

ЛИТЕРАТУРА

1. Blackburn J. H., Seely L. B. Source of the light recorded in photographs of shocked granular pressings.— *Nature*, 1962, vol. 194, N 4826.
2. Blackburn J. H., Seely L. B. Light emitted from shocked granular sodium chloride in a vacuum.— *Nature*, 1964, vol. 202, N 4929.
3. Нестеренко В. Ф. Электрические явления при ударном нагружении металлов и их связь с параметрами ударного сжатия. Автореф. дис. на соиск. учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1974.
4. Беляков Г. В. Ударная деформация зернистых сред.— *ДАН СССР*, 1974, т. 218, № 6.
5. Беляков Г. В., Лифшиц Л. Д., Родионов В. Н. Ударная деформация неоднородной среды, моделируемой набором стальных шариков.— *Изв. АН СССР. Физика Земли*, 1974, № 10.
6. Куцовский Е. Я., Ставер А. М. О переносе вещества при ударном сжатии в цилиндрических ампулах.— *ФГВ*, 1975, т. 11, № 3.
7. Нестеренко В. Ф. Электрические эффекты при ударном нагружении контакта металлов.— *ФГВ*, 1975, т. 11, № 3.
8. Нестеренко В. Ф. Ударное сжатие многокомпонентных материалов.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 29. Механика взрывных процессов. Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1977.
9. Беляков Г. В., Родионов В. Н., Самосадный В. П. О разогреве пористого вещества при ударном сжатии.— *ФГВ*, 1977, т. 13, № 4.
10. Роман О. В., Нестеренко В. Ф., Пикус Н. М. Влияние размера частиц порошка на процесс взрывного прессования.— *ФГВ*, 1979, т. 15, № 5.
11. Taylor V. C., Ervin L. H. Separation of ignition and buildup to detonation in pressed TNT.— In: Proc. of the 6 th Symp. (Internat.) on Detonation. Office of Naval Research ACR-221, 1976.
12. Howe P., Frey R., Taylor V. C., Boyle V. Shock initiation and the critical energy concept.— In: Proc. of the 6 th Symp. (Internat.) on Detonation. Office of Naval Research ACR-221, 1976.
13. Carroll M. M., Holt A. C. Static and dynamic pore-collapse relations for ductile porous materials.— *J. Appl. Phys.*, 1972, vol. 43, N 4.
14. Carroll M. M., Holt A. C. Spherical model calculation for ductile porous materials.— In: Proc. of the Internat. Symp. on Pore Structure and Properties of Materials. Vol. 2. Pt 2. Prague: Academia, 1973.
15. Kim K. Shock sensitivity of energetic materials.— In: Proc. of the 1980 JANNAF Propulsion Systems Hazards Subcommittee Meeting. Vol. 1. CPIA Publication 330.
16. Хасанов Б. А., Борисов А. А., Ермолаев Б. С., Коротков А. П. Вязкопластический механизм образования «горячих точек» в твердых гетерогенных ВВ.— В кн.: Детонация. Материалы II Всесоюз. совещ. по детонации. Вып. 2. Черноголовка, 1981.
17. Khasainov B. A., Borisov A. A., Ermolaev B. S. On the mechanism of shock wave predetonation processes in porous high explosives.— In: 8th Internat. Colloquium on Gasdynamics of Explosions and Reactive Systems. Minsk, 1981.
18. Дунин С. З., Сурков В. В. Эффекты диссипации энергии и влияние плавления на ударное сжатие пористых тел.— *ПМТФ*, 1982, № 1.
19. Григорьев В. Г., Дунин С. З., Сурков В. В. Захлопывание сферической поры в вязкопластическом материале.— *Изв. АН СССР. МТТ*, 1981, № 1.

УДК 531;621.316

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕРМОУПРУГОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ С РЕЛАКСАЦИЕЙ ДАВЛЕНИЯ

А. М. ИСКОЛЬДСКИЙ, Е. И. РОМЕНСКИЙ

(Новосибирск)

В [1] на основе максвелловской модели нелинейно-упругой среды с релаксацией касательных напряжений [2] рассмотрена динамика импульсного нагрева металла электрическим током до предплавления температур. При этом было дано объяснение ряду экспериментальных закономерностей, которые в рамках упрощенных моделей представлялись как аномальные. В [1] принималось, что объемные деформации происходят упруго.

В данной работе сформулирована модель с релаксацией объемных деформаций в жидкости (сдвиговые напряжения не учитываются), которая позволяет дать естественную интерпретацию электрического взрыва как явления, возникающего при необъяснимо высоком уровне удельного энергосодержания среды. В частности, при нагреве медного проводника в электрическом контуре, обеспечивающем скорость роста температуры $dT/dt \sim 1,5 \cdot 10^{10}$ град/с, начальная точка электрического взрыва при-

ходится на энергию $Q_* \sim 3,2$ кДж/г ($T \sim 6000$ К), тогда как кипение в равновесных условиях ($p = 1013$ гПа) начинается при $Q_{\text{кип}} \sim 1,35$ кДж/г ($T \sim 2900$ К).

Подобный результат нельзя объяснить в рамках теории метастабильных состояний (в частности, теории нуклеации Зельдовича — Фольмера, см. также [3]), если использовать правдоподобные оценки для работы образования критического зародыша и величины предэкспоненты в универсальном выражении для потока зародышей в область размеров, больших критического.

Учет объемной релаксации представляется необходимым расширением модели со сдвиговой релаксацией для области и более низких (предплавленных) температур.

1. Рассмотрим сплошную среду, деформации в которой сопровождаются только изменением объема. Тензор напряжений в данном случае описывается скаляром — давлением. В состоянии термодинамического равновесия такая среда описывается двумя термодинамическими параметрами, например плотностью ρ и энтропией S .

Предположим теперь, что в среде может происходить необратимое изменение объема, связанное с рождением и исчезновением дефектов. Введем значение плотности ρ_* , которое примет элемент среды после установления термодинамического равновесия, имеющий в данный момент времени плотность ρ . Характерное время установления равновесия обозначим τ . Таким образом, введена новая термодинамическая переменная ρ_* , и в соответствии с этим для внутренней энергии имеет место тождество

$$(1.1) \quad dE = -p dv + T dS + q dv_*,$$

где $v = 1/\rho$ — удельный объем; $v = 1/\rho_*$ — удельный объем в равновесном состоянии; $p = -E_v$ — давление; $T = E_s$ — температура.

Уравнения динамики такой среды вытекают из законов сохранения массы, импульса, энергии и дополняются также релаксационным уравнением

$$(1.2) \quad \rho du_i/dt + \partial p/\partial x_i = 0, \quad \rho dE/dt + p(\partial u_1/\partial x_1 + \partial u_2/\partial x_2 + \partial u_3/\partial x_3) = 0, \\ d\rho/dt + \rho(\partial u_1/\partial x_1 + \partial u_2/\partial x_2 + \partial u_3/\partial x_3) = 0, \quad d\rho_*/dt = -\rho_* \ln(\rho_*/\rho)/\tau,$$

где u_i — вектор скорости; $d/dt = \partial/\partial t + u_\alpha \partial/\partial x_\alpha$ — производная вдоль траектории движения.

В последнем уравнении системы (1.2) постулируется релаксация плотности к своему равновесному значению.

Отметим, что для параметра $\xi = \ln(\rho_*/\rho)$ из (1.2) следует релаксационное уравнение

$$d\xi/dt = \partial u_1/\partial x_1 + \partial u_2/\partial x_2 + \partial u_3/\partial x_3 - \xi/\tau.$$

Теперь не v_* , а ξ характеризует отклонение среды от термодинамического равновесия: $E = E(\rho, S, \xi)$.

Из (1.2) следует уравнение эволюции энтропии

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\xi E_\xi}{(E_S \tau)}.$$

Таким образом, здесь энтропия не сохраняется, и процесс становится необратимым. Требование неубывания энтропии накладывает ограничения на зависимость E от ξ в виде неравенства ($E_S = T > 0$, $\tau > 0$)

$$(1.3) \quad \xi E_\xi \geq 0.$$

Необходимо выбрать зависимость E от ξ таким образом, чтобы в какой-то мере описать экспериментальные факты, которые будут обсуждаться ниже. В качестве простейшей такой зависимости возьмем

$$(1.4) \quad E(\rho, S, \xi) = E^0(\rho, S) + \frac{1}{2} M(\rho, S) \xi^2.$$

Очевидно, (1.4) удовлетворяет (1.3), если $M(\rho, S) > 0$, что в дальнейшем и будет предполагаться. Давление и температура, вычисленные по (1.4), имеют вид

$$(1.5) \quad p = \rho^2 \bar{E}_\rho = \rho^2 E_\rho^0 + \frac{1}{2} \rho^2 M_\rho \xi^2 - \rho M \xi, \quad T = E_S = E_S^0 + \frac{1}{2} M_S \xi^2.$$

В данной работе в первую очередь рассматривается поведение металлов при импульсном нагреве. Рассматриваемая модель соответствует физической ситуации, в которой характерное время формирования термодинамически равновесной атомной конфигурации, связанное с динамикой (рождением и взаимной ориентацией) дефектов, существенно больше фонового. При этом возникает неравновесное «промежуточное» поле деформаций, характеризуемое новой термодинамической координатой ξ . В отсутствие внешних воздействий поле ξ релаксирует, а запасенная в нем энергия перераспределяется по равновесным степеням свободы. Данная модель является моделью сплошной среды, если каждый ее элемент содержит значительное число дефектов, а размер элемента превышает расстояние между дефектами.

Модель предназначается, в частности, для описания металлов в области предплавленных температур. В этой области основным типом термодинамически равновес-

ных дефектов являются вакансии, на которые приходится до нескольких процентов удельного объема. Степень дефектности жидкости еще выше.

2. Для замыкания модели необходимо определить внутреннюю энергию $E(\rho, S, \xi)$ и время релаксации τ . Рассмотрим некоторые примеры, которые позволяют получить предварительную информацию о модуле M в формуле (1.4) и о времени τ , которое может быть функцией состояния среды.

Рассмотрим задачу об импульсном нагреве элемента среды. Предположим, что элемент достаточно мал, так что градиентами всех параметров, описывающих состояние среды, можно пренебречь. Пусть внешнее давление равно нулю, а температура внутри элемента меняется по заданному закону. Этот процесс можно описать уравнениями (предполагаем, что модуль M в (1.4) не зависит от ρ и S)

$$(2.1) \quad T(\rho, S) = T(t), \quad p(\rho, S, \xi) = 0,$$

$$d \ln (\rho_*/\rho_0)/dt = - \ln (\rho_*/\rho)/\tau.$$

Здесь ρ_0 — начальная плотность среды при $t = 0$; $T(t)$ — заданная функция; $p = \rho^2 E_\rho(\rho, S, \rho_*)$ — давление, определяемое по (1.5).

Дифференцируя первые два уравнения (2.1) по t , используя вытекающее из (1.5) с $M = \text{const}$ соотношение

$$\frac{\rho_*}{\rho} p_{\rho_*} = -M,$$

систему (2.1) перепишем в виде

$$(2.2) \quad \frac{d \ln \rho/\rho_0}{dt} = -\alpha \dot{T} - \frac{M}{K} \frac{\xi}{\tau};$$

$$(2.3) \quad \frac{d\xi}{dt} = \alpha \dot{T} - \frac{K-M}{K} \frac{\xi}{\tau};$$

$$(2.4) \quad \frac{dS}{dt} = \frac{c_p}{T} \dot{T} + \alpha M \frac{\xi}{\tau},$$

где c_p , α , K — соответственно теплоемкость при постоянном давлении, коэффициент объемного расширения, изотермический модуль объемного сжатия, вычисленные при помощи (1.1) при $\rho_* = \text{const}$, т. е. в среде с равновесной концентрацией дефектов. В первом приближении их можно считать соответствующими бездефектной среде.

Далее будем считать $\dot{T} = \text{const}$, $\tau = \text{const}$. Вначале рассмотрим случай «сверхбыстрого» нагрева элемента, предполагая, что время нагрева $t_H \ll \tau$. Обозначим $T_{\text{max}} = \dot{T} t_H$. Из уравнений (2.2), (2.3) получим при $t = t_H$

$$\xi_{\text{max}} = \alpha T_{\text{max}}, \quad \ln \rho_{\text{max}}/\rho_0 = -\alpha T_{\text{max}},$$

откуда $\rho_*|_{t=t_H} = \rho_0$, т. е. быстрый нагрев не приводит к рождению дефектов.

Теперь мгновенно прекратим нагрев, считая $\dot{T} = 0$, и будем следить за процессом релаксации — процессом установления равновесной концентрации дефектов.

Из (2.2)–(2.4) следует

$$\xi = \xi_{\text{max}} \exp\left(\frac{K-M}{K} \frac{t_H - t}{\tau}\right),$$

$$\ln (\rho/\rho_0) = \ln (\rho_{\text{max}}/\rho_0) - \xi_{\text{max}} \frac{M}{K-M} \left(1 - \exp\left(\frac{K-M}{K} \frac{t_H - t}{\tau}\right)\right),$$

$$S - S|_{t=t_H} + \xi_{\text{max}} \frac{\alpha MK}{K-M} \left(1 - \exp\left(\frac{K-M}{K} \frac{t_H - t}{\tau}\right)\right).$$

Отсюда можно вычислить коэффициент объемного расширения α' и теплоемкость c'_p в процессе релаксации. Варьируя T_{max} за счет изменения скорости нагрева $\delta T_{\text{max}} = (\delta \dot{T}) t_H$, получим

$$(2.5) \quad \alpha' = - \frac{\delta \ln (\rho/\rho_0)}{\delta T_{\text{max}}} = \alpha + \frac{\alpha M}{K-M} \left(1 - \frac{\xi}{\xi_{\text{max}}}\right);$$

$$(2.6) \quad c'_p = T_{\text{max}} \frac{\delta S}{\delta T_{\text{max}}} = c_p + \frac{\alpha^2 MK T_{\text{max}}}{K-M} \left(1 - \frac{\xi}{\xi_{\text{max}}}\right).$$

Таким образом, получены выражения для добавок к коэффициенту объемного расширения α и теплоемкости c_p , связанных с образованием равновесной концентрации де-

фектов при релаксации. Из (2.5), (2.6) следует, что необходимо проявлять известную осторожность при интерпретации результатов динамических измерений той доли теплового расширения и теплоемкости, которая контролируется дефектами: при статических измерениях $\xi = 0$, а при динамических — устанавливается отличный от нуля уровень неравновесности.

Рассмотрим теперь процесс нагрева со скоростью \dot{T} роста температуры.

Предположим, что в некотором интервале изменения термодинамических параметров τ как функция состояния среды мало меняется. В этом случае возможна ситуация, когда $d\xi/dt$ в уравнении (2.3) — малая величина, тогда

$$(2.7) \quad \xi = \tau \dot{T} \alpha K / (K - M).$$

В этом приближении для плотности и энтропии из (2.2), (2.4) получим

$$\frac{d \ln(\rho/\rho_0)}{dt} = -\alpha \dot{T} \left(1 + \frac{M}{K-M}\right), \quad \frac{dS}{dt} = \frac{c_p}{T} \dot{T} \left(1 + \frac{\alpha^2 T M K}{c_p (K-M)}\right).$$

Исключая из этих уравнений dt , имеем

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dT} = \alpha + \frac{\alpha M}{K-M} = \alpha + \Delta\alpha, \quad T \frac{dS}{dT} = c_p + \frac{\alpha^2 M K T}{K-M} = c_p + \Delta c_p.$$

Таким образом, для установившегося процесса $d\xi/dt = 0$ получены добавки объемного коэффициента теплового расширения и теплоемкости:

$$(2.8) \quad \Delta\alpha = \alpha M / (K - M);$$

$$(2.9) \quad \Delta c_p = \frac{\alpha^2 M K T}{K - M} = (c_p - c_v) \frac{M}{K - M}.$$

Заметим, что в данном случае формируется неравновесное давление, связанное с полем ξ : из (2.7), (1.5) следует

$$(2.10) \quad p = p^0(\rho, S) - \rho \tau \dot{T} \alpha M K / (K - M).$$

Второе слагаемое в этом выражении связано с эффективной объемной вязкостью.

Формулы (2.8), (2.9) для добавок к коэффициенту объемного расширения α и теплоемкости c_p при условиях $p = \text{const}$, $\xi = \text{const}$ могут быть получены из выражений (1.5) для p и T при $M = \text{const}$.

Таким образом, задача об импульсном нагреве в рассматриваемом приближении дает возможность получить описание таких характеристик среды, как коэффициент теплового расширения, теплоемкость при постоянном давлении, неравновесное давление. Эти характеристики можно использовать для замыкания модели. Приведем некоторые экспериментальные данные, которые позволяют оценить интервалы изменения параметров (в частности, M и τ), нужных для замыкания модели. Полученные ниже цифры при необходимости можно уточнить, подбирая разумные функциональные зависимости $M(\rho, S)$, $\tau(\rho, S)$.

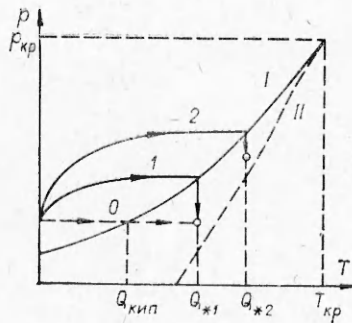
Для металлов в предплавленной области при оценке величины модуля M можно использовать данные прецизионных измерений, например температурной зависимости суммарного теплового расширения и той его доли, которая связана только с увеличением размеров решетки (см. формулу (2.5)) или аналогичной зависимости для теплоемкости вакансий (см. формулу (2.6)).

При нагреве тугоплавких металлов до температуры плавления около половины приращения коэффициента теплового расширения контролируется дефектами [4, 5]. Существует ряд методов определения нужных зависимостей. В частности, рентгеновские измерения позволяют определить непосредственно характерный размер решетки [6]. В соответствии с имеющимися данными в твердой фазе у металлов $M/(K - M) = (c_\infty^2 - c_0^2)/c_0^2 < 1$ (определение c_∞ и c_0 будет дано ниже). Например, по данным различных методик для меди вблизи температуры плавления в твердой фазе $\Delta\alpha/\alpha = M/(K - M) = 0,1 - 0,2$.

Время релаксации τ контролируется целым рядом релаксационных процессов с участием термодинамически равновесных дефектов [7]. Это время можно рассматривать как время «жизни» дефекта. Величина τ существенным образом зависит от температуры и может быть найдена, например, из экспериментов по закалке вакансий (закалка в данной модели происходит, если характерное время охлаждения образца меньше релаксационного). Для оценки можно положить $\tau \gg 10^{-6}$ с, так как по данным эксперимента темп охлаждения $\sim 10^6$ град/с достаточен для того, чтобы плотность вакансий по окончании процесса несущественно отличалась от исходной.

Приняв для меди в предплавленной области $\tau \sim 10^{-5}$ с, $M \sim 2 \cdot 10^{10}$ дин/см², имеем оценку величины эффективной объемной вязкости $\eta \cong 10^6$ П.

Неравновесное давление (см. (2.10)), развивающееся в процессе нагрева жидкости, приводит к смещению фазовой траектории нагреваемого элемента в область устойчивых состояний (см. фигуру), лежащую на $p - T$ -диаграмме выше кривой равновесного фазового перехода жидкость — пар. После выхода ξ на стационарный уровень (2.7) указанная точка из-за продолжающегося нагрева движется вправо почти парал-



($p_{кр}$, $T_{кр}$) — координаты критической точки; $Q_{кип}$ — точка начала кипения при атмосферном давлении; Q_{*1} , Q_{*2} — начальные точки электрического взрыва; θ — нереализующаяся траектория; I — истинная траектория при том же темпе нагрева, что и для случая θ ; 2 — то же, но при более высоком темпе нагрева.

Зная уравнение равновесной кривой и положение начальной точки электрического взрыва на оси температур (энергий), можно определить амплитуду неравновесного давления и на основании (2.10) оценить эффективную объемную вязкость жидкого металла при температурах, превышающих температуру равновесного кипения. Вдали от критической точки уравнение кривой равновесного фазового перехода жидкость — пар имеет вид

$$p = p_{\infty} e^{-\lambda/RT},$$

где λ — теплота перехода, а p_{∞} определяется по известному давлению насыщенных паров при фиксированной температуре. В частности, для меди при $T = 2900$ К, $p = 1013$ гПа, $T_{\infty} = \lambda/R = 36,56 \cdot 10^3$ К, а $p_{\infty} \cong 3,35$ ГПа.

По нашим экспериментальным данным для меди при темпе нагрева $dT/dt \cong (1,5-1,6) \cdot 10^{10}$ град/с фазовая траектория пересекает линию равновесного фазового перехода, когда среднее (по радиусу) значение плотности внутренней энергии $\hat{Q}_+ = 3,1 \pm 0,1$ кДж/г. Условия эксперимента: диаметр проводника 0,4 мм, ток в момент взрыва $I_+ \cong 50$ кА, напряжение на образце 13,3 кВ (емкость накопителя 2,4 мкФ, индуктивность цепи 430 нГ, начальное напряжение на емкости 30 кВ). Плотность среды в этот момент, оцененная по теневым рентгеновским снимкам, $n_* = 5,8 \pm 0,2$ г/см³. Найденный по этим же снимкам и данным электрических измерений объемный коэффициент теплового расширения $\alpha = (1,4 \pm 0,1) \cdot 10^{-4}$ 1/град. При переходе от плотности внутренней энергии к температуре для теплоемкости единицы массы принимаем $c = 0,5$ Дж/(г·град). Особая точка приходится на температуру $T_* = 6,44 \cdot 10^3$ К (реально температура поверхности ниже [1]).

На основании (2.11) получаем оценку для давления

$$p_* = p_{\infty} e^{-T_{\infty}/T_*} \cong 0,135 \text{ ГПа},$$

которая в соответствии с предыдущим должна быть близка к (2.10):

$$p = \rho \tau \frac{dT}{dt} \frac{\alpha MK}{K - M}.$$

Отсюда $\tau MK/(K - M) \cong 100$ см²/с и для эффективной объемной кинематической вязкости $\nu = \tau M$ (ее выражение получим ниже) получаем $\nu = 5-100$ см²/с, а для динамической вязкости η соответственно $\eta = 300-600$ П (здесь предполагаются следующие границы изменения M : от $K \cong K - M$ до $M \cong K - M$).

Из $p = p_*$ следует экспериментально проверяемое соотношение (предполагаем $K \cong K - M$)

$$T \cong T_{\infty} \ln(p_{\infty}/\rho \tau \alpha M \dot{T}),$$

связывающее положение начальной точки электрического взрыва на оси энергий с темпом нагрева. Согласно (2.12), в условиях работы [8], где исследовался взрыв проводника диаметром 0,31 мм при темпе нагрева примерно в 5 раз ниже только что рассмотренного, можно ожидать смещения начальной точки взрыва на область энергий, близкую к $\hat{Q}_+ = 2,4$ кДж/г = 152 кДж/моль. По данным [8] она приходится на $\hat{Q}_* \cong 152$ кДж/моль. Совпадение в третьем знаке, конечно, случайно. Однако оценки для $\nu \cong 50$ см²/с и $\eta = 300$ П по порядку величины близки к реальным.

Так как при плавлении степень дефектности материала возрастает, можно ожидать, что в жидкой фазе $M \cong K - M$. Принимая $K \sim 10^{11}$ см²/с², получим $\tau \sim 5 \cdot 10^{-10}$ с, а характерное время нагрева $\left(\frac{1}{T} \frac{dT}{dt}\right)^{-1}$ в рассматриваемых случаях значительно больше ($\tau \omega t \ll 1$).

Однако при взрывах эмиссионных пятен на катодах сильноточных коммутаторов, при взаимодействии пучков энергичных частиц с поверхностью металлических мишеней, в экспериментах с мощными лазерными пучками и т. д. $\omega\tau \gg 1$.

В этих условиях переход к локально-равновесной модели с перенормированным коэффициентом объемной вязкости оказывается некорректным, и релаксацию необходимо учитывать как таковую.

3. Жидкости с релаксирующим параметром рассматривались неоднократно. Отметим, например, работу [9], где, в частности, исследуется распространение акустических волн.

Покажем, что сформулированная выше модель приводит к таким же результатам, что и [9]. Предположим, что на стационарное состояние среды $\rho^0 = \text{const}$, $\rho_*^0 = \rho^0$, $S^0 = \text{const}$, $u_\alpha^0 = \text{const}$ наложено малое возмущение $\delta\rho$, $\delta\rho_*$, δS , δu_i . Линеаризуем систему (1.2) относительно малых возмущений. Получим систему линейных дифференциальных уравнений

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \rho^0 d\delta u_i/dt + \partial\delta p/\partial x_i &= 0, \quad d\delta\rho/dt + \rho^0(\partial\delta u_1/\partial x_1 + \\ &+ \partial\delta u_2/\partial x_2 + \partial\delta u_3/\partial x_3) = 0, \\ d\delta\rho_*/dt &= -(\delta\rho_* - \delta\rho)/\tau^0, \quad d\delta S/dt = 0, \end{aligned}$$

$$\text{где} \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_\alpha^0 \frac{\partial}{\partial x_\alpha}; \quad \delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\xi, S} \delta\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_{\xi, \rho} \delta S + \left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_{\rho, S} \delta\xi.$$

Для $\delta\xi$ получим уравнение

$$d\delta\xi/dt = \partial\delta u_1/\partial x_1 + \partial\delta u_2/\partial x_2 + \partial\delta u_3/\partial x_3 - \delta\xi/\tau^0.$$

Предположим вначале, что $u_\alpha^0 = 0$. Пусть возмущения во времени меняются по гармоническому закону $e^{i\omega t}$. Из уравнения для $\delta\xi$ найдем

$$\delta\xi(x_1, x_2, x_3) = -\frac{i\omega\tau^0}{1 + i\omega\tau^0} \frac{\delta\rho}{\rho^0},$$

следовательно, так как $\delta S(x_1, x_2, x_3) = 0$,

$$(3.2) \quad \delta p(x_1, x_2, x_3) = \left(\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\xi, S} - \frac{1}{\rho^0} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_{\rho, S} \frac{i\omega\tau^0}{1 + i\omega\tau^0} \right) \delta\rho(x_1, x_2, x_3).$$

Ищем теперь решения вида $e^{ik_\alpha x_\alpha}$.

Из условия разрешимости системы (3.1) с $u_\alpha^0 = 0$ получим дисперсионное соотношение

$$(3.3) \quad \omega^2 = \left(\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\xi, S} - \frac{1}{\rho^0} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_{\rho, S} \frac{i\omega\tau^0}{1 + i\omega\tau^0} \right) (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2).$$

Можно показать, что для случая $u_\alpha^0 \neq 0$ справедлива та же формула (3.3), в которой значение ω заменено на $\omega + u_\alpha^0 k_\alpha$.

Итак, получено выражение для комплексной скорости звука (3.3), совпадающее с формулой работы [9].

Рассмотрим теперь предельные случаи для (3.3). Считаем, что время релаксации τ может изменяться в широких пределах, и фиксируем частоту ω . Пусть $\tau \gg 1/\omega$, т. е. время релаксации велико, среда «почти упругая». Из (3.3) следует

$$\omega^2 = \left(\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\xi, S} - \frac{1}{\rho^0} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_{\rho, S} \right) |k|^2,$$

где $|k|^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$.

Скорость звука c_∞ , определяемая как

$$c_\infty^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\xi, S} - \frac{1}{\rho^0} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_{\rho, S},$$

соответствует скорости звука в среде без релаксации.

При $\tau \ll 1/\omega$ (малое время релаксации) имеем

$$\omega^2 = (\partial p/\partial \rho)_{\xi, S} |k|^2.$$

Скорость звука $c_0 = \sqrt{(\partial p/\partial \rho)_{\xi, S}}$ соответствует «мгновенно релаксирующей» среде.

Следовательно,

$$(\partial p/\partial \xi)_{\rho, S} = -\rho^0 (c_\infty^2 - c_0^2).$$

Для случая малых времен релаксации ($\tau \ll 1/\omega$), используя $i\omega\delta\rho + \rho^0 \operatorname{div} \delta u = 0$, получим из (3.2)

$$(3.4) \quad \delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\xi, S} \delta \rho - (c_\infty^2 - c_0^2) \tau^0 \operatorname{div} \delta u.$$

Для давления получили формулу с объемной вязкостью.

Эффективная объемная кинематическая вязкость выражается формулой (с учетом (1.5) при $M = \text{const}$)

$$(3.5) \quad \nu = \tau^0 (c_\infty^2 - c_0^2) = - \frac{\tau^0}{\rho_0^0} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_{\rho, S} = \tau^0 M.$$

Отметим, что формула для давления (3.4) с объемной вязкостью (3.5) справедлива только для достаточно медленных по сравнению с временем релаксации τ процессов. Следовательно, для быстропротекающих процессов модель с вязкостью Навье — Стокса, определяемой по (3.5), неприменима.

Существенным обстоятельством является также и то, что система уравнений (1.2) с релаксацией плотности является гиперболической (все процессы имеют конечную скорость распространения).

Поступила 1 XII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Доровский В. Н., Искольдский А. М., Роменский Е. И. Динамика импульсного нагрева металла током и электрический взрыв проводников. Препринт № 174. Новосибирск: ИАЭ СО АН СССР, 1982.
2. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978.
3. Паташинский А. З., Шумило Б. И. Теория релаксации метастабильных состояний. — ЖЭТФ, 1979, т. 77, № 4.
4. Дамаск А., Динс Дж. Точечные дефекты в металлах. М.: Мир, 1966.
5. Крафтмахер Я. А. Экспериментальное исследование теплоемкости металлов при высоких температурах (образование вакансий и фазовые переходы второго рода). Автореф. дис. на соиск. учен. степени д-ра физ.-мат. наук, Свердловск: Ин-т физики металлов АН СССР, 1967.
6. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. М.: Наука, 1978.
7. Новик А., Берри Б. Релаксационные явления в кристаллах. М.: Атомиздат, 1975.
8. Каримходжаев И., Мартынюк М. М. Осциллографическое исследование электрического взрыва меди и золота. — ПМТФ, 1974, № 3.
9. Мандельштам Л. П., Леонтович М. А. К теории поглощения звука в жидкостях. — ЖЭТФ, 1937, № 7.

УДК 539.374

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДИСЛОКАЦИОННОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Ю. И. ФАДЕЕНКО

(Киев)

В исследованиях динамической пластичности часто используется простейшая модель теории дислокаций, включающая уравнение Орована

$$(1a) \quad \dot{\gamma} = bNv,$$

закон движения дислокаций

$$(1b) \quad v = v(\tau)$$

и уравнение кинетики дислокаций

$$(1в) \quad N = N(\gamma),$$

где γ — сдвиговая деформация; τ — касательное напряжение; N — плотность дислокаций; v — скорость их скольжения; b — абсолютная величина вектора Бюргерса. При этом предполагается, что все дислокации подвижны и скользят с одинаковыми скоростями. Уравнение (1в) обычно записывают в виде $N = N_0 + A\gamma^s$, где s — величина порядка единицы, а в качестве закона движения используют либо закон вязкого трения

$$(2a) \quad \tau b = Bv,$$

либо эмпирическую формулу Тэйлора [1]

$$(2b) \quad v = v_0 \exp(-\tau_0/\tau)$$

(B — коэффициент вязкого трения).