\sin\theta_1\sin\varphi} - \operatorname{ctg}\varphi \tag{4.6}$$

$$\operatorname{ctg}\theta_4 = \frac{1}{\sin\theta_3\sin\varphi}\left(\frac{\psi}{1 + \xi\operatorname{ctg}^2\varphi}\right)^{1/2} + \frac{(1-\xi)\operatorname{ctg}\varphi}{1 + \xi\operatorname{ctg}^2\varphi}$$

$$u_1 = \psi_0 + \sin^2\alpha_1, \quad u_2 = \cos^2\alpha_2 - {}^1/_4\, \psi_0^{-1} \sin^2 2\alpha_2$$
$$u_3 = \psi + \sin^2\alpha_3 + \xi \cos^2\alpha_3, \qquad M_1' = M_1 = M_3 = -\operatorname{tg}\varphi$$
$$u_4 = \cos^2\alpha_4 + \xi \sin^2\alpha_4 - {}^1/_4\, \psi^{-1}(1-\xi)^2 \sin^2 2\alpha_4, \quad M_2 = M_4 = \operatorname{ctg}\varphi$$

При этом формулы (4.3) дают с точностью до членов порядка $1/\psi$

$$W_1 = \frac{n_3 - n_1}{n_3 + n_1}, \qquad W_3 = \frac{2n_1}{n_3 + n_1}$$
$$W_2 = \frac{2n_1\rho a\,[(1-\xi-m)\cos(\theta_3-\varphi)\sin\varphi - \xi\sin\theta_3]}{\sqrt{\psi}\,(n_3+n_1)\,(\rho a\sqrt{1+\xi\operatorname{ctg}^2\varphi} + \rho_0 a_0)\cos\varphi} \tag{4.7}$$
$$W_4 = -W_2, \qquad n_1 = \rho_0^{1/2}\cos\theta_1, \qquad n_3 = \rho^{1/2}\cos\theta_3$$



Фиг. 2

Если положить здесь ξ равным нулю, получим выражения для коэффициентов отражения от границы раздела двух жидких сред, совпадающие с соответствующими формулами работы [3].

В случае падения на границу медленной магнитозвуковой волны коэффициенты W_ν найдутся из выражений (4.3) при помощи перестановки индексов 1 и 2.

5. Пусть теперь из упругой среды на границу раздела с жидкостью падает быстрая магнитоупругая волна (фиг. 2).

Аналогично предыдущему из граничных условий находим следующие выражения для амплитудных коэффициентов:

$$W_1 = (M_2 - M_1)^{-1}[M_2 - M_3' - (M_2 - M_3)W_3 - (M_2 - M_4)W_4]$$
$$W_2 = (M_1 - M_2)^{-1}[M_1 - M_3' - (M_1 - M_3)W_3 - (M_1 - M_4)W_4]$$
$$W_3 = \Delta^{-1}\{\xi[(M_2 - M_1)N_3' + mQ_3'] + \psi\sin^2\varphi\,(P_3' + mR_3')\} \tag{5.1}$$
$$W_4 = \Delta^{-1}\{\xi[(M_2 - M_1)N_4' + mQ_4'] + \psi\sin^2\varphi\,(P_4' + mR_4')\}$$

Здесь N_ν', P_ν', Q_ν', R_ν' получаются соответственно из N, P, Q, R при помощи замены M_ν на M_3' и $\operatorname{ctg}\theta_\nu$ на $-\operatorname{ctg}\theta_3'$.

При слабом магнитном поле из (5.1) следует

$$W_1 = (1 - W_3^\circ)\sec 2\theta_4 + \frac{\sqrt{\psi_0}FY}{2\sin\varphi}\cos\theta_1, \qquad W_2 = \sqrt{\psi_0}F\sin\theta_1 \tag{5.2}$$
$$W_3 = W_3^\circ - \frac{\sqrt{\psi}F^2}{2\sin\varphi}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{1/2}\cos\theta_3$$
$$W_4 = -2(1 - W_3^\circ)\frac{\sin^2\theta_4}{\cos 2\theta_4} + \frac{\sqrt{\psi}F\Phi}{2\sin\varphi}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{1/2}\sin\theta_3$$
$$W_3^\circ = \frac{1}{Z_n + Z_1^\circ}(Z_1^\circ - Z_3^\circ\cos^2 2\theta_4 + Z_4^\circ\sin^2 2\theta_4)$$

где W_3° представляет собой коэффициент отражения чисто упругой продольной волны [8].

При сильном магнитном поле формулы (5.1) дают

$$W_1 = \frac{2n_3}{n_1 + n_3}, \qquad W_3 = \frac{n_1 - n_3}{n_1 + n_3}, \qquad W_2 = -W_4 \tag{5.3}$$
$$W_4 = \frac{2n_3\rho a^2\,[1-\xi-m)\cos(\theta_1+\varphi)\sin\varphi - \xi\sin\theta_1]}{a_0\sqrt{\psi_0}\,(n_1+n_3)\,(\rho a\sqrt{1+\xi\operatorname{ctg}^2\varphi} + \rho_0 a_0)\cos\varphi}$$

Если на границу раздела с жидкостью падает медленная магнитоупругая волна, выражения для коэффициентов W_ν можно получить из (5.1) при помощи перестановки индексов 3 и 4.

Поступила 12 V 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Косачевский Л. Я. Об отражении магнитозвуковых волн. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
2. Косачевский Л. Я. Отражение магнитозвуковых волн на границе раздела двух сред с конечной электропроводностью. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.
3. Косачевский Л. Я. Распространение магнитозвуковых волн в слоистых средах. ПМТФ, 1966, вып. 6.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
5. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962.
6. Baños A. Normal modes characterizing magnetoelastic plane waves. Phys. Rev., 1956, vol. 104, № 2.
7. Кейлис-Борок В. И., Монин А. С. Магнитоупругие волны и граница земного ядра. Изв. АН СССР, Сер. геофиз. 1959, № 11.
8. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1957.