ПМТФ, № 6, 1967

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ДЛЯ СИСТЕМЫ ПУЗЫРЕЙ В ЖИДКОСТИ МАЛОЙ ВЯЗКОСТИ

А. М. Головин

(Москва)

Рассматривается возможность описания движения системы пузырей в жидкости малой вязкости при помощи уравнений Лагранжа с функцией Лагранжа, равной кинетической энергии идеальной жидкости. Ускорение каждого пузыря предполагается достаточно малым, чтобы можно было пренебречь изменением скорости за времена порядка a/u (a — радиус пузыря, u — скорость его движения). Рассмотрение виртуальной мощности обобщенных внешних сил приводит к выражению для силы вязкого трения, действующей на пузырь в системе, отличающемуся от приведенного в работе [1]. Исследуется слияние концентрации и формы системы на скорость подъема пузырей в случае их малой концентрации. Приведены оценки максимальных размеров области, занимаемой пузырями, когда можно пренебречъ влиянием следов на движение системы.

1. Уравнения Лагранжа. Движение системы газовых пузырей в идеальной несжимаемой жидкости, как известно [2], может быть описано уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \mathbf{u}_i} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}_i} = \mathbf{Q}_i \tag{1.1}$$

с функцией Лагранжа, равной T кинетической энергии идеальной жидкости. Причем T определяется радиус-векторами $\mathbf{r}_i$ центров пузырей и их скоростями $\mathbf{u}_i$ в тот же момент времени ($i = 1,\ldots, N$), $\mathbf{Q}_i$ — обобщенная внешняя сила, действующая на i-й пузырь в системе. Возможность такого описания связана с тем, что скорость распространения взаимодействия, являющаяся скоростью звука, может считаться бесконечной для несжимаемой среды. Действительно, при потенциальном течении идеальной жидкости скорость жидкости в любой точке в данный момент времени определяется скоростями движущихся пузырей в тот же самый момент времени.

При движении системы пузырей умеренных размеров в жидкости малой вязкости ($1 \ll R < 300$, $R = ua/\nu$ — число Рейнольдса, u — скорость движения пузыря радиуса a в жидкости с кинематическим коэффициентом вязкости ν) сумма всех сил действующих на i-й пузырь ($i = 1,\ldots,N$) пренебрежимо малой массы, должна равняться нулю, а единственной силой, действующей на такой пузырь в жидкости, будет сила гидродинамического давления

$$\begin{gathered}\int(-pn_i^\alpha + \sigma'^{\alpha\beta}n_i^\beta)\,dS = \int(-p+\sigma_i'^{rr})\,n_i^\alpha\,dS = 0 \\ \sigma'^{\alpha\beta} = \mu\,(\partial v^\alpha/\partial r^\beta + \partial v^\beta/\partial r^\alpha), \quad \sigma'^{rr} = 2\mu\,\partial v^r/\partial r\end{gathered} \tag{1.2}$$

где p — давление в жидкости, n_i^α — компоненты единичного вектора внешней нормали к dS — элементу поверхности i-го пузыря, $\sigma'^{\alpha\beta}$ — компоненты вязкого тензора напряжений, с единственной отличной от нуля компонентой $\sigma'^{\gamma\gamma}$ в сферической системе координат с центром в центре i-го пузыря, μ — динамической коэффициент вязкости, v^α — компоненты скорости жидкости, r^α — координаты точки наблюдения ($\alpha = 1,2,3$).

В (1.2) и далее предполагается суммирование по повторяющимся греческим индексам.

Давление p можно представить как сумму p_0 — давления в идеальной жидкости и p' — дополнительного члена, зависящего от вязкости, который совместно с $\sigma_i'^{rr}$ приводит к возникновению силы вязкого трения. Но, как доказал Брейквелл [3], для идеальной жидкости

$$-\int p_0 \mathbf{n}_i \, dS = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{u}_i} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}_i} \tag{1.3}$$

поэтому, включив силу вязкого трения во внешние силы, действующие на i-й пузырь, можно было бы смотреть на уравнения Ланграньжа как на следствие (1.2) и (1.3).

Однако учет сил, зависящих от вязкости, приводит к тому, что если при описании движения системы пузырей в вязкой жидкости вместо рассмотрения взаимодействия каждого пузыря с окружающей жидкостью описывать систему как совокупность материальных точек, взаимодействующих по определенному закону и находящихся во внешнем поле, то такое взаимодействие нельзя считать мгновенным. Действительно, сила вязкого трения зависит от скорости потока относительно пузыря в рассматриваемый момент времени и от ускорения относительного движения в более ранние времена. Вокруг каждого пузыря образуется пограничный слой поперечных размеров порядка $aR^{-1/2}$. Время распространения возмущения через область, занимаемую пограничным слоем, порядка $a^2 / \nu R \sim a / u$. Поэтому изменение скорости натекающего на пузырь потока приведет к изменению силы вязкого трения с запаздыванием порядка a / u. Скорость натекающего потока на рассматриваемый пузырь зависит от скоростей движения остальных пузырей в системе. Отсюда следует, что сила вязкого трения включает в себя силу взаимодействия частиц, распространяющегося с конечной скоростью.

Такое взаимодействие невозможно включить в функцию Лагранжа, зависящую только от координат и скоростей в рассматриваемый момент времени. Такое взаимодействие невозможно включить в обобщенные внешние силы $\mathbf{Q}_i$, так как при определении $\mathbf{Q}_i$ существенно используется предположение, что скорость жидкости в любой точке опредeлeляется мгновенными положениями и скоростями пузырей.

Конечность скорости распространения взаимодействия делает невозможным строгое описание движения системы пузырей в вязкой жидкости при помощи уравнений Лагранжа. Но если скорости пузырей мало меняются за времена порядка a / u, то можно попытаться приближенно описывать движение системы пузырей в жидкости малой вязкости при помощи уравнений Лагранжа, с функцией Лагранжа, равной величине кинетической энергии идеальной жидкости. Тогда при определении обобщенных внешних сил Q_i для пузырей в жидкости малой вязкости, следуя В. Г. Левичу [4], поле скоростей вокруг пузырей можно считать мало отличающимся от поля скоростей идеальной жидкости. Возникающие при этом поправки к кинетической энергии жидкости, обтекающей одиночный пузырь, будут величинами порядка $1 / R$.

Повторяя рассуждения, приведенные в [2], можно показать, что для жидкости малой вязкости обобщенные силы следует определять как коэффициенты, стоящие перед виртуальными скоростями пузырей Dr_i^α / Dt в выражении для виртуальной мощности, сил, действующих на систему, что с учетом (1.2) равно виртуальной мощности сил, действующих на жидкость

$$\int \rho \frac{dv^\alpha}{dt} V^\alpha \, d^3 r = \sum_{i=1}^{N} Q_i^\alpha \frac{Dr_i^\alpha}{Dt} \tag{1.4}$$

где ρ — плотность жидкости, V^α — компонента виртуальной скорости жидкости, возникающей вследствие виртуального движения пузырей со скоростями Dr_i^α / Dt.

Рассмотрим движение системы пузырей радиуса a. Скорости пузырей. относительно покоящейся на бесконечности жидкости равны u_i. Потенциал поля скоростей этой жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \Phi = 0 \tag{1.5}$$

с граничными условиями

$$n_i^\alpha \partial\Phi / \partial r^\alpha = n_i^\alpha u_i^\alpha \text{ при } r_i' = a$$

$$\Phi \to 0 \text{ при } r_i' \to \infty \qquad (1.6)$$

$$(r_i' = |\mathbf{r}_i'|, \quad \mathbf{r}_i' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i, \quad i = 1, \ldots, N)$$

Решение этой задачи с точностью до членов порядка $(a/l)^3$, где l — среднее расстояние между центрами пузырей, имеет вид

$$\Phi = -\frac{a^3}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{v_i^\alpha r_i'^\alpha}{r_i'^3}, \qquad v_i^\alpha = u_i^\alpha - \frac{a^3}{2}\sum_{j=1}^{N} u_j^\beta \Lambda_{ji}^{\beta\alpha} \qquad (1.7)$$

$$\Lambda_{ii}^{\alpha\beta} \equiv 0, \quad \Lambda_{ij}^{\alpha\beta} = \frac{3r_{ij}^\alpha r_{ij}^\beta}{r_{ij}^5} - \frac{\delta^{\alpha\beta}}{r_{ij}^3} \quad (i \neq j), \quad \delta^{\alpha\beta} = \begin{cases}1 & \alpha = \beta\\ 0 & \alpha \neq \beta\end{cases}$$

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \quad r_{ij} = |\mathbf{r}_{ij}|$$

Виртуальные перемещения пузырей вызывают появление виртуального потенциала

$$\Phi' = -\frac{a^3}{2}\sum_{j=1}^{N}\varphi_i^\alpha \frac{Dr_i^\alpha}{Dt} \qquad \left(\varphi_i^\alpha = \frac{r_i'^\alpha}{r_i'^3} - \frac{a^3}{2}\sum_{j=1}^{N}\Lambda_{ij}^{\alpha\beta}\frac{r_j'^\beta}{r_j'^3}\right)$$

соответствующего виртуальной скорости движения жидкости

$$\frac{Dr^\alpha}{Dt} = -\frac{a^3}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\varphi_i^\beta}{\partial r^\alpha}\frac{Dr_i^\beta}{Dt}$$

Таким образом, обобщенные внешние силы определяются как

$$Q_i^\alpha = -\frac{a^3}{2}\int \rho \frac{dv^\beta}{dt}\frac{\partial\varphi_i^\alpha}{\partial r^\beta} d^3 r \qquad (1.8)$$

В соответствии с уравнениями Навье — Стокса для несжимаемой вязкой жидкости

$$\rho\, dv^\alpha / dt = -\partial p / \partial r^\alpha + \partial\sigma'^{\alpha\beta} / \partial r^\beta + \rho g^\alpha \qquad (1.9)$$

где g — ускорение силы тяжести, выражение (1.8) может быть преобразовано к виду

$$Q_i^\alpha = \frac{a^3}{2}\int \frac{\partial}{\partial r^\beta}\left(p\frac{\partial\varphi_i^\alpha}{\partial r^\beta} - \sigma'^{\gamma\beta}\frac{\partial\varphi_i^\alpha}{\partial r^\gamma}\right) d^3 r +$$

$$+ \frac{a^3}{2}\int \sigma'^{\gamma\beta}\frac{\partial^2\varphi_i^\alpha}{\partial r^\beta \partial r^\gamma} d^3 r - \frac{\rho a^3}{2}\int \frac{\partial}{\partial r^\beta} g^\gamma r^\gamma \frac{\partial\varphi_i^\alpha}{\partial r^\beta} d^3 r \qquad (1.10)$$

если воспользоваться очевидным тождеством $\Delta\varphi^\alpha_i \equiv 0$ при $r'_i \neq 0$ $(i = 1, \ldots, N)$. Кроме того, из определения φ_i^α следует, что на поверхности j-й сферы

$$n_j^\beta \frac{\partial\varphi_i^\alpha}{\partial r^\beta} = -2\frac{n_i^\alpha}{a^3}\delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases}1 & (i = j)\\ 0 & (i \neq j)\end{cases} \qquad (1.11)$$

Поэтому Q_i^α можно переписать, используя $\sigma'^{\gamma\beta} = \sigma'^{rr} n_j^\gamma n_j^\beta$ и (1.11), в виде

$$Q_i^\alpha = \int (p - \sigma'^{rr}) n_i^\alpha dS + \frac{a^3}{2}\int \sigma'^{\gamma\beta}\frac{\partial^2\varphi_i^\alpha}{\partial r^\beta \partial r^\gamma} d^3 r - \frac{4\pi}{3}\rho a^3 g^\alpha \qquad (1.12)$$

Интеграл по бесконечно удаленной поверхности, ограничивающей систему, исчезает, так как предполагается, что область, занимаемая пузырями, имеет конечный размер, поэтому при $r \to \infty$ получим $p \to \mathrm{const}$, $\partial\varphi_i^\alpha / \partial r^\beta \sim r^{-3}$, $\sigma'^{\gamma\beta} \sim r^{-4}$.

Первый интеграл в (1.12), в соответствии с (1.2), равен нулю, второй член — сила Архимеда, а третий — сила вязкого трения, для расчета которой с погрешностью порядка $R^{-1/2}$ поле скоростей во всем пространстве можно заменить на поле скоростей идеальной жидкости [5]

$$\frac{a^3}{2}\int \sigma'^{\gamma\beta} \frac{\partial^2 \varphi_i^\alpha}{\partial r^\beta \partial r^\gamma} d^3r =$$

$$= \mu a^3 \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^\beta \partial r^\gamma} \frac{\partial^2 \varphi_i^\alpha}{\partial r^\beta \partial r^\gamma} d^3r = -\mu a^3 \sum_{j=1}^{N} \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^\beta \partial r^\gamma} n_j^\beta \frac{\partial \varphi_i^\alpha}{\partial r^\gamma} dS$$

Из (1.7) и определения $\varphi^\alpha{}_i$ следует, что на поверхности j-й сферы

$$a n_j^\beta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^\beta \partial r^\gamma} = -{}^3/_2 v_j^\beta (3 n_j^\beta n_j^\gamma - \delta^{\beta\gamma})$$

$$\frac{\partial \varphi_i^\alpha}{\partial r^\gamma} = -\frac{\delta_{ij}}{a^3}(3 n_j^\alpha n_j^\gamma - \delta^{\alpha\gamma}) + \frac{3}{2}\Lambda_{ij}^{\alpha\beta}(n_j^\beta n_j^\gamma - \delta^{\beta\gamma})$$

Таким образом, получаем

$$Q_i^\alpha = -\frac{4\pi}{3}\rho a^3 g^\alpha - 12\pi\mu a v_i^\alpha + 6\pi\mu a^4 \sum_{j=1}^{N} u_j^\beta \Lambda_{ji}^{\beta\alpha} \tag{1.13}$$

Сила вязкого трения, действующая на пузырь в системе, состоит из двух членов, первый из которых совпадает с силой, определяемой формулой В. Г. Левича [4], действующей на одиночный пузырь, на который натекает поток со скоростью $-\mathbf{v}_i$. Действительно, скорость движения жидкости в системе, связанной с центром i-го пузыря, в его окрестности, как следует из (1.7), такова, что и в задаче об обтекании неподвижного одиночного пузыря потоком со скоростью $-\mathbf{v}_i$ на бесконечности

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r^\alpha} - u_i^\alpha = \frac{a^3}{2}\left(\frac{3 v_i^\beta r_i'^\beta r_i'^\alpha}{r_i'^5} - \frac{v_i^\alpha}{r_i'^3}\right) - v_i^\alpha$$

Возникновение последнего члена в формуле (1.13) связано с тем обстоятельством, что сила вязкого трения определяется не только скоростью натекающего на пузырь потока, но также и эффективной шириной следа, зависящей от координат и скоростей других пузырей в системе. Рассмотрение частного случая, представленное в п. 4, подтверждает (1.13). Совпадение результатов расчета силы вязкого трения, как передаваемого в единицу времени импульса от жидкости к пузырю, основанного на изучении переноса в следе вихря, образующегося в пограничном слое, с расчетом этой силы методом диссипируемой энергии показано в работе Мура [5] для стационарного движения одиночного пузыря.

Кинетическая энергия идеальной жидкости, обтекающей систему сфер с точностью до членов порядка $(a / l)^3$, равна [1]

$$T = \frac{\pi\rho a^3}{3}\left(\sum_{i=1}^{N} u_i^2 - \frac{3a^3}{2}\sum_{i,\,j=1}^{N} u_i^\alpha \Lambda_{ij}^{\alpha\beta} u_j^\beta\right) \tag{1.14}$$

Поскольку кинетическая энергия (1.14) — однородная квадратичная функция от скоростей $\mathbf{u}_i$

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{u}_i \frac{\partial T}{\partial \mathbf{u}_i} = 2T \tag{1.15}$$

то из уравнений Лагранжа (1.1) с обобщенными внешними силами (1.13) следует, что

$$\frac{d}{dt}T = -\frac{4\pi}{3}\rho a^3\sum_{i=1}^{N}(\mathbf{g}\cdot\mathbf{u}_i) - 12\pi\mu a\sum_{i=1}^{N}v_i^2 \qquad (1.16)$$

В справедливости этого результата можно убедиться, вычислив при помощи уравнений Навье — Стокса изменение энергии жидкости малой вязкости, поле скоростей движения которой мало отличается от движения идеальной жидкости.

Таким образом, уравнения Лагранжа для движения системы пузырей в жидкости малой вязкости принимают вид

$$\frac{2\pi\rho a^3}{3}\frac{d}{dt}\left(u_i^\alpha - \frac{3a^3}{2}\sum_{j=1}^{N}u_j^\beta\Lambda_{ji}^{\beta\alpha}\right) + \pi\rho a^6\sum_{j=1}^{N}u_i^\beta\frac{\partial\Lambda_{ij}^{\beta\gamma}}{\partial r_{ij}^{\alpha}}u_j^\gamma =$$

$$= -\frac{4\pi}{3}\rho a^3 g^\alpha - 12\pi\mu a\left(u_i^\alpha - a^3\sum_{j=1}^{N}u_j^\beta\Lambda_{ji}^{\beta\alpha}\right) \qquad (1.17)$$

Пренебрегая членами, содержащими малый параметр $(a\,/\,l)^3$, получим уравнения движения отдельного пузыря в виде

$$\frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = -2\mathbf{g} - \frac{18\nu}{a^2}\mathbf{u}_i \qquad (1.18)$$

Если это выражение подставить в члены левой части уравнений (1.17), содержащие малый параметр, то с точностью до членов порядка $(a\,/\,l)^3$ уравнения Лагранжа примут вид

$$\frac{du_i^\alpha}{dt} = \frac{3a^3}{2}\sum_{j=1}^{N}u_j^\beta\frac{\partial\Lambda_{ji}^{\beta\gamma}}{\partial r_{ji}^{\alpha}}u_j^\beta - 2\left(g^\alpha + \frac{3a^3}{2}\sum_{j=1}^{N}g^\beta\Lambda_{ji}^{\beta\alpha}\right) -$$

$$-\frac{18\nu}{a^2}\left(u_i^\alpha + \frac{a^3}{2}\sum_{j=1}^{N}u_j^\beta\Lambda_{ji}^{\beta\alpha}\right) \qquad (1.19)$$

При выводе (1.19) использовано свойство симметрии тензора $\Lambda^{\alpha\beta}{}_{ij}$

$$\partial\Lambda_{ij}^{\alpha\beta}\,/\,\partial r_{ij}^{\gamma} = \partial\Lambda_{ij}^{\alpha\gamma}\,/\,\partial r_{ij}^{\beta}$$

Уравнения Лагранжа (1.19) пригодны для описания процессов с достаточно малыми ускорениями $|\,du_i\,/\,dt\,| \ll u^2{}_i/a$. При помощи этих уравнений можно, например, решить задачу о движении одиночного пузыря, размеры которого соответствуют числу Рейнольдса $R \gg 18$, поскольку в этом случае время релаксации скорости к стационарной $a^2\,/\,18\nu$ существенно превышает время релаксации пограничного слоя $a\,/\,u$.

2. Система пузырей в неограниченной жидкости при пространственно однородном и изотропном распределении. Если система пузырей имеет форму эллипсоида, то суммы, входящие в правую часть уравнений (1.19), могут быть выражены по методу Лоренца [6] через объемную концентрацию пузырей в системе $c = {}^4/_3\,(a\,/\,l)^3$ и коэффициент деполяризации эллипсоида n_z (для длинного кругового цилиндра $n_z = 0$, для сферы $n_z = {}^1/_3$, для тонкой пластины $n_z = 1$)

$$a^3\sum_{j=1}^{N}\Lambda_{ji}^{\alpha\beta} = (1 - 3n_z)c\delta^{\alpha\beta} \qquad (2.1)$$

Заменяя в правой части уравнения (1.19) $\mathbf{u}_j$ на $\mathbf{u}_0 = -\mathbf{g}a^2 / 9\nu$ установившуюся скорость подъема одиночного пузыря радиуса a, получим уравнение движения i-го пузыря с осредненными значениями действующих на него сил

$$\frac{a^2}{18\nu}\frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_i + (1 - 3n_z)\, c\mathbf{u}_0 \qquad (2.2)$$

Скорость стационарного подъема пузыря в системе, как видно из (2.2), равна

$$\mathbf{u} = [1 + (1 - 3n_z)\, c]\ \mathbf{u}_0 \qquad (2.3)$$

Этот результат отличается от аналогичного, полученного ранее в работе [1], поскольку там неправильно учитывалась зависимость силы вязкого трения от концентрации.

Подъем ограниченного слоя пузырей в цилиндрической колонне с жидкостью в отсутствие непрерывной подачи газа через основание колонны соответствует, как указано в работе [1], выбору $n_z = 1$. Скорость подъема пузырей в колонне будет равна $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0\ (1 - 2c)$. Причем натекающий на каждый пузырь поток будет двигаться относительно стенок трубы со скоростью

$$u_i^{\alpha} - v_i^{\alpha} = \frac{a^3}{2}\sum_{j=1}^{N} u_0^{\beta}\Lambda_{ji}^{\beta\alpha} = \frac{1 - 3n_z}{2}\, c u_0^{\alpha} = -\, c u_0^{\alpha}$$

Таким образом, в области, занимаемой пузырями, имеется нисходящий поток жидкости со средней скоростью $-\, c\mathbf{u}_0$.

Рассмотрим теперь непрерывный поток пузырей в вертикальной трубе с жидкостью, создаваемый за счет постоянной подачи воздуха через ее основание. Очевидно, что средняя скорость жидкости по любому поперечному сечению колонны в этом случае должна равняться нулю. Это означает, что внедряющийся газ сообщает жидкости дополнительную скорость, компенсирующую скорость нисходящего движения жидкости, равную $-c\mathbf{u}_0$. Поэтому скорость подъема пузырей относительно стенок трубы будет на величину $c\mathbf{u}_0$ больше, чем в рассмотренном ранее случае, и будет равна $\mathbf{u} = (1 - c_0)\ \mathbf{u}_0$.

3. О влиянии следов на движение системы пузырей. Рассмотрим задачу о движении одиночного пузыря ($R \gg 1$) в неограниченной жидкости. По известному выражению силы сопротивления, равной $-\ 12\pi\mu a\mathbf{u}_i$, можно, аналогично тому, как это сделано Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицем [7], написать поле скоростей движения жидкости вдали от пузыря в области вне следа в виде

$$\mathbf{v} = 3\nu a\mathbf{r}'_i\ /\ r'^3_i \qquad (3.1)$$

В случае движения системы частиц влияние следов частиц приведет к появлению дополнительной скорости натекающего потока в окрестности i-го пузыря, равной

$$\mathbf{v}_i = -\ 3\nu a\sum_{j=1}^{N}\frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} \qquad (3.2)$$

приводящей к дополнительным силам взаимного отталкивания пузырей.

Этой поправкой к полю скоростей можно пренебречь по сравнению с ранее вычисленной скоростью натекающего потока (1.7), если

$$\nu a\Sigma \ll u_0\ \left(\Sigma = \left|\sum_{j=1}^{N}\frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3}\right|\right) \qquad (3.3)$$

Для системы пузырей, занимающих область конечного размера порядка L, как показывают оценки, $\Sigma \sim L/l^3$, так что неравенство (3.3) означает, что

$$L / a \ll R (l / a)^3 \tag{3.4}$$

Аналогичную оценку можно получить и в случае, когда система пузырей с однородной плотностью занимает бесконечный горизонтальный слой толщины H. Из решения электростатической задачи о поле, создаваемом однородно заряженным слоем, следует, что $\Sigma = 2\pi z_i / l^3$ (z_i — расстояние от центра i-й сферы до середины слоя).

Скорость натекающего потока на i-й пузырь будет для верхней половины слоя на величину $6\pi\nu a z_i / l^3$ больше (а для нижней меньше), чем $\mathbf{v}_i$, определяемая (1.7). Таким образом, поднимающийся слой пузырей стремится расшириться, сохраняя пространственно однородное распределение. Этот результат справедлив, пока толщина слоя достаточно мала, т. е. можно пренебречь вероятностью попадания пузыря в след какого-либо другого пузыря.

Рассмотрим поле скоростей в ламинарном следе отдельного пузыря, на который натекает поток со скоростью $\mathbf{U}$. На больших расстояниях от пузыря компонента скорости движения жидкости v_x вдоль направления натекающего потока имеет вид

$$v_x = -3U \frac{a}{x} \exp\left(-\frac{U}{4\nu} \frac{y^2+z^2}{x}\right) \tag{3.5}$$

(x, y, z — компоненты вектора $\mathbf{r}'_i$); аналогичный вид имеют v_y, v_z. Поле скоростей в следе описывается (3.5) лишь на расстояниях $x \gg aR^{1/2}$. Для $x \lesssim aR^{1/2}$, как показано в работе Мура [5], ширина следа практически постоянна и равна $aR^{-1/4}$, причем линии тока для ламинарной части следа мало отличаются от линий тока идеальной жидкости.

Дополнительное поле скоростей приводит к вовлечению пузырей в область следа. Эффективная ширина области, занимаемой следом, как видно из (3.5), порядка $\sqrt{\nu x/U}$. Эта величина меньше среднего расстояния между пузырями, если толщина слоя, занимаемого пузырями H, удовлетворяет неравенству

$$H / a \ll R (l / a)^2 \tag{3.6}$$

Таким образом, влияние следов на движение системы пузырей можно не учитывать, если толщина слоя удовлетворяет условию (3.6), а в случае движения системы пузырей, занимающих область конечных размеров в неограниченной жидкости, требуется еще, чтобы горизонтальные размеры области удовлетворяли неравенству (3.4).

4. Сила вязкого трения в задаче о движении двух пузырей. Пусть радиусы пузырей равны a, а расстояние между их центрами l удовлетворяет условию $a \ll l \ll aR^{1/2}$. Тогда скорости пузырей могут считаться одинаковыми, равными U и направленными вдоль направления движения одиночного пузыря, принимаемого за ось z — полярную ось сферической системы координат, начало которой находится в центре первого пузыря. Пусть координаты центра второго пузыря равны (l, θ_0, 0), причем

$$(a / l)\ R^{-1/4} \ll \pi - \theta_0 \ll 1$$

При выполнении этих условий обтекание первого пузыря может считаться осесимметричным и след от первого пузыря не попадет в область пограничного слоя второго. Следы от таких пузырей не перекрываются на расстоянии порядка $aR^{1/2}$. Если скорость натекающего потока на бесконечности равна U, то скорость натекающего потока в окрестности пузырей в соответствии с (1.7) равна $U[1-(a/l)^3]$. Функция тока в окрестности первого пузыря на расстоянии от него $r \ll l$ равна

$$\psi = (U/2)\ (1 - a^3 / l^3)\ (r^2 - a^3/r)\ \sin^2\theta \tag{4.1}$$

а вдали от первого пузыря для $l \ll r \lesssim aR^{1/2}$ равна

$$\psi = (U / 2)\ r^2 \sin^2\theta \tag{4.2}$$

Проведем две плоскости S $(z = z_1,\ z_1 \gg l)$ и S' $(z = z_2,\ l \ll -z_2 \lesssim \lesssim aR^{1/2})$ так, чтобы пересекающие их линии тока можно было бы считать параллельными. Сила сопротивления D_1 представляет собой поток импульса, передаваемого от жидкости к пузырю [7]. Для рассматриваемого квазистационарного движения сила сопротивления равна разности потоков импульса через плоскости S и S':

$$D_1 = \left(\int_S - \int_{S'}\right) [p + \rho U (v_z - U)]\, dS \tag{4.3}$$

Воспользуемся уравнением Бернулли

$$p + (\rho / 2)\ U^2 + \rho\, U\, (v_z - U) + C(\psi) = 0 \tag{4.4}$$

где функция $C(\psi) = 0$, кроме области занимаемой следом, для которой вычисления, аналогичные представленным в работе [5], приводят с учетом (4.1) к следующему результату

$$C(\psi) = 6\sqrt{2}\rho U^2 \left(1 - \frac{a^3}{l^3}\right) \delta f(t), \qquad \delta^2 = \nu \left[aU \left(1 - \frac{a^3}{l^3}\right)\right]^{-1} \tag{4.5}$$

$$f(t) = (1 / \sqrt{\pi}) \exp(-t^2) - t \operatorname{erfc} t, \qquad t = \psi \left[2\sqrt{2}\delta a^2 U \left(1 - \frac{a^3}{l^3}\right)\right]^{-1}$$

Таким образом для вычисления силы вязкого трения, действующей на первый пузырь, достаточно ограничиться интегрированием в плоскости S' по области, занимаемой следом от первого пузыря. Учитывая быстрое убывание подинтегральной функции, получим

$$D_1 = 2\pi \int_0^\infty C(\psi)\, y\, dy \qquad (y = r \sin\theta) \tag{4.6}$$

где в соответствии с (4.2) $d\psi = Uydy$. Отсюда следует, что

$$D_1 = 12\pi\mu a U\ (1 - a^3 / l^3)^2 \tag{4.7}$$

Полученный результат подтверждает справедливость формулы (1.13).

Автор благодарит В. Г. Левича и В. В. Толмачева за обсуждение результатов работы.

Поступила 5 I 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Головин А. М., Левич В. Г., Толмачев В. В. Гидродинамика системы пузырей в жидкости малой вязкости. ПМТФ, 1966, № 2.
2. Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. Изд-во «Мир», 1964.
3. Биркгоф Г. Гидродинамика. Изд. иностр. лит., 1963.
4. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. Физматгиз, 1959.
5. Moore D. W., The boundary layer on spherical gas bubble. J. Fluid Mech., 1963, vol. 16, No. 2, p. 161.
6. Браун В. Диэлектрики. Изд. иностр. лит., 1961.
7. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1944.