

14. Набережнова Г. В. Расчет нестационарного взаимодействия сверхзвуковой струи с плоской преградой методом «крупных частиц». — «Труды ЦАГИ», 1978, вып. 1899.
15. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М., «Наука», 1976.
16. Дубинская Н. В., Иванов М. Я. Численное исследование стационарных режимов взаимодействия сверхзвуковой недорасширенной струи с плоской преградой, расположенной перпендикулярно к ее оси. — «Изв. АН СССР. МЖГ», 1976, № 5.
17. Абрамович Г. Н. Прикладная газовая динамика. М., «Наука», 1969.
18. Матвеев С. К. Некоторые аспекты применения метода Годунова к решению задач нестационарной газовой динамики. — «Учен. зап. Ленингр. ун-та. Газодинамика и теплообмен», 1976, № 5.
19. Минайлос А. Н. Невязкое сверхзвуковое течение у тонкой прямоугольной пластины. — «Учен. зап. ЦАГИ», 1976, т. 7, № 3.
20. Соколов Е. И. Течение в ударном слое перед преградой, перпендикулярной оси сверхзвуковой недорасширенной струи. — «Изв. АН СССР. МЖГ», 1977, № 4.

УДК 532.517.4

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕНОСА ИМПУЛЬСА В СЛЕДЕ ЗА ЦИЛИНДРОМ С ПРИВЛЕЧЕНИЕМ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ТРЕТЬИХ МОМЕНТОВ

*А. Ф. Курбацкий, А. Т. Онуфриев*

*(Новосибирск, Долгопрудный)*

1. Один из путей развития современной феноменологической теории турбулентного переноса состоит в формулировании некоторой системы уравнений для моментов гидродинамических полей турбулентного потока, максимальный порядок которых продиктован обычно как физическими соображениями, так и принятым способом замыкания этой системы.

В последнее время были предложены модели турбулентного переноса, замкнутые на уровне вторых моментов, в которых искомые — вторые моменты, а третьи моменты моделируются на основании эвристических соображений. Привлечение уравнений для моментов высокого порядка вызывается в конечном счете тем, что в целом ряде физических задач не удается правильно описать турбулентный перенос импульса, тепла и скалярных свойств в рамках простейших градиентных моделей первого порядка (например, прандтлевской теории пути смешения). Такие задачи не исключение, и с некоторыми из них можно ознакомиться в работах [1—4]. Примером модели турбулентного переноса, замкнутой на уровне вторых моментов (модель второго порядка), может служить модель [5], в которой турбулентные потоки (т. е. вторые моменты турбулентных флуктуаций) замкнуты с помощью использования метода кинетической теории газов применительно к третьим моментам. При этом, по сути, проводится грубая аналогия с кинетической теорией, в которой присутствует элемент веры: если грубое приближение для моментов второго порядка позволяет в простых случаях вычислять величины первого порядка (так обстоит дело в простейших феноменологических моделях турбулентного переноса, основанных на длине пути смешения), то, возможно, аналогичные грубые аппроксимации позволят правильно предвычислить вторые моменты. Несмотря на то, что с помощью моделей второго порядка удалось получить правильное описание турбулентного переноса в тех задачах, где простейшие феноменологические модели переноса оказываются несостоятельными, все модели второго порядка имеют основной недостаток: не дают рационального метода для вычисления третьих моментов.

Полученные к настоящему времени результаты по численному моделированию турбулентного переноса в ряде конкретных физических задач (например, [4—8]) с помощью моделей переноса второго порядка дают основание полагать, что многие явления турбулентного переноса в развитой (трехмерной) турбулентности могут быть правильно описаны, если физически непротиворечивым образом в модель турбулентного переноса будут включены в качестве искомых величины третьи моменты, описывающие процессы турбулентной диффузии тех или иных вторых моментов гидродинамических полей (скорости, концентрации,

температуры, солености и т. д.). Включение третьих моментов в качестве иско- мых в модель турбулентного переноса позволяет преодолеть трудности, с кото- рыми встречаются градиентные модели турбулентного переноса в задачах, в которых пространственные и временные масштабы турбулентного движения не малы по сравнению с пространственными и временными масштабами среднего движения (градиентные модели переноса предполагают малость турбулентных масштабов по сравнению с масштабами среднего движения). Одним из многих примеров несостоятельности градиентного механизма переноса может служить поверхностный слой атмосферы Земли, перемешиваемый турбулентной конвек- цией (силами плавучести). Градиентная модель турбулентного переноса в этом случае даже качественно неверно предсказывает не только распределение по- перек этого слоя дивергенции турбулентного потока энергии, но также и рас- пределение самого потока энергии турбулентности, распределений, которые реально наблюдаются в атмосфере (см., например, [2—4]). Можно заметить, что вопрос о несостоятельности градиентного механизма турбулентного переноса в настоящее время оживленно обсуждается [1, 9, 10].

Течение в следе за цилиндром при больших числах Рейнольдса также представляет собой случай, где градиентный механизм переноса «не работает», по крайней мере, в части этого течения [11]. Согласно экспериментальным дан- ным Таунсенда [12], в дальней области следа, где статистические характери- стики поля скорости следа (вторые и третьи моменты) находятся в приближенно автомодельном состоянии, вблизи оси следа имеется небольшая область, в ко- торой плотность поперечной составляющей турбулентного потока продольной интенсивности турбулентности  $\langle u'^2 \rangle$ , т. е. величина  $\langle u'^2 v' \rangle$ , имеет тот же знак, что и градиент этой интенсивности  $\partial \langle u'^2 \rangle / \partial y$ , так что вблизи оси следа пере- нос продольной интенсивности турбулентности идет в сторону возрастания градиента.

2. Модельное уравнение для плотности вероятности поля скорости, предложенное в [13, 14], записано с учетом пульсаций температуры и концентрации примеси для несжимаемой жидкости (детально с этим урав- нением и предположениями, на основе которых оно получено, можно озна- комиться в [14]). Система уравнений для моментов поля скорости раз- витого свободного турбулентного потока, которая вытекает из уравнения переноса, полученного из этого модельного уравнения для плотности вероятности поля скорости, имеет вид

$$(2.1) \quad \frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_k} = 0;$$

$$(2.2) \quad \frac{\partial \langle u_\alpha \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [\langle u_k \rangle \langle u_\alpha \rangle + \langle u'_k u'_\alpha \rangle] = 0;$$

$$(2.3) \quad \frac{\partial \langle u'_\alpha u'_\beta \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [\langle u_k \rangle \langle u'_\alpha u'_\beta \rangle + \langle u'_k u'_\alpha u'_\beta \rangle] + \langle u'_k u'_\alpha \rangle \frac{\partial \langle u'_\beta \rangle}{\partial x_k} + \langle u'_k u'_\beta \rangle \frac{\partial \langle u'_\alpha \rangle}{\partial x_k} = -\frac{2\nu_1}{\tau} \langle u'_\beta u'_\alpha \rangle - \frac{\nu_2}{\tau} \left[ \langle u'_\alpha u'_\beta \rangle - \frac{2}{3} E \delta_{\alpha\beta} \right];$$

$$(2.4) \quad \frac{\partial \langle u'_\alpha u'_\beta u'_\gamma \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \langle u_k \rangle \langle u'_\alpha u'_\beta u'_\gamma \rangle + \langle u'_k u'_\alpha u'_\beta u'_\gamma \rangle \frac{\partial \langle u_\alpha \rangle}{\partial x_k} + \langle u'_k u'_\alpha u'_\gamma \rangle \frac{\partial \langle u'_\beta \rangle}{\partial x_k} + \langle u'_k u'_\alpha u'_\beta \rangle \frac{\partial \langle u'_\gamma \rangle}{\partial x_k} - \langle u'_\gamma u'_\beta \rangle \frac{\partial \langle u'_\alpha u'_k \rangle}{\partial x_k} - \langle u'_\gamma u'_\alpha \rangle \frac{\partial \langle u'_k u'_\beta \rangle}{\partial x_k} - \langle u'_\alpha u'_\beta \rangle \frac{\partial \langle u'_\gamma u'_k \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \langle u'_k u'_\alpha u'_\beta u'_\gamma \rangle = = -\left( \frac{3\nu_2}{2} + 3\nu_1 \right) \frac{\langle u'_\alpha u'_\beta u'_\gamma \rangle}{\tau}.$$

В уравнениях (2.1)—(2.4) угловыми скобками обозначены средние вели- чины, а штрихами отмечены турбулентные флуктуации компонент поля

скорости. Время релаксации  $\tau = AL/\sqrt{E}$ , где  $E = \frac{1}{2} \langle u'_k u'_k \rangle$  — плотность энергии турбулентности;  $L$  — интегральный масштаб турбулентности. Эмпирические постоянные  $A$ ,  $\nu_1$  и  $\nu_2$  определены из рассмотрения ряда частных случаев [15] и при расчете более сложных течений [8] уже не изменяются ( $A \cong 4$ ,  $\nu_1 \cong 1/2$ ,  $\nu_2 \cong 1$ ).

Система уравнений для моментов (2.1)—(2.4) не замкнута. Помимо четвертого момента, появляющегося в уравнении для третьих моментов (2.4), неопределенным пока остается масштаб турбулентности  $L$ . Для замыкания системы (2.1)—(2.4) (т. е. связи четвертых моментов со вторыми) использовано два приближения: гипотеза квазинормальности Миллионщикова и метод тринадцати моментов кинетической теории газов [16]. Гипотеза Миллионщикова находит свое подтверждение в случае однородной турбулентности [17]. По-видимому, трудно дать строгое доказательство того, что использование гипотезы Миллионщикова в неоднородных турбулентных течениях оказывается корректным, т. е. гарантирует, что третьи моменты никогда не превосходят их физически возможные значения. Однако остается фактом, что при физически правильной аппроксимации корреляции давление — градиент пульсаций скорости удается в различного рода задачах турбулентного переноса получить результаты, в которых отсутствует нефизичное поведение различных статистических характеристик как поля скорости [5—8], так и поля концентрации [8]. В дополнение к сказанному можно добавить, что отличные от нуля третьи моменты свидетельствуют о негауссовом распределении вероятностей, однако, как отмечено в [4], если воспользоваться разложением по возмущениям около равновесного гауссова распределения, то оказывается, что время релаксации для третьих моментов составляет примерно 20% времени релаксации для вторых моментов. Поэтому, если время релаксации для каждого последующего кумулянта будет в процентном отношении меньше, то оправдано использовать гипотезу четвертых моментов, если отклонение от состояния равновесия невелико. Гипотеза Миллионщикова, как известно, имеет чисто статистическую природу и никак не связана со спецификой механизма (турбулентного) переноса.

С другой стороны, в основе подхода к теории турбулентного переноса, основанного на использовании уравнений для определения совместных плотностей вероятности пульсаций рассматриваемых полей, лежит аналогия с молекулярным переносом. Эту аналогию представлялось целесообразным провести несколько глубже. Опираясь на опытный факт, что величина пути перемешивания (или масштаб корреляции) не мала по сравнению с характерным масштабом всего потока, аналогию следует проводить с молекулярным переносом при большой длине свободного пробега. В этом случае уже нет закона Фика для потока тепла и реологического уравнения состояния Стокса для напряжения трения по сравнению с предельными законами при малой длине свободного пробега. В кинетической теории газов уравнение переноса при большой длине свободного пробега — это, например, уравнение для тензора напряжений в  $\tau$ -приближении или в приближении тринадцати моментов [16], в котором тензор напряжений — зависимая переменная, удовлетворяющая дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка. Замкнутая система уравнений тринадцати моментов в методе Грэда получается при обрывании разложения функции распределения в ряд по полиномам Эрмита на третьем члене, откуда следует связь между четвертыми и вторыми моментами. В случае турбулентного течения эта связь принимает вид

$$(2.5) \quad \langle u'_\alpha u'_\beta u'_\gamma u'_\delta \rangle = h^2 (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) + \\ + h \{ \delta_{\alpha\gamma} (\langle u'_\alpha u'_\beta \rangle - h \delta_{\alpha\beta}) + \delta_{\beta\gamma} (\langle u'_\alpha u'_\delta \rangle - h \delta_{\alpha\delta}) + \delta_{\beta\delta} (\langle u'_\alpha u'_\gamma \rangle - h \delta_{\alpha\gamma}) + \\ + \delta_{\alpha\delta} (\langle u'_\beta u'_\gamma \rangle - h \delta_{\beta\gamma}) + \delta_{\alpha\beta} (\langle u'_\delta u'_\gamma \rangle - h \delta_{\delta\gamma}) \},$$

где  $h = 2E/3$ .

Согласно гипотезе Миллионщикова, четвертые моменты поля скорости выражаются через вторые по формулам, справедливым для нормального распределения:

$$(2.6) \quad \langle u'_\alpha u'_\beta u'_\gamma u'_\delta \rangle = \langle u'_\alpha u'_\beta \rangle \langle u'_\gamma u'_\delta \rangle + \langle u'_\alpha u'_\gamma \rangle \langle u'_\beta u'_\delta \rangle + \langle u'_\alpha u'_\delta \rangle \langle u'_\beta u'_\gamma \rangle.$$

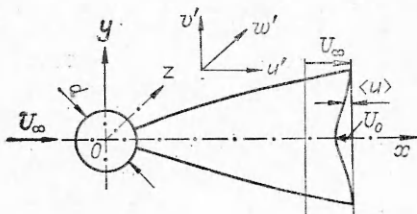
Соотношения (2.5) или (2.6) замыкают (с точностью до определения масштаба турбулентности  $L$ ) систему уравнений для моментов поля скорости (2.1)–(2.4).

Все вышесказанное о двух возможных способах замыкания системы уравнений для моментов поля скорости развитого неоднородного турбулентного потока дает основание полагать, что представляет самостоятельный интерес сравнение обоих способов замыкания в задаче, где турбулентный перенос носит неградиентный характер. Задача о течении в следе за цилиндром представляет подходящий простой пример (хотя с точки зрения его математической реализации этот пример и не так прост).

Последовательное развитие модели турбулентного переноса, основанной на уравнении для одноточечной плотности вероятности (в  $\tau$ -приближении), требует и столь же последовательного способа определения масштаба турбулентности  $L$  в рамках самой модели. Интерпретация этого масштаба как масштаба корреляции, в пределах которого элемент жидкости совершает коррелированное пульсационное движение в окружающей среде, требует рассмотрения уравнения для двухточечной плотности вероятности. Это одна из трудностей, с которыми приходится иметь дело в данной модели переноса и которую до сих пор пока не удалось преодолеть в полной мере, т. е. не удалось получить уравнение для двухточечной плотности вероятности в реализуемом виде. Поэтому при решении задачи о течении в следе за цилиндром (как и в других автомодельных задачах свободной турбулентности) выражение для масштаба турбулентности  $L$  может быть выбрано в форме, согласующейся с автомодельной структурой потока, обнаруживаемой в эксперименте. Используется только одна величина масштаба.

3. Система уравнений (2.1)–(2.4) для задачи о течении в следе за цилиндром (фиг. 1) может быть записана в приближении пограничного слоя, а уравнение движения может быть взято в линеаризованном виде при отсутствии градиента давления. Это обычные приближения в задаче о плоском следе в несжимаемой жидкости [12]. Перемежаемость в потоке не учитывается. Уравнения (2.2), (2.3) для течения в следе принимают вид

$$(3.1) \quad U_\infty \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \langle u'v' \rangle, \\ U_\infty \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial x} + \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial y} \langle u'v'^2 \rangle - \frac{2v_1 + v_2}{\tau} \langle u'v' \rangle, \\ U_\infty \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial x} = - \frac{\partial \langle v'^3 \rangle}{\partial y} - \frac{2v_1}{\tau} \langle v'^2 \rangle - \frac{v_2}{\tau} (\langle v'^2 \rangle - h),$$



Фиг. 1

$$U_{\infty} \frac{\partial \langle u'^2 \rangle}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial y} \langle u'v' \rangle - \frac{2v_1}{\tau} \langle u'^2 \rangle - \frac{v_2}{\tau} (\langle u'^2 \rangle - h) - 2 \langle u'v' \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y},$$

$$U_{\infty} \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial x} = - \frac{2v_1}{\tau} \langle w'^2 \rangle - \frac{v_2}{\tau} (\langle w'^2 \rangle - h) - \frac{\partial}{\partial y} \langle w'v' \rangle.$$

Уравнения для третьих моментов, замкнутые с помощью соотношения (2.6), имеют вид

$$(3.2) \quad U_{\infty} \frac{\partial \langle u'^2 v' \rangle}{\partial x} + \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle u'^2 \rangle}{\partial y} + 2 \langle u'v' \rangle \frac{\partial \langle w'v' \rangle}{\partial y} + 2 \langle u'v'^2 \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} =$$

$$= - \left( 3v_1 + \frac{3v_2}{2} \right) \frac{\langle u'^2 v' \rangle}{\tau},$$

$$U_{\infty} \frac{\partial \langle v'^3 \rangle}{\partial x} + 3 \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial y} = - \left( 3v_1 + \frac{3v_2}{2} \right) \frac{\langle v'^3 \rangle}{\tau},$$

$$U_{\infty} \frac{\partial \langle w'^2 v' \rangle}{\partial x} + \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial y} = - \left( 3v_1 + \frac{3v_2}{2} \right) \frac{\langle w'^2 v' \rangle}{\tau},$$

$$U_{\infty} \frac{\partial \langle u'v'^2 \rangle}{\partial x} + \langle u'v' \rangle \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial y} + 2 \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} +$$

$$+ \langle v'^3 \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} = - \left( 3v_1 + \frac{3v_2}{2} \right) \frac{\langle u'v'^2 \rangle}{\tau}.$$

Уравнения для третьих моментов, замкнутые с помощью соотношения (2.5), записываются в виде

$$(3.3) \quad U_{\infty} \frac{\partial \langle u'^2 v' \rangle}{\partial x} + 2 \langle u'v'^2 \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} - \langle u'^2 \rangle \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial y} - 2 \langle u'v' \rangle \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} h^2 + \frac{\partial}{\partial y} h (\langle u'^2 \rangle - h) + \frac{\partial}{\partial y} h (\langle v'^2 \rangle - h) = - \left( 3v_1 + \frac{3v_2}{2} \right) \frac{\langle u'^2 v' \rangle}{\tau},$$

$$U_{\infty} \frac{\partial \langle v'^3 \rangle}{\partial x} - 3 \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial y} + 3 \frac{\partial h^2}{\partial y} + 6 \frac{\partial}{\partial y} h (\langle v'^2 \rangle - h) = - \left( 3v_1 + \frac{3v_2}{2} \right) \frac{\langle v'^3 \rangle}{\tau},$$

$$U_{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \langle w'^2 v' \rangle - \langle w'^2 \rangle \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial y} + \frac{\partial h^2}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} h (\langle w'^2 \rangle - h) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} h (\langle v'^2 \rangle - h) = - \left( 3v_1 + \frac{3v_2}{2} \right) \frac{\langle w'^2 v' \rangle}{\tau},$$

$$U_{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \langle u'v'^2 \rangle + \langle v'^3 \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} - \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} - 2 \langle u'v' \rangle \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial y} +$$

$$+ 3 \frac{\partial}{\partial y} h \langle u'v' \rangle = - \left( 3v_1 + \frac{3v_2}{2} \right) \frac{\langle u'v'^2 \rangle}{\tau}.$$

Таким образом, при обоих способах замыкания получается система девяти дифференциальных уравнений для девяти неизвестных функций. Для дальнейшего удобно записать эту систему в векторном виде (такая запись идентична для обоих способов замыкания)

$$(3.4) \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + A(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = \mathbf{f}(\mathbf{u}),$$

где  $\mathbf{u} = \langle \langle u \rangle, \langle u'v' \rangle, \langle u'^2 \rangle, \langle v'^2 \rangle, \langle w'^2 \rangle, \langle u'^2 v' \rangle, \langle v'^3 \rangle, \langle w'^2 v' \rangle, \langle u'v'^2 \rangle \rangle$  — девятикомпонентный искомый вектор;  $A(\mathbf{u})$  — квадратная несимметрическая матрица девятого порядка;  $\mathbf{f}(\mathbf{u})$  — правая часть с алгебраической нелинейностью относительно искомого вектора. Матрица  $A(\mathbf{u})$  и вектор  $\mathbf{f}(\mathbf{u})$  составляются очевидным образом из системы уравнений (3.1), (3.2)

и (3.1), (3.3) и поэтому нет необходимости приводить здесь их конкретный вид.

Как в случае замыкания по методу тринадцати моментов (система (3.1), (3.3)), так и при замыкании с использованием гипотезы квазинормальности (система (3.1), (3.2)), уравнение (3.4) принадлежит к гиперболическому типу: у него кратные действительные характеристики. В случае замыкания с применением гипотезы квазинормальности уравнение (3.4) имеет характеристики:  $\lambda_1 (\equiv dx/dy) = 1/\sqrt{\langle v'^2 \rangle}$  (четырекратная),  $\lambda_2 = 1/\sqrt{3\langle v'^2 \rangle}$  (двукратная) и три действительные характеристики, определяемые кубическим уравнением  $\lambda^3 + (3\langle v'^2 \rangle/\langle v'^3 \rangle)\lambda^2 - (1/\langle v'^3 \rangle) = 0$ . (В случае замыкания по методу тринадцати моментов характеристическое уравнение для (3.4) имеет сложный вид, и в явном виде все характеристики вычислить затруднительно.)

Вследствие симметрии следа может быть рассмотрена только одна его половина, и на оси симметрии (при  $y = 0$  (см. фиг. 1)) граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} = 0, \quad \langle u'v' \rangle = 0, \quad \frac{\partial \langle u_i'^2 \rangle}{\partial y} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad \frac{\partial \langle u'v'^2 \rangle}{\partial y} = 0, \\ \langle u_i'^2 v' \rangle = 0.$$

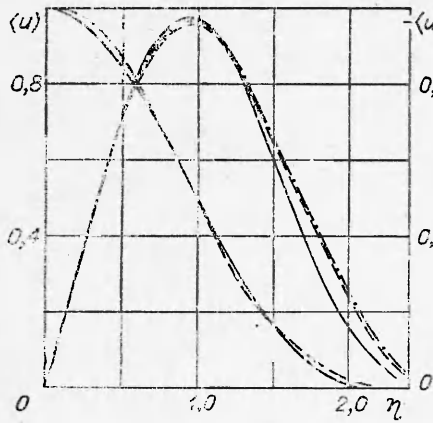
При  $y \rightarrow \infty$  однородному граничному условию должен удовлетворять искомый вектор  $\mathbf{u}$ .

Для решения уравнения (3.4) (при обоих способах замыкания) применен метод конечных разностей. Использована неявная разностная схема типа «предиктор - корректор» [18, 19]. «Корректор» (явный пересчет) в этой схеме осуществляется в виде «закона сохранения» для уравнения (3.4) в интервале разностной ячейки счетной сетки. Разностный аналог уравнения (3.4) на шаге «предиктор» имеет вид

$$(3.5) \quad A_n \mathbf{u}_{n+1} + B_n \mathbf{u}_n + C_n \mathbf{u}_{n-1} = \mathbf{D}_n,$$

где  $A, B, C$  — квадратные матрицы девятого порядка;  $\mathbf{D}$  — девятикомпонентный вектор. Для обращения матрицы в методе матричной прогонки решения уравнения (3.5) использован более экономичный способ [8], чем метод обращения с выбором главного элемента, основанный на том очевидном факте, что в силу самой физической постановки исходной задачи для уравнения (3.4) обрабатываемая матрица не должна быть плохо обусловленной (коэффициенты разностного оператора должны быть не вырождены во всей области интегрирования). Поэтому нет никакой необходимости обращать матрицу, выбирая каждый раз ее главный элемент. Можно проводить обращение матрицы последовательно, по столбцам. Как отмечено в [8], в случае обращения матрицы четвертого порядка способ обращения «по столбцам» позволил уменьшить время счета (в алгоритме прогонки) примерно в 1,5 раза по сравнению с имеющимися стандартными процедурами обращения матриц с выбором главного элемента. При этом, как показали численные эксперименты с матрицей четвертого порядка, четыре значащих цифры обратной матрицы оказались одинаковыми при обоих способах обращения. Использованная разностная схема неявная, и факт ее безусловной вычислительной устойчивости подтвержден экспериментально (проведением вычислений при различных отношениях шагов разностной сетки).

Выражение для масштаба турбулентности принято на основании соображений размерности и подобия согласующимся с автоматической



Ф и г. 2

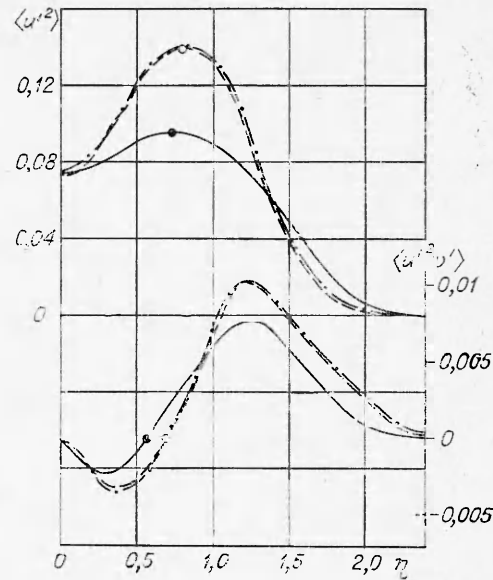
структурой следа, обнаруживаемой в эксперименте [12],

$$L = k\delta,$$

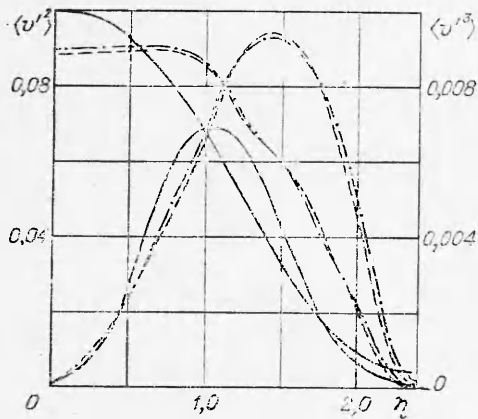
где  $k \cong 0,3$  — эмпирическая постоянная;  $\delta$  — условная ширина следа, расстояние между точками, в которых скорость составляет половину от максимальной.

4. Решение уравнения (3.5) велось на прямоугольной сетке с шагами  $\Delta x$  и  $\Delta y$  в направлении осей  $x$  и  $y$  (см. фиг. 1) с добавлением в процессе счета узлов сетки вследствие расширения следа с возрастанием координаты  $x$ . Величины шагов выбирались из условия сохранения точности решения задачи.

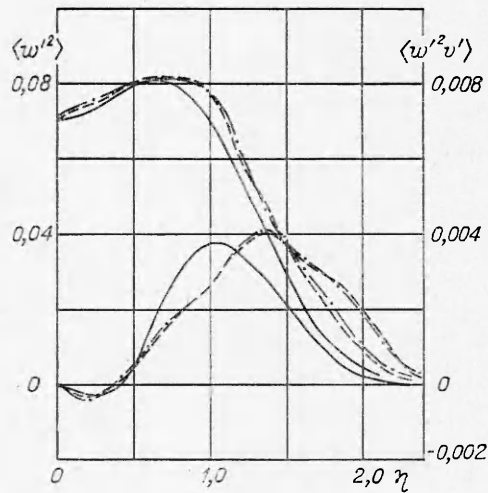
Численные результаты представлены на фиг. 2—6. Все функции нормализованы с помощью величины дефекта скорости на оси следа, а безразмерная координата  $\eta$  представляет собой отношение поперечной координаты  $y$  к условной ширине следа  $\delta$ . На фиг. 2—6 сплошной линией нанесены экспериментальные данные Таунсенда [12], штриховой — чис-



Ф и г. 3

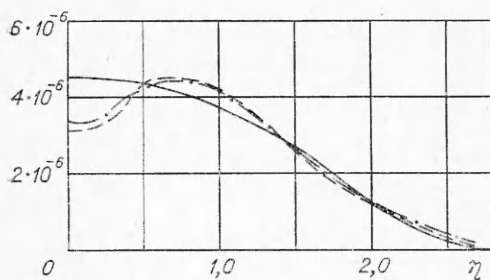


Ф и г. 4



Ф и г. 5





Фиг. 6

ленные результаты с замыканием по гипотезе четвертых моментов, а штрихпунктирной — с замыканием по методу тринадцати моментов. Все кривые относятся к сечению следа  $x/d \cong 525$ , где вторые и третьи моменты достигают приближенно автомодельного состояния (на расстоянии 50 калибров, от  $x/d \cong 475$  до  $x/d \cong 525$ , вторые моменты в численном решении изменялись в пределах 1%, а третьи — в пределах 3%). На фиг. 3

изображены продольная интенсивность турбулентности  $\langle u'^2 \rangle$  и диффузия этой интенсивности в поперечном направлении  $\langle u'^2 v' \rangle$ . Во-первых, результаты расчета при обоих способах замыкания оказываются близкими, а точка на оси  $\eta$ , где численное решение для третьего момента  $\langle u'^2 v' \rangle$  обращается в нуль, не совпадает с точкой на оси  $\eta$ , где  $\langle u'^2 \rangle$  принимает максимальное значение. Во-вторых, хотя эти точки в численном решении и оказались сдвинутыми вправо (к внешней границе следа) относительно аналогичных экспериментальных точек, их взаимный сдвиг близок к экспериментальному. Этот результат дает основание полагать, что явление кажущейся «отрицательной» вязкости относительно процесса диффузии интенсивности турбулентности, экспериментально наблюдаемое в приосевой зоне плоского следа, может быть описано на основе модели переноса, в которой третьи моменты — искомые функции, определяемые из соответствующих дифференциальных уравнений сохранения. Можно заметить, что численные результаты по вторым моментам пульсаций поля скорости в плоском следе получены ранее в работе [5] на основании упомянутой в п. 1 модели переноса, в которой предполагалось, что любой третий момент может быть выражен в виде градиента от вторых моментов (замыкающая гипотеза). Однако в численных результатах, приведенных в [5], отсутствуют данные о третьих моментах и их сопоставлении с экспериментом. На фиг. 4—6 приведены результаты численного решения и сравнение с экспериментальными данными для поперечной интенсивности турбулентности  $\langle v'^2 \rangle$  и ее третьего момента (фиг. 4), для интенсивности турбулентности  $\langle w'^2 \rangle$  в направлении от оси  $z$  (см. фиг. 1) и ее третьего момента (фиг. 5). На фиг. 6 приведены результаты для скорости диссипации энергии турбулентности  $\epsilon = 2\nu_1 E/\tau$ . Видно, что пик у кривой диссипации численного решения смещен от оси, что, по-видимому, связано со слишком изотропным выражением для нее, не учитывающим анизотропный характер течения вблизи оси. Из гипотезы автомодельности вытекает, что при использовании только одной величины масштаба  $L$  ( $L = L(x)$ ) и скорости  $U_0$  ( $U_0 = U_0(x)$ ) системы уравнений (3.1), (3.2) и (3.1), (3.3) допускают автомодельное решение. Из соответствующих условий автомодельности следует тогда, что дефект скорости на оси следа  $U_0$  и условная ширина следа  $\delta (=L/k)$  изменяются с расстоянием  $x$  вниз по потоку как

$$(4.1) \quad U_0/U_\infty = c_0/\sqrt{x/d}, \quad \delta/d = (c_1/k)\sqrt{x/d}.$$

Опытные данные [12] свидетельствуют о справедливости автомодельных выражений (4.1) для расстояний  $x/d > 100$ . Постоянные коэффициенты в выражениях (4.1), найденные из этих опытных данных, равны:  $c_0 \cong 0,93$ ,  $(c_1/k) \cong 0,19$ . В численном расчете получены те же закономерности (4.1)



изменения  $U_0$  и  $\delta$  с расстоянием  $x$ , а численные коэффициенты равны:  $c_0 \cong 1$ ,  $c_1 \cong 0,06$ .

Поступила 13 XII 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Онуфриев А. Т. Модели феноменологических теорий турбулентности. — В кн.: Аэрогазодинамика и физическая кинетика. Новосибирск, изд. ИТПМ СО АН СССР, 1977.
2. Andre J. C., de Moor G., Lacarrere P., du Vachat R. Turbulence approximation for inhomogeneous flows (pt. I). — «J. Atmos. Sci.», 1976, vol. 33, N 3.
3. Andre J. C., de Moor G., Lacarrere P., du Vachat R. Turbulence approximation for inhomogeneous flows (pt. II). — «J. Atmos. Sci.», 1976, vol. 33, N 3.
4. Lumley J. L., Zeman O., Siess J. The influence of buoyancy on turbulent transport. — «J. Fluid Mech.», 1978, vol. 84, N 3.
5. Lumley J. L., Khajen-Nouri B. Computational modeling of turbulent transport. — In: Turbulent Diffusion in Environmental Pollution. Vol. 18A. N. Y., Academic Press, 1974.
6. Launder B. E., Reece G. J., Rodi W. Progress in the development of a Reynolds stress turbulence closure. — «J. Fluid Mech.», 1975, vol. 68, N 3.
7. Hanjalić K., Launder B. E. A Reynolds stress model of a turbulence and its application to thin shear flow. — «J. Fluid Mech.», 1972, vol. 52, N 4.
8. Курбацкий А. Ф. Некоторые статистические характеристики диффузии химически активной примеси в турбулентной зоне смешения. — ПМТФ, 1975, № 3; 1975, № 6.
9. Tennekes H., Lumley J. A first course in turbulence. MIT Press, 1972.
10. Corrsin S. Limitations of gradient transport models in random walks and in turbulence. — In: Turbulent Diffusion in Environmental Pollution. Vol. 18A. N. Y., Academic Press, 1974.
11. Batchelor G. K. Note on free turbulent flows with special reference to the two-dimensional wake. — «J. Aeron. Sci.», 1950, vol. 17, p. 441—445.
12. Таунсенд А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М., ИЛ, 1959.
13. Lundgren T. S. Model equation for nonhomogeneous turbulence. — «Phys. Fluids», 1969, vol. 12, N 3.
14. Онуфриев А. Т. О модельном уравнении для плотности вероятности в полуэмпирической теории турбулентного переноса. — В кн.: Турбулентные течения. М., «Наука», 1977.
15. Онуфриев А. Т. Об уравнениях полуэмпирической теории турбулентного переноса. — ПМТФ, 1970, № 2.
16. Грэд Г. О кинетической теории разреженных газов. — Сб. Механика, 1952, № 4; 1952, № 5.
17. Frenkiel F. N., Klebanoff P. S. Higher-order correlations in a turbulent field. — «Phys. Fluids», 1967, vol. 10, N 3; vol. 10, N 8.
18. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, «Наука», 1967.
19. Численное решение многомерных задач газовой динамики. Под ред. С. К. Годунова. М., «Наука», 1976.

УДК 539.198 : 533.6.0118.

### О ФОРМИРОВАНИИ СВЕРХЗВУКОВЫХ МОЛЕКУЛЯРНЫХ ПУЧКОВ С ПОМОЩЬЮ СКИММЕРА

А. Е. Зарвин, Р. Г. Шарафутдинов

(Новосибирск)

Одной из главных проблем при формировании молекулярного пучка из сверхзвукового потока разреженного газа по методу [1] является устранение искажений, возникающих в результате взаимодействия набегающего газового потока со скиммером.

Подавляющая часть исследований (см. обзоры [2, 3]) посвящена изучению искажений интенсивности (плотности) молекулярного пучка, в то время как проблема влияния скиммерного взаимодействия на функцию распределения