

**АВТОМОДЕЛЬНЫЙ РАЗЛЕТ ПРОДУКТОВ ИСПАРЕНИЯ ТВЕРДОЙ
СТЕНКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРЕМЕННОГО ЭНЕРГОВЫДЕЛЕНИЯ**

А. Т. Сапожников

(Челябинск)

Рассмотрена система автомодельных уравнений движения продуктов испарения (идеальный газ) под действием переменного энерговыделения. Сформулированы условия существования и единственности решения задачи об испарении и разлете вещества в вакуум.

1. При решении задачи об испарении и разлете вещества в вакуум при постепенном выделении энергии обычно предполагается, что испарение происходит в слое пренебрежимо малой толщины, продукты испарения можно считать идеальным газом, изменением плотности и скорости неиспаренного вещества можно пренебречь. Таким образом, движение конденсированного вещества не рассматривается, и задача сводится к рассмотрению движения слоя идеального газа переменной массы, ограниченного поверхностью испарения с одной стороны и свободной поверхностью с другой. Такая схематизация явления принята, например, в [1-3].

При постановке задачи в указанном приближении существенным моментом является формулировка условий испарения. Эти условия связывают параметры испаренного и неиспаренного вещества по обе стороны поверхности испарения и определяют закон ее движения. Так как движение неиспаренного вещества и структура слоя, где происходит испарение, не рассматриваются, то заранее условия испарения не известны и формулируются из каких-либо физических соображений о процессе в целом. Эти условия должны обеспечивать существование и единственность решения задачи.

В данной работе на конкретном примере автомодельного движения рассмотрены существование и единственность решения задачи о разлете в вакуум продуктов поверхностного испарения твердой стенки.

2. В начальный момент времени $t = 0$ конденсированное вещество занимает полупространство $x \geq 0$ и характеризуется плотностью ρ_0 , давлением p_0 и нулевой скоростью.

В точке $x = 0$ вещество граничит с вакуумом. При $t > 0$ в веществе выделяется энергия со скоростью

$$\partial E / \partial t = Q = C m^{-\alpha} t^{\alpha-1} \quad (2.1)$$

$$\left(m = \int_0^x \rho dx \right)$$

где E — удельная внутренняя энергия, m — массовая лагранжева координата, C и α — постоянные величины, причем $C > 0$ и

$$0 < \alpha < 1 \quad (2.2)$$

Условие (2.2) означает, что в конечной массе от 0 до x за конечное время от 0 до t выделяется конечная энергия. Кроме того, при $0 < \alpha < 1$ скорость энерговыделения уменьшается с ростом m и t .

Движение паров под действием энерговыделения (2.1) описывается системой уравнений газодинамики

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial m}, & \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial m} \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= -p \frac{\partial V}{\partial t} + Q, & E &= \frac{pV}{\gamma-1} \end{aligned} \quad (2.3)$$

где u — скорость, V — удельный объем, γ — показатель адиабаты Пуассона. Краевое условие на свободной поверхности — $p = 0$ при $m = 0$. Предполагается, что условия испарения не добавляют параметров с независимыми размерностями к уже имеющимся определяющим параметрам задачи: $\rho_0, p_0, C, \alpha, \gamma$.

Движение с определяющими параметрами автомодельно, с показателем автомодельности, равным единице. Ограничимся условиями испарения, при которых поверхность испарения, являющаяся плоскостью, движется в глубь вещества с постоянной скоростью.

3. Введем безразмерные переменные

$$\lambda = \frac{m}{u_0 \rho_0 t}, \quad U = \frac{u}{u_0}, \quad P = \frac{p}{\rho_0 u_0^2}, \quad v = V \rho_0 \quad (3.1)$$

$(u_0 = (C / \rho_0^\alpha)^{1/(2+\alpha)})$

Система (2.3), записанная в переменных (3.1), принимает вид

$$\begin{aligned} v' &= q \lambda^{-(1+\alpha)} \Delta^{-1}, & P' &= -q \lambda^{1-\alpha} \Delta^{-1}, & U' &= -q \lambda^{-\alpha} \Delta^{-1} \\ \Delta &= \lambda^2 v - \gamma P & (q &= (\gamma-1) \rho_0^{(4+\alpha^2)/(2+\alpha)} C^4 / (2+\alpha)) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Первые два уравнения системы (3.2) можно рассматривать независимо от третьего. При известных $v(\lambda)$ и $P(\lambda)$ скорость можно найти квадратурой с аддитивной постоянной. Система (3.2) частично исследована в [3].

Введем новые переменные s, l, z по формулам

$$s = \lambda^2, \quad l = \gamma P / sv, \quad z = (\lambda^{2+\alpha} v^2)^{-1} \quad (3.3)$$

В новых переменных первые два уравнения системы (3.2) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dz}{ds} &= \frac{z [2qz - (2+\alpha)(l-1)]}{2s(l-1)} \\ \frac{dl}{ds} &= \frac{qz(l+\gamma) - 2l(l-1)}{2s(l-1)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Приравняв нулю числители правых частей уравнений (3.4), получим два частных решения

$$\begin{aligned} l &\equiv 0, \quad z \equiv 0 \\ l &= l_1 = \gamma \frac{2+\alpha}{2-\alpha}, \quad z = z_1 = \frac{2+\alpha}{2q} (l_1 - 1) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Первое решение соответствует $\rho \equiv 0$ и не представляет интереса. Второе решение вместе с уравнением для скорости приводит к

$$v = z_1^{-1/2} \lambda^{(2+\alpha)/2}, \quad P = \frac{2+\alpha}{2-\alpha} \lambda^{(2-\alpha)/2} z_1^{-1/2}, \quad U = -\frac{2+\alpha}{\alpha} \lambda^{-\alpha/2} + U_0 \quad (3.6)$$

Здесь U_0 — произвольная константа. Частное решение (3.6) указано в [3]. Поделив первое уравнение (3.4) на второе, получим

$$\frac{dz}{dl} = \frac{z [2qz - (2+\alpha)(l-1)]}{qz(l+\gamma) - 2l(l-1)} \quad (3.7)$$

Таким образом, задача интегрирования системы (3.2) свелась к интегрированию (3.7), так как при известной зависимости $z(l)$ решение остальных уравнений сводится к квадратурам.

Для анализа существования и единственности решения задачи о разлете паров в вакуум рассмотрим поле интегральных кривых уравнения (3.7). Интегральные кривые схематически показаны на фиг. 1. Стрелки указывают направление роста переменной s .

В особую точку A (седло) с координатами $l = l_1, z = z_1$ входят две интегральные кривые.

Из второго уравнения (3.4) следует, что в окрестности точки A для s справедливо соотношение

$$l = \psi |s|^y + l_1$$

где ψ — произвольная константа. Отметим, что $y > 0$ вдоль интегральной кривой I (фиг. 1) при всех допустимых значениях α, q и γ . Вдоль этой интегральной кривой $s = \lambda^2 \rightarrow 0$ при $l \rightarrow l_1$. Вдоль второй интегральной кривой в точке A $y < 0$, поэтому $s \rightarrow \pm \infty$ при $l \rightarrow l_1$. Из (3.3) следует, что в окрестности точки A

$$P = \frac{l_1}{\gamma \sqrt{z_1}} s^{(2-\alpha)/4}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{z_1}} s^{-(2+\alpha)/4} \quad (3.8)$$

Из формул (3.8) видно, что $P \rightarrow 0, v \rightarrow \infty$ при подходе к точке A по первой кривой, т. е. точка A в этом случае соответствует границе с вакуумом.

Особая точка $l = 0, z = 0$ является узлом. Как показывает анализ системы (3.4), переменная $s \rightarrow +\infty$ при подходе по обоим направлениям к точке O . С приближением к особой точке $l = 1, z = 0$ переменная $s \rightarrow \text{const} \neq 0$.

Бесконечно удаленная точка $l = \infty, z = \infty$ также является особой. Интегральные кривые входят в нее по направлению $dz/dl = \alpha/q$. При этом переменная $s \rightarrow 0$ по закону $s = Hl^{-2/(2-\alpha)}$, где H — произвольная константа. Для плотности, давления и скорости в окрестности точки $l = \infty, z = \infty$ справедливы формулы

$$P \rightarrow P_1 = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{q}{\alpha H}}, \quad \rho = \rho_0 \sqrt{\frac{\alpha}{q} H} s^{\alpha/2} \rightarrow 0, \\ U = \frac{q}{\gamma(1-\alpha)P_1} s^{(1-\alpha)/2} + U_0$$

где U_0 — произвольная константа. Таким образом, точка $l = \infty, z = \infty$ соответствует границе с поршнем постоянного ненулевого давления.

В окрестности любой неособой точки (l_0, z_0)

$$\frac{dl}{ds} = \frac{qz \cdot (l_0 + \gamma) - 2l_0(l_0 - 1)}{2(l_0 - 1)s} = \frac{\Phi}{s} \neq 0$$

откуда

$$s = N e^{l/\Phi}$$

Здесь N — ненулевая произвольная константа, т. е. в неособых точках уравнения (3.7) $s \neq 0$. Итак, точка A является единственной точкой, которая соответствует границе с вакуумом, поэтому краевое условие для уравнения (3.7), соответствующее границе с вакуумом, это $z = z_1$ при $l = l_1$ вдоль кривой I (фиг. 1).

4. Поскольку течение паров может быть разрывным (с ударной волной), то для построения разрывных автомодельных решений рассмотрим

связь между l и z по обе стороны разрыва. Из соотношений Гюгонио

$$\begin{aligned} V_+ - V_- &= -W^{-1}(u_+ - u_-), \quad u_+ - u_- = W^{-1}(p_+ - p_-) \\ E_+ - E_- &= 1/2(p_+ + p_-)(V_- - V_+) \end{aligned}$$

следует связь между $(l, z)_-$ и $(l, z)_+$ в виде

$$z_+ = z_- \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1 + 2l_-} \right)^2, \quad l_+ = \frac{2\gamma - (\gamma - 1)l_-}{\gamma - 1 + 2l_-} \quad (4.1)$$

Здесь W — скорость ударной волны, индекс минус относится к состоянию перед фронтом, плюс — за фронтом. Из формул (4.1) следует, что точки прямой $l = 1$ переходят в себя, т. е. $l = 1$ соответствует слабому разрыву. Это следует и из формулы для l (3.3), которую можно переписать в виде $l = (cp/\lambda)^2$, поскольку скорость звука $c = \sqrt{\gamma p/V}$ в идеальном газе.

Точки с $l_- < 1$ переходят в точки с $l_+ > 1$, при этом $z_+ > z_-$, а значит и $\rho_+ > \rho_-$, что соответствует ударной волне сжатия. Точки с $l_- > 1$ переходят в точки с $l_+ < 1$, при этом $z_+ < z_-$, что соответствует ударной волне разрежения. Ударные волны разрежения в идеальном газе механически неустойчивы, поэтому точки с

$l > 1$ не могут соответствовать состояниям перед фронтом скачка. Возможные ударные переходы показаны на фиг. 2. Область возможных состояний перед фронтом заштрихована горизонтально, за фронтом — вертикально. Линия $l = 0$ переходит в линию $l = 2\gamma/(\gamma - 1)$.

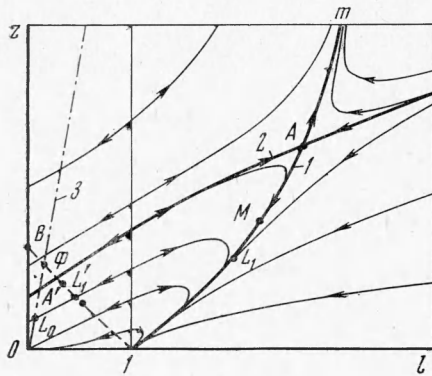
Пунктирная линия IB на фиг. 1 есть геометрическое место состояний перед фронтом скачка, которые переходят в точки кривой I .

5. Приведенных сведений об интегральных кривых уравнений (3.4) и (3.7), а также о свойствах автомодельных ударных волн достаточно, чтобы перейти к рассмотрению существования и единственности решения задачи о разлете паров в вакуум. Решение уравнения (3.7), которое удовлетворяет условию $z = z_1$ при $l = l_1$ вдоль кривой I , существует и единственно, если краевое условие в плоскости испарения в переменных l, z изображается:

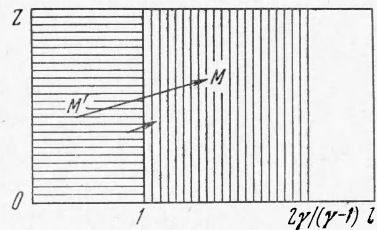
- 1) точкой, принадлежащей кривой I ;
- 2) линией, имеющей одну точку пересечения с кривой I , но не имеющей общих точек с треугольником $10B$;
- 3) точкой, принадлежащей треугольнику $10B$.

В остальных случаях решения нет или оно не единственно.

Действительно, в первом случае решение непрерывно и состоит из куска сепаратрисы MA , где M — точка, соответствующая поверхности испарения. Если эта точка совпадает с A , то задача решается с помощью частного решения (3.6).



Фиг. 1



Фиг. 2

Второй случай сводится к первому, но начальные значения l и z не заданы заранее, а определяются пересечением сепаратрисы I и линии, соответствующей краевому условию.

В третьем случае решение разрывно и состоит из куска интегральной кривой L_0L_1' и куска кривой L_1A , где L_0 — точка, соответствующая поверхности испарения, L_1' — точка пересечения интегральной кривой и линии $1B$, L_1 — точка, в которую переходит точка L_1' на ударной волне (фиг. 1).

Рассмотрим случай нарушения условий существования и единственности решения уравнения (3.7). Если точка, соответствующая поверхности испарения, не принадлежит треугольнику $10B$ и не лежит на сепаратрисе I , то из фиг. 1 видно, что нет интегральной кривой (непрерывной или разрывной), которая соединяла бы эту точку с точкой A с сохранением монотонности изменения переменной s . (Решение, в котором переменная $s = \lambda^2$ меняется немонотонно, не имеет физического смысла.) Если краевому условию на поверхности испарения соответствует линия, принадлежащая треугольнику $10B$, то существует бесконечное множество разрывных решений, начинающихся в точках этой линии. Решения строятся так же, как в третьем случае.

При известных значениях l и z на поверхности испарения для построения единственного решения уравнений (3.4) необходимо и достаточно задать скорость поверхности испарения D . Это следует из (3.4). Для нахождения зависимости $U(\lambda)$ необходимо и достаточно задать скорость паров u_1 на поверхности испарения. Это следует из третьего уравнения системы (3.2).

Из структуры решения уравнения (3.7) следует, что возможны два качественно различных режима автомодельного разлета паров:

- 1) непрерывное течение;
- 2) течение с ударной волной.

Решение задачи о разлете паров в вакуум существует и единственно, если из условий испарения могут быть определены скорость поверхности испарения и скорость паров на ней, а также давление и плотность или их связь.

В [3] при энерговыделении вида (2.1) сформулированы следующие условия испарения. Закон движения поверхности испарения задается уравнением

$$\int_0^t Q(m_1, t) dt = c_v(T_1 - T_0) + \theta = \beta \quad (5.1)$$

из которого следует, что скорость поверхности $D = (\alpha\beta)^{-1/\alpha} C^{1/\alpha}$.

Здесь m_1 координата поверхности испарения, T_0 и C_v — начальная температура и теплоемкость конденсированного вещества, T_1 и θ — температура и удельная теплота испарения. Согласно уравнению (5.1) поверхность испарения в момент времени t находится в точке, где температура за счет энерговыделения поднялась от начальной до температуры испарения и выделилась энергия, равная теплоте испарения. Остальные условия испарения имеют вид

$$(u_1 - D)\rho_1 = -D\rho_0, \quad p_1 = RT_1\rho_1 \quad (5.2)$$

где ρ_1 , p_1 и u_1 — плотность, давление и скорость паров, R — универсальная газовая постоянная. В переменных l , z эти условия дают прямую

$$z = l(\tau\lambda_1^\alpha)^{-1} \quad (\tau = RT_1/u_0^2, \quad \lambda_1 = D/u_0) \quad (5.3)$$

