ПМТФ, № 2, 1972

534.22

К ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН В ПОЛИКРИСТАЛЛАХ

А. А. Усов, А. Г. Фокин, Т. Д. Шермергор

(Москва)

На основе метода, предложенного в работе [1], рассмотрено распространение длинных и коротких ультразвуковых волн в поликристаллической среде с орторомбической симметрией.

Вычислены ослабление и дисперсия скорости упругих волн, связанные с рассеянием волны на неоднородностях. Рассмотрены частные случаи тетрагональной, гексагональной и кубической симметрий.

Полученные результаты сопоставляются с данными работы [2] по исследованию рассеяния в приближении длинных волн и с результатами работ [1, 3] по исследованию рассеяния в поликристаллах с более высокой симметрией.

1. Распространение упругих волн в неоднородных средах сопровождается их рассеянием на неоднородностях структуры и соответствующей дисперсией скорости. Расчет этого эффекта в рамках теории случайных функций впервые был выполнен И. М. Лифшицем и Г. Д. Пархомовским [1] для поликристаллов кубической структуры. В дальнейшем было рассмотрено рассеяние волн в поликристаллах более низкой симметрии — гексагональной [3] и орторомбической [2]. Однако в последнем случае вычислялось лишь ослабление волн в длинноволновом приближении, когда длина волны намного превышает характерные размеры кристаллитов. Вместе с тем развитие техники гигагерцевых частот [3] требует рассмотрения и коротковолновой асимптотики. Исходя из этого, ниже на основе работы [1] вычисляются коэффициент рассеяния и дисперсия скорости ультразвука в поликристаллах орторомбической симметрии как для коротких, так и для длинных волн.

Расчет основан на вычислении тензора второго ранга C_{il}

$$C_{il} = C_{iklm} l_k l_m \tag{1.1}$$

$$C_{iklm} = A^{ikpq}_{stlm} I_{pqst} \tag{1.2}$$

Здесь через A^{ikpq}_{stlm} обозначена тензорная часть бинарного корреляционного тензора упругих модулей λ_{ikpq}

$$A^{ikpq}_{stlm}(\mathbf{r}) = \langle [\lambda_{ikpq}(\mathbf{r}) - \langle \lambda_{ikpq} \rangle] [\lambda_{stlm}(\mathbf{r}) - \langle \lambda_{stlm} \rangle] \rangle \tag{1.3}$$

$l_i = q_i / q$ — единичный вектор в направлении распространения волны, C_{iklm} — корреляционная поправка к тензору средних упругих модулей поликристалла

$$I_{pqst} = K_{pqst} + iL_{pqst} = \int G_{ps}(\mathbf{r}) [\varphi(\mathbf{r}) \cos \mathbf{qr}]_{,ql} d\mathbf{r} \tag{1.4}$$

Здесь индексы, стоящие после запятой, означают дифференцирование по соответствующим координатам, G_{ps} — тензор Грина волнового уравнения среды с осредненными упругими модулями $\langle\lambda_{iklm}\rangle$, $\varphi(\mathbf{r})$ — координатная часть корреляционного тензора (1.3).

2. Далее величины, относящиеся к длинным ($qa < 1$) и коротким ($qa \gg 1$) волнам, отмечаются индексами минус и плюс соответственно. Здесь a — масштаб корреляций.

В асимптотике длинных и коротких волн выражения для I_{pqst} приведены в [1]. После исправления опечаток эти формулы приобретают вид

$$K^{-}_{pqst} = \overset{\circ}{K}_{pqst} + \langle a^2\rangle\,\omega^2 K^{I}_{pqst} \tag{2.1}$$

$$\overset{\bullet}{K}_{pqst} = \frac{4\pi}{15}\{g_0\,[2\,(\delta_{pt}\delta_{sq} + \delta_{pq}\delta_{st}) - 3\delta_{ps}\delta_{tq}] - 5h_0\delta_{ps}\delta_{tq}\} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} K^{I}_{pqst} = \frac{1}{c^2}\Big\{\frac{g_0}{105}\,[3\delta_{ps}\delta_{tq} - 4\,(\delta_{pt}\delta_{sq} + \delta_{pq}\delta_{st}) + 3\,(2l_q l_s\delta_{pt} + 2l_p l_t\delta_{sq} +{} \\ + 2l_q l_p\delta_{st} + 2l_s l_t\delta_{pq} + 2l_p l_s\delta_{tq} - 5l_q l_t\delta_{ps})] + \frac{h_0}{15}\,(\delta_{ps}\delta_{tq} - 3l_q l_t\delta_{ps})\Big\} +{} \\ + 2\Big\{\frac{g_2}{15}\,[4\,(\delta_{pt}\delta_{sq} + \delta_{st}\delta_{pq}) - \delta_{ps}\delta_{qt}] + \frac{h_2}{3}\,\delta_{qt}\delta_{ps}\Big\} \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$L^{-}_{pqst} = \langle a^3\rangle\,\omega^3\,[(\delta_{pq}\delta_{st} + \delta_{pt}\delta_{sq})\,g_3 + \delta_{ps}\delta_{qt}2h_3] \tag{2.4}$$

$$(I^{t}_{pqst})^{+} = -\frac{l_q l_t}{\rho}\left\{-\frac{(l_p l_s - \delta_{ps})}{4c_t^2} + \frac{l_p l_s}{c_l^2 - c_t^2} + i\,\frac{(l_p l_s - \delta_{ps})\,\langle a\rangle\,q_t}{2c_t^2}\right\} \tag{2.5}$$

$$(I^{l}_{pqst})^{+} = -\frac{l_q l_t}{\rho}\left\{-\frac{l_p l_s - \delta_{ps}}{c_t^2 - c_l^2} + \frac{l_p l_s}{4c_l^2} - i\,\frac{l_p l_s}{2c_l^2}\,\langle a\rangle\,q_l\right\} \tag{2.6}$$

где

$$\langle a^2\rangle = 4\pi\int\limits_0^\infty \varphi(r)\,r\,dr,\qquad \langle a^3\rangle = 4\pi\int\limits_0^\infty \varphi(r)\,r^2 dr,\qquad \langle a\rangle = \int\limits_0^\infty \varphi(r)\,dr \tag{2.7}$$

Здесь $\omega = 2\pi f$ — циклическая частота, c_l и c_t — соответственно скорости звука продольной и поперечной волн в приближении Фойгта

$$c_l^2 = \frac{1}{\rho}\langle\alpha + 2\beta\rangle,\qquad c_t^2 = \frac{1}{\rho}\langle\beta\rangle \tag{2.8}$$

Величины g_i и h_i определены в работе [1] формулами (36).

Подставляя выражения (2.1) — (2.6) в формулу (1.2), находим

$$\begin{aligned} C^{-}_{il} = \frac{4\pi}{15}\,[g_0\,(2l_k l_m A^{sslm}_{ikpp} - l_k l_m A^{pqlm}_{ikpq}) - 5h_0 l_k l_m A^{pqlm}_{ikpq}] +{} \\ + \langle a^2\rangle\,\omega^2\Big\{\frac{g_0}{105c^2}\,[-l_k l_m A^{pqlm}_{ikpq} - 4l_k l_m A^{sslm}_{ppik} + 3l_k l_m l_q l_s A^{splm}_{ikpq} +{} \\ + 12 l_k l_m l_p l_q A^{sslm}_{ikpq}] + \frac{h_0}{15c^2}\,[l_k l_m A^{pqlm}_{ikpq} - 3l_k l_m l_q l_s A^{splm}_{ikpq}] +{} \\ + \frac{2g_2}{15}\,[3l_k l_m A^{pqlm}_{ikpq} + 4l_k l_m A^{sslm}_{ikpp}] + \frac{2h_2}{3}\,l_k l_m A^{pqlm}_{ikpq}\Big\} +{} \\ + i\,\langle a^3\rangle\,\omega^3\,[l_k l_m A^{sslm}_{ikpq} g_3 + l_k l_m A^{pqlm}_{ikpq}\,(g_3 + 2h_3)] \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} (C^{t}_{il})^{+} = -l_k l_m l_s l_t l_q l_p A^{stlm}_{ikpq}\left(\frac{5c_t^2 - c_l^2}{4\rho c_t^2\,(c_l^2 - c_t^2)} + i\,\frac{\langle a\rangle\,\omega}{2\rho c_t^3}\right) -{} \\ - l_k l_m l_t l_q A^{ptlm}_{ikpq}\left(\frac{1}{4\rho c_t^2} - i\,\frac{\langle a\rangle\,\omega}{2\rho c_t^3}\right) \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} (C_{ii}^{l})^{+} = -l_k l_m l_s l_t l_q l_p A^{stlm}_{ikpq}\left(\frac{5c_l^2 - c_t^2}{4\rho c_i^2\,(c_l^2 - c_t^2)} - i\,\frac{\langle a\rangle\,\omega}{2\rho c_l^3}\right) +{} \\ + l_k l_m l_t l_q A^{ptlm}_{ikpq}\,\frac{1}{\rho\,(c_i^2 - c_i^2)} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Величины $C_{il}{}^{t}$ и $C_{il}{}^{l}$ находятся из (2.9) соответствующей заменой $c \to c_t$ или $c \to c_l$.

3. Для вычисления различных сверток автокорреляционного тензора A_{ikpq}^{stlm}, определяющих тензор C_{il} согласно равенствам (2.9) — (2.11), воспользуемся явным значением этого тензора для орторомбической симметрии, найденным в работе [5] (учитывая, что коэффициент при $p_{\lambda\lambda}\delta_{ijkl}\delta_{pqrs}$ равен — $^{21}/_{5}$). После несложных, но громоздких выкладок, получим

$$l_{kmpq}A_{ikpq}^{sslm} = A_1 l_{il} + A_2\delta_{il}, \quad l_{km}A_{ikpp}^{sslm} = A_3 l_{il} + A_4\delta_{il}$$

$$l_{kmqs}A_{ikpq}^{splm} = A_5 l_{il} + A_6\delta_{il}, \quad l_{km}A_{ikpq}^{pqlm} = A_7 l_{il} + A_8\delta_{il} \tag{3.1}$$

$$l_{kmstpq}A_{ikpq}^{stlm} = A_9 l_{il} + A_{10}\delta_{il}$$

где

$$l_{kmp\ldots} = l_k l_m l_p \ldots$$

$$A_1 = 5/3A_2 = 1/63\,(3P_{\lambda\lambda} + 16P_{\lambda\mu} + 26P_{\lambda\nu} + 21P_{\mu\mu} + 70P_{\mu\nu} + 56P_{\nu\nu})$$

$$A_3 = 1/3A_4 = 1/45\,(P_{\lambda\lambda} + 6P_{\lambda\mu} + 8P_{\lambda\nu} + 9P_{\mu\mu} + 24P_{\mu\nu} + 16P_{\nu\nu})$$

$$A_5 = \frac{1}{15\cdot 7!!}\Big(112P_{\lambda\lambda} + 12\sum_n \lambda^{(n)}\lambda^{(n)} + 570P_{\lambda\mu} + 1070P_{\lambda\nu} + 665P_{\mu\mu} + 2660P_{\mu\nu} + 2415P_{\nu\nu}\Big)$$

$$A_6 = \frac{1}{15\cdot 7!!}\Big(24\sum_n \lambda^{(n)}\lambda^{(n)} + 14P_{\lambda\lambda} + 90P_{\lambda\mu} + 250P_{\lambda\nu} + 105P_{\mu\mu} + 420P_{\mu\nu} + 665P_{\nu\nu}\Big) \tag{3.2}$$

$$A_7 = \frac{1}{15\cdot 5!!}\Big(3\sum_n \lambda^{(n)}\lambda^{(n)} + 18P_{\lambda\lambda} + 110P_{\lambda\mu} + 160P_{\lambda\nu} + 165P_{\mu\mu} + 440P_{\mu\nu} + 340P_{\nu\nu}\Big)$$

$$A_8 = \frac{1}{15\cdot 5!!}\Big(9\sum_n \lambda^{(n)}\lambda^{(n)} + 4P_{\lambda\lambda} + 30P_{\lambda\mu} + 80P_{\lambda\nu} + 45P_{\mu\mu} + 120P_{\mu\nu} + 220P_{\nu\nu}\Big)$$

$$A_9 = \frac{1}{15\cdot 7!!}\Big(6\sum_n \lambda^{(n)}\lambda^{(n)} + 81P_{\lambda\lambda} + 390P_{\lambda\mu} + 780P_{\lambda\nu} + 455P_{\mu\mu} + 1820P_{\mu\nu} + 1820P_{\nu\nu}\Big)$$

$$A_{10} = \frac{1}{15\cdot 7!!}\Big(10\sum_n \lambda^{(n)}\lambda^{(n)} + 15P_{\lambda\lambda} + 90P_{\lambda\mu} + 180P_{\lambda\nu} + 105P_{\mu\mu} + 420P_{\mu\nu} + 420P_{\nu\nu}\Big)$$

$$P_{\lambda\mu} \equiv \frac{1}{2}\Big(3\sum_n^3 \lambda^{(n)}\mu^{(n)} - \sum_n^3 \lambda^{(n)}\sum_m^3 \mu^{(m)}\Big) \tag{3.3}$$

Упругие коэффициенты $\lambda^{(n)}$, $\mu^{(n)}$ и $\nu^{(n)}$ выражаются через матричные упругие постоянные при помощи следующих формул статьи [5]:

$$\lambda^{(1)} = c_{11} + c_{23} + 2c_{44} - (c_{12} + c_{13} + 2c_{55} + 2c_{66})$$

$$\lambda^{(2)} = c_{22} + c_{13} + 2c_{55} - (c_{12} + c_{23} + 2c_{44} + 2c_{66})$$

$$\lambda^{(3)} = c_{33} + c_{12} + 2c_{66} - (c_{13} + c_{23} + 2c_{44} + 2c_{55})$$

$$2\mu^{(1)} = c_{12} + c_{13} - c_{23}, \quad 2\mu^{(2)} = c_{12} + c_{23} - c_{13}$$

$$2\mu^{(3)} = c_{13} + c_{23} - c_{12}, \quad 2\nu^{(1)} = c_{55} + c_{66} - c_{44}$$

$$2\nu^{(2)} = c_{44} + c_{66} - c_{55}, \quad 2\nu^{(3)} = c_{44} + c_{55} - c_{66} \tag{3.4}$$

Если теперь подставить выражения (3.1) в равенства (2.9) — (2.11), то каждое из этих последних равенств можно привести к виду

$$C_{il} = [\alpha^* (\omega) + \beta^* (\omega)]\, l_i l_l + \beta^* (\omega)\, \delta_{il} \tag{3.5}$$

Действительные α_1 и β_1 и мнимые α_2 и β_2 части эффективных коэффициентов Ляме α^* (ω) и β^* (ω) будут определять коэффициенты поглощения и дисперсию скорости

$$\gamma_t (\omega) = \frac{\omega\beta_2 (\omega)}{2\rho c_t^3}, \qquad \gamma_l (\omega) = \frac{\omega\, [\alpha_2 (\omega) + 2\beta_2 (\omega)]}{2\rho c_l^3} \tag{3.6}$$

$$v_t (\omega) = c_t \left[1 + \frac{\beta_1 (\omega) + \omega\, (d\beta_1 (\omega) / d\omega)}{2\rho c_t^2}\right]$$

$$v_l (\omega) = c_l \left[1 + \frac{\alpha_1 (\omega) + 2\beta_1 (\omega) + \omega\, (d / d\omega)\, (\alpha_1 (\omega) + 2\beta_1 (\omega))}{2\rho c_l^2}\right] \tag{3.7}$$

Отсюда, подставляя явные значения α_i и β_i, находим

$$\gamma_l^- = \frac{4\pi^3 \langle a^3\rangle f^4}{5\rho^2 c_l^3} \left(\frac{B_1}{2c_l^5} + \frac{B_2}{c_t^5}\right), \qquad \gamma_t^- = \frac{4\pi^3 \langle a^3\rangle f^4}{5\rho^2 c_t^3} \left(\frac{B_3}{2c_l^5} + \frac{B_4}{c_t^5}\right) \tag{3.8}$$

$$v_l^- (f) = c_l (1 - a_1 - a_2 \langle a^2\rangle f^2), \qquad v_t^- = c_t (1 - a_3 - a_4 \langle a^2\rangle f^2) \tag{3.9}$$

$$\gamma_l^+ = \frac{\pi^2 \langle a\rangle f^2}{\rho^2 c_l^6} B_9, \qquad \gamma_t^+ = \frac{\pi^2 \langle a\rangle f^2}{\rho^2 c_t^6} B_{10} \tag{3.10}$$

$$v_l^+ = c_l (1 + a_5), \qquad v_t^+ = c_t (1 + a_6) \tag{3.11}$$

$$a_1 = \frac{11}{10\rho^2 c_l^2} \left(\frac{B_1}{c_l^2} + \frac{2B_2}{c_t^2}\right), \qquad a_2 = \frac{\pi}{70\rho^2 c_l^2} \left(\frac{B_5}{c_l^4} + \frac{B_6}{c_l^2 c_t^2} + \frac{42B_2}{c_t^4}\right)$$

$$a_3 = \frac{1}{10\rho^2 c_t^2} \left(\frac{B_3}{c_l^2} + \frac{2B_4}{c_t^2}\right), \qquad a_4 = \frac{\pi}{70\rho^2 c_t^2} \left(\frac{21B_3}{c_l^4} + \frac{2B_7}{c_l^2 c_t^2} + \frac{B_8}{c_t^4}\right) \tag{3.12}$$

$$a_5 = \frac{4c_l^2 B_{11} - (5c_l^2 - c_t^2)\, B_{12}}{8\rho^2 c_l^4\, (c_l^2 - c_t^2)}, \qquad a_6 = - \frac{(5c_t^2 - c_l^2)\, B_{13} + (c_l^2 - c_t^2)\, B_{14}}{8\rho^2 c_t^4\, (c_l^2 - c_t^2)}$$

Здесь

$$B_1 = {}^1/_3 (2A_8 + 2A_7 + {}^4/_3 A_4), \qquad B_2 = {}^1/_6 (3A_8 + 3A_7 - {}^4/_3 A_4)$$

$$B_3 = {}^1/_3 (2A_8 + A_4), \qquad B_4 = {}^1/_6 (3A_8 - A_4)$$

$$B_5 = 10 (A_7 + A_8) + 12 (A_5 + A_6) + {}^{20}/_3 A_4 + 16A_2; \qquad B_6 = 9 (A_5 + A_6) - 3 (A_7 + A_8) + {}^8/_3 A_4 - 16A_2 \tag{3.13}$$

$$B_7 = 6A_6 + 3A_2 - 2A_8 - A_4, \qquad B_8 = 18A_8 + 9A_6 - 5A_4 - 6A_2$$

$$B_9 = A_9 + A_{10}, \qquad B_{10} = A_6 - A_{10}$$

$$B_{11} = A_5 + A_6, \qquad B_{12} = B_9$$

$$B_{13} = A_{10}, \qquad B_{14} = A_6$$

Константы A_{ik} вычисляются по формулам (3.2) — (3.4). Осредненные постоянные Ляме, определяющие согласно (2.8) скорости ультразвука c_l и c_t, равны

$$\langle\alpha\rangle = \sum_n^3 ({}^1/_{15}\lambda^{(n)} + {}^2/_3 \mu^{(n)}), \qquad \langle\beta\rangle = \sum_n^3 ({}^1/_{15}\lambda^{(n)} + {}^2/_3 \nu^{(n)}) \tag{3.14}$$

Упругие коэффициенты $\lambda^{(n)}$, $\mu^{(n)}$ и $\nu^{(n)}$ даются соотношениями (3.4).

Полученный результат (3.8) — (3.12), следуя обозначениям работы [2], можно записать через двухиндексные упругие постоянные c_{ik} с помощью соотношений (3.13), (3.2), (3.3) и (3.4) следующим образом:

$$
\begin{aligned}
B_1 &= {}^8/_{675}\, P^2 + {}^8/_{135}\,(4b_1 + 2b_2 + 3b_3 + b_4)\\
B_2 = B_3 &= {}^2/_{225}\, P^2 + {}^1/_{135}\,(24b_1 + 7b_2 + 13b_3 + b_4) \qquad (3.15)\\
B_4 &= {}^1/_{150}\, P^2 + {}^1/_{90}\,(12b_1 + b_2 + 4b_3 - 2b_4)\\
B_5 &= {}^8/_{1575}\,(53P^2 + 1000b_1 + 665b_2 + 630b_3 + 280b_4 + 120b_5 - 180b_6)\\
B_6 = 4B_7 &= {}^4/_{1575}\,(6P^2 + 30b_1 + 70b_2 - 140b_3 - 35b_4 + 75b_5 - 165b_6)\\
B_8 &= {}^1/_{105}\,(30P^2 + 591b_1 + 49b_2 + 196b_3 - 98b_4 - 3b_5 - 6b_6)\\
B_9 = B_{12} &= {}^{16}/_{4725}\,(P^2 + 20b_1 + 20b_2 + 5b_3 + 5b_4 + 10b_5 - 10b_6)\\
B_{10} &= {}^1/_{4725}\,(14P^2 + 295b_1 + 25b_2 + 100b_3 - 50b_4 + 5b_5 + 10b_6)\\
B_{11} &= {}^2/_{1575}\,(6P^2 + 100b_1 + 75b_2 + 25b_3 + 15b_4 + 30b_5 - 50b_6)\\
B_{13} &= {}^1/_{945}\,(2P^2 + 28b_1 + 13b_2 + 7b_3 + b_4 + 2b_5 - 14b_6)\\
B_{14} &= {}^1/_{1575}\,(8P^2 + 145b_1 + 30b_2 + 45b_3 - 15b_4 + 5b_5 - 20b_6)
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
P &= (c_{11} + c_{22} + c_{33}) - (c_{12} + c_{13} + c_{23}) - 2(c_{44} + c_{55} + c_{66})\\
b_1 &= (c_{44} + c_{55} + c_{66})^2 - 3\,(c_{44}c_{55} + c_{55}c_{66} + c_{66}c_{44})\\
b_2 &= (c_{11} + c_{22} + c_{33})^2 - 3\,(c_{11}c_{22} + c_{22}c_{33} + c_{33}c_{11}) \qquad (3.16)\\
b_3 &= (c_{12} + c_{13} + c_{23})^2 - 3(c_{12}c_{13} + c_{13}c_{23} + c_{23}c_{12})\\
b_4 &= c_{11}(c_{12} + c_{13} - 2c_{23}) + c_{22}(c_{12} + c_{23} - 2c_{13}) + c_{33}\,(c_{13} + c_{23} - 2c_{12})\\
b_5 &= c_{11}\,(c_{55} + c_{66} - 2c_{44}) + c_{22}\,(c_{44} + c_{66} - 2c_{55}) + c_{33}\,(c_{44} + c_{55} - 2c_{66})\\
b_6 &= c_{23}\,(c_{55} + c_{66} - 2c_{44}) + c_{13}\,(c_{44} + c_{66} - 2c_{55}) + c_{12}\,(c_{44} + c_{55} - 2c_{66})
\end{aligned}
$$

причем

$$
\begin{aligned}
\langle\alpha\rangle &= {}^1/_{15}\,[(c_{11} + c_{22} + c_{33}) + 4(c_{12} + c_{13} + c_{23}) - 2(c_{44} + c_{55} + c_{66})]\\
\langle\beta\rangle &= {}^1/_{15}\,[(c_{11} + c_{22} + c_{33}) - (c_{12} + c_{13} + c_{23}) + 3(c_{44} + c_{55} + c_{66})] \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

4. Найденные в данной работе выражения для коэффициентов рассеяния длинных волн (3.8) в точности совпадают с результатами работы [2] (см. также [6]); если принять, что $\langle a^3\rangle = T$, где T — средний объем реального зерна. Это видно из выражений (3.8), если взять $B_1, \ldots, B_4$ из (3.15). Чтобы выразить дисперсию и коэффициенты рассеяния коротких волн (см. выражения (3.9) ÷ (3.12), (3.15) и (3.16)), к параметрам $P, b_1, \ldots, b_4$ работы [2] добавлены еще два параметра b_5 и b_6.

Результаты для тетрагональной симметрии ($c_{22} = c_{11}$, $c_{23} = c_{13}$, $c_{55} = c_{44}$) можно получить из формул (3.8) — (3.12), (3.15) и (3.16), если воспользоваться соотношениями

$$
\begin{aligned}
&P = \lambda_3 + 3\lambda_6, \quad b_1 = \lambda_5^2,\ b_2 = (\lambda_3 + 2\lambda_4 + 4\lambda_5)^2, \quad b_3 = \lambda_4^2 \qquad (4.1)\\
&b_4 = 2\lambda_4\,(\lambda_3 + 2\lambda_4 + 4\lambda_5), \quad b_5 = 2\lambda_5(\lambda_3 + 2\lambda_4 + 4\lambda_5),\ b_6 = -2\lambda_4\lambda_5
\end{aligned}
$$

где λ_i — одноиндексные упругие постоянные, определяемые, согласно [5], выражениями

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1 = c_{12},\ \lambda_2 = c_{66},\ \lambda_3 = c_{33} - c_{11} - 2\,(c_{13} - c_{12} + 2c_{44} - 2c_{66}),\\
&\lambda_4 = c_{13} - c_{12},\ \lambda_5 = c_{44} - c_{66},\ \lambda_6 = c_{11} - c_{12} - 2c_{66} \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

Тогда для коэффициентов B_{ik} имеем

$$B_1 = {}^8/_{675}\,(11\lambda_3^2 + 75\lambda_4^2 + 180\lambda_5^2 + 9\lambda_6^2 + 50\lambda_3\lambda_4 + 80\lambda_3\lambda_5 + 6\lambda_3\lambda_6 + 200\lambda_4\lambda_5)$$

$$B_2 = B_3 = {}^1/_{675}\,(41\lambda_3^2 + 225\lambda_4^2 + 680\lambda_5^2 + 54\lambda_6^2 + 150\lambda_3\lambda_4 + 280\lambda_3\lambda_5 + 36\lambda_3\lambda_6 + 600\lambda_4\lambda_5)$$

$$B_4 = {}^1/_{450}\,(8\lambda_3^2 + 140\lambda_5^2 + 27\lambda_6^2 + 40\lambda_3\lambda_5 + 18\lambda_3\lambda_6)$$

$$B_5 = {}^8/_{1575}\,(718\lambda_3^2 + 4410\lambda_4^2 + 12600\lambda_5^2 + 477\lambda_6^2 + 3220\lambda_3\lambda_4 + 5560\lambda_3\lambda_5 + 318\lambda_3\lambda_6 + 13720\lambda_4\lambda_5)$$

$$B_6 = 4B_7 = {}^8/_{1575}\,(38\lambda_3^2 + 875\lambda_5^2 + 27\lambda_6^2 + 105\lambda_3\lambda_4 + 355\lambda_3\lambda_5 + 18\lambda_3\lambda_6 + 735\lambda_4\lambda_5) \quad (4.3)$$

$$B_8 = {}^1/_{105}\,(79\lambda_3^2 + 1351\lambda_5^2 + 270\lambda_6^2 + 386\lambda_3\lambda_5 + 180\lambda_3\lambda_6)$$

$$B_9 = B_{12} = {}^{16}/_{4725}\,(21\lambda_3^2 + 105\lambda_4^2 + 420\lambda_5^2 + 9\lambda_6^2 + 90\lambda_3\lambda_4 + 180\lambda_3\lambda_5 + 6\lambda_3\lambda_6 + 420\lambda_4\lambda_5)$$

$$B_{10} = {}^1/_{1575}\,(13\lambda_3^2 + 245\lambda_5^2 + 42\lambda_6^2 + 70\lambda_3\lambda_5 + 28\lambda_3\lambda_6)$$

$$B_{11} = {}^2/_{1575}\,(81\lambda_3^2 + 385\lambda_4^2 + 1540\lambda_5^2 + 54\lambda_6^2 + 330\lambda_3\lambda_4 + 660\lambda_3\lambda_5 + 36\lambda_3\lambda_6 + 1540\lambda_4\lambda_5)$$

$$B_{13} = {}^1/_{315}\,(5\lambda_3^2 + 21\lambda_4^2 + 84\lambda_5^2 + 6\lambda_6^2 + 18\lambda_3\lambda_4 + 36\lambda_3\lambda_5 + 4\lambda_3\lambda_6 + 84\lambda_4\lambda_5)$$

$$B_{14} = {}^1/_{1575}\,(38\lambda_3^2 + 105\lambda_4^2 + 665\lambda_5^2 + 72\lambda_6^2 + 90\lambda_3\lambda_4 + 250\lambda_3\lambda_5 + 48\lambda_3\lambda_6 + 420\lambda_4\lambda_5)$$

В этом случае

$$\langle\alpha\rangle = {}^1/_{15}\,(15\lambda_1 + \lambda_3 + 10\lambda_4 + 3\lambda_6), \quad \langle\beta\rangle = {}^1/_{15}\,(15\lambda_2 + \lambda_3 + 10\lambda_5 + 3\lambda_6) \quad (4.4)$$

Результаты для гексагональной симметрии можно получить из равенств (3.8) — (3.12), (4.3) и (4.4), если в формулах (4.3), (4.4) и (4.2) положить $\lambda_6 = 0$. При этом для длинноволнового приближения продольных и поперечных волн, а также для коротковолнового приближения продольных волн получаются известные выражения коэффициента поглощения [3] (см. также [6]).

Результаты для кубической симметрии ($c_{13} = c_{12}$, $c_{66} = c_{44}$, $c_{33} = c_{11}$) получаются, если учесть, что в этом случае $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$. Вычисление дает

$$\gamma_l^- = \frac{8\pi^3\lambda_6^2\langle a^3\rangle f^4}{375\rho^2 c_l^3}\left(\frac{2}{c_l^5} + \frac{3}{c_t^5}\right), \quad \gamma_t^- = \frac{2\pi^3\lambda_6^2\langle a^3\rangle f^4}{125\rho^2 c_t^3}\left(\frac{2}{c_l^5} + \frac{3}{c_t^5}\right) \quad (4.5)$$

$$v_l^-(f) = c_l\,(1 - a_1 - a_2\langle a^2\rangle f^2), \quad v_t^-(f) = c_t\,(1 - a_3 - a_4\langle a^2\rangle f^2) \quad (4.6)$$

$$\gamma_l^+ = \frac{16\pi^2\lambda_6^2\langle a\rangle f^2}{525\rho^2 c_l^6}, \quad \gamma_l^+ = \frac{2\pi^2\lambda_6^2\langle a\rangle f^2}{75\rho^2 c_t^6} \quad (4.7)$$

$$v_l^+ = c_l\,(1 + a_5), \quad v_t^+ = c_t\,(1 + a_6) \quad (4.8)$$

$$a_1 = \frac{2\lambda_6^2}{375\rho^2 c_l^2}\left(\frac{2}{c_l^2} + \frac{3}{c_t^2}\right), \quad a_2 = \frac{2\pi\lambda_6^2}{6125\rho^2 c_l^2}\left(\frac{106}{c_l^4} + \frac{6}{c_l^2 c_t^2} + \frac{147}{c_t^4}\right) \quad (4.9)$$

$$a_3 = \frac{\lambda_6^2}{250\rho^2 c_t^2}\left(\frac{2}{c_l^2} + \frac{3}{c_t^2}\right), \quad a_4 = \frac{3\pi\lambda_6^2}{6125\rho^2 c_t^2}\left(\frac{49}{c_l^4} + \frac{2}{c_l^2 c_t^2} + \frac{75}{c_t^4}\right) \quad (4.10)$$

$$a_5 = \frac{2\lambda_6^2\,(4c_l^2 + c_t^2)}{525\rho^2 c_l^4\,(c_l^2 - c_t^2)}, \quad a_6 = -\lambda_6^2\,\frac{13c_t^2 + 7c_l^2}{2100\rho^2 c_t^4\,(c_l^2 - c_t^2)} \quad (4.11)$$

$$\lambda_6 = c_{11} - c_{12} - 2c_{44}, \quad \langle\alpha\rangle = {}^1/_5\,(c_{11} + 4c_{12} - 2c_{44}), \quad \langle\beta\rangle = {}^1/_5\,(c_{11} - c_{12} + 3c_{44}) \quad (4.12)$$

Из соотношений (3.8) — (4.12) видно, что коэффициенты поглощения и скорости волн вычисляются для орторомбической симметрии через семь параметров (P^2, $b_1, \ldots, b_6$), каждый из которых представляет собой квадратичную функцию двухиндексных упругих коэффициентов c_{ik}, для тетрагональной симметрии — через четыре параметра ($\lambda_3, \ldots, \lambda_6$), для гексагональной — через три ($\lambda_3, \ldots, \lambda_5$) и для кубической — через один (λ_6), т. е. число указанных параметров на два меньше, чем число независимых упругих постоянных c_{ik} для данной симметрии.

5. Из полученных результатов видно, что коэффициент ослабления волн существенно зависит от размеров зерен поликристалла. В случае длинных волн эта зависимость определяется фактором $\langle a^3 \rangle$, а в случае коротких — величиной $\langle a \rangle$. Для сравнения результатов теоретического расчета с экспериментом необходимо перейти от величин $\langle a^3 \rangle$ и $\langle a \rangle$ к экспериментально измеряемым величинам — среднему числу зерен, приходящихся на единицу площади шлифа, или эквивалентной характеристике — среднему диаметру зерна в плоскости шлифа (диаметр изображения). В общем случае эту задачу решить не удается. Однако очевидно, что масштаб корреляций в плоскости шлифа α связан с объемным масштабом корреляций a при помощи некоторого числового множителя k. Тогда будем иметь

$$\langle a \rangle = k_1 k\alpha, \qquad \langle a^2 \rangle = k_2 k^2 \alpha^2, \qquad \langle a^3 \rangle = k_3 k^3 \alpha^3 \tag{5.1}$$

Коэффициенты k_i для экспоненциальной и гауссовой зависимостей координатной части корреляционных функций будут соответственно равны [7]

$$k_1 = 1, \qquad k_2 = 4\pi, \qquad k_3 = 8\pi \qquad (\varphi = \exp - r / a) \tag{5.2}$$

$$k_1 = {}^1/_2 \sqrt{\pi}, \qquad k_2 = 2\pi, \qquad k_3 = \sqrt{\pi^3} \qquad (\varphi = \exp - r^2/a^2) \tag{5.3}$$

Отсюда видно, что коэффициенты k_1 и k_3, определяющие коротко- и длинноволновую асимптотики коэффициента ослабления волн, могут заметно изменяться при переходе от одной структуры к другой. Так, переход от экспоненциальной к гауссовой зависимости для $\varphi(r)$ приводит к изменению k_3 в 4.5 раза. Коэффициент k также будет структурно чувствительным. Для простейшей структуры — сфероидальных графитовых выделений в чугуне [8] — отношение среднего диаметра зерна к диаметру изображения составляет 1.45. К такому же результату приводит расчет на ЭЦВМ квазисферических зерен поликристалла [9]. В то же время для зерен с произвольной формой, например иглообразной, можно ожидать, что отношение средних диаметров зерна и изображения будет иным [8].

Из приведенных цифровых оценок следует, что можно ожидать совпадения теоретической и экспериментальной кривых с точностью до постоянного множителя, определяющегося структурой. Величина этого множителя может составлять несколько единиц. Сопоставление с экспериментом длинноволновой асимптотики коэффициента рассеяния выполнено в работе [6]. Теоретические формулы, использовавшиеся для проверки в этой работе, получаются из выведенных здесь выражений длинноволновой асимптотики коэффициента рассеяния, если принять $k_3 k^3 = 24$ и $\alpha = r_{50}$, где r_{50} — радиус, для которого 50% изображений зерен имеет диаметр меньший, чем r_{50}.

Отметим, что сопоставление с экспериментом асимптотик длинных и коротких волн позволяет сделать заключения о величине отношения k_3 / k_1 и тем самым дает косвенную возможность проверить выбор функции $\varphi(r)$.

Поступила 26 VIII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Лифшиц И. М., Пархомовский Г. Д. К теории распространения ультразвуковых волн в поликристаллах. ЖЭТФ, 1950, т. 20, вып. 2.
2. Bhatia A. B., Moore B. A. Scattering of high-frequency sound waves in polycrystalline materials. J. Acoust. Soc. America, 1959, vol. 31, No. 8.
3. Меркулов Л. Г. Исследование рассеяния ультразвука в металлах. Ж. техн. физ., 1956, т. 26, вып. 1.
4. Бурсиан Э. В., Рычгорский В. В., Гиршберг Я. Г. Дисперсия в титанате бария в миллиметровом диапазоне выше температуры перехода. Физика твердого тела, 1971, т. 13, вып. 2.
5. Фокин А. Г., Шермергор Т. Д. Корреляционные функции упругого поля квазиизотропных твердых тел. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
6. Пападакис Э. Затухание ультразвука, обусловленное рассеянием в поликристаллических средах. В сб. «Физическая акустика», т. 4, ч. Б, М., «Мир», 1970.
7. Усов А. А., Фокин А. Г., Шермергор Т. Д. Дисперсия упругих волн в композиционных материалах. Сборник научных трудов по проблемам микроэлектроники (физ.-мат. серия), вып. 3, М., Моск. ин-т электрон. техн., 1969.
8. Салтыков С. А. Стереометрическая металлография. М., Металлургиздат, 1958.
9. Papadakis E. P. From micrograph to grain — size distribution with ultrasonic applications. J. Appl. Phys., 1964, vol. 35, No. 5.