

Д. Н. Горелов

К ВЫБОРУ КОНТРОЛЬНЫХ ТОЧЕК В МЕТОДЕ ДИСКРЕТНЫХ ВИХРЕЙ

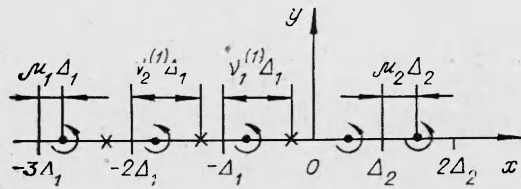
Метод дискретных вихрей широко применяется для решения задач гидродинамики, особенно теории крыла. Метод основан на замене непрерывного вихревого слоя, моделирующего поверхность контактного разрыва (крыло), его дискретным аналогом. При этом условие непротекания жидкости через крыло выполняется в конечном числе контрольных точек. В результате исходное интегральное уравнение, соответствующее рассматриваемой краевой задаче, сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно интенсивности дискретных вихрей.

Обычно несущий вихревой слой равномерно разбивается на элементы, каждый из которых заменяется одним дискретным вихрем, а контрольные точки располагаются на равных расстояниях между вихрями. Такая расчетная схема обеспечивает сходимость решения для внутренней части несущего вихревого слоя [1, 2], тогда как вблизи его границы может возникнуть неустраиваемая погрешность [2, 3].

В [3, 4] предложено выбирать контрольные точки с учетом локальных особенностей несущего вихревого слоя. В качестве них выбираются точки, в которых рассматриваемая система дискретных вихрей индуцирует те же скорости, что и исходный вихревой слой. Такой выбор контрольных точек обеспечивает сходимость приближенного решения к точному во всей области, включая границы крыла [5]. Результаты в [3, 4] получены при разбиении вихревого слоя на равные элементы. Однако в ряде задач такое разбиение принципиально нельзя осуществить. Так, в задачах нестационарного отрывного обтекания профиля скорости схода свободных вихрей с передней и задней кромок в общем случае будут различными. Это приводит к тому, что за выбранный малый промежуток времени с кромок профиля сходят неравные элементы вихревых следов. Аналогичная ситуация имеет место и в задачах отрывного обтекания крыла конечного размаха. Поэтому возникает необходимость определения положения контрольных точек вблизи границ крыла с учетом разных размеров элементов вихревого слоя на крыле и следе.

Решим эту задачу для тонкого профиля, обтекаемого нестационарным потоком идеальной несжимаемой жидкости. В общем случае с одной или обеих кромок профиля будут сходиться вихревые следы, обусловленные изменением циркуляции скорости вокруг профиля с течением времени. Задача обтекания ставится обычно как нелинейная начально-краевая задача, которая решается путем пошаговой линеаризации для моментов времени, мало отличающихся друг от друга [1, 3, 6]. Пусть соответствующие линейные краевые задачи решаются методом дискретных вихрей с одинаковой длиной элементов вихревого слоя на профиле, тогда как примыкающие к кромкам элементы вихревых следов, образующиеся за время Δt , имеют другие длины. Согласно методу дискретных вихрей, все элементы вихревого слоя на профиле и в следах заменяются дискретными вихрями, расположенными на равных расстояниях на профиле и посредине элементов в следах, а условие непротекания жидкости через профиль выполняется в заданных контрольных точках. Для определения положения контрольных точек воспользуемся, следуя [3, 4], условием равенства в них скоростей, индуцированных дискретными вихрями и исходным вихревым слоем, применяя это условие для некоторых малых фиксированных областей на профиле и в окрестности кромок. Тогда для внутренних областей на профиле контрольные точки располагаются посредине между вихрями, а вблизи кромок их положение зависит от отношения длин элементов вихревого слоя на профиле и в следе.

Рассмотрим основные детали алгоритма расчета контрольных точек в окрестности задней кромки профиля. Предположим, что здесь вихревой слой мало отличается от отрезка прямой. Введем декартову систему координат Oxy с началом в задней кромке профиля, ось x направим вдоль вихревого следа. Выделим на оси x отрезок вихревого слоя $[-\varepsilon, +\varepsilon]$ в малой окрестности кромки. Разобьем левый отрезок $[-\varepsilon, 0]$, соответствующий профилю, на N_1 элементов длиной $\Delta_1 = \varepsilon/N_1$, а правый $[0, +\varepsilon]$, отвечающий следу, — на N_2 элементов длиной $\Delta_2 = \varepsilon/N_2$. Пусть дискретные вихри на профиле размещаются на расстоянии $\mu_1 \Delta_1$, а контрольные



Р и с. 1

точки — на расстоянии $v_1^{(1)}\Delta_1$, $v_2^{(1)}\Delta_1, \dots$ от передней кромки каждого элемента. Что касается дискретных вихрей, моделирующих вихревой след, то они находятся на расстоянии $\mu_2\Delta_2$ от передних кромок элементов (рис. 1). Тогда координаты дискретных вихрей $x_m^{(1)}$ на профиле

и $x_p^{(2)}$ в следе определяются как

$$x_m^{(1)} = \Delta_1(-m + \mu_1), \quad x_p^{(2)} = \Delta_2(p - 1 + \mu_2), \quad m = 1, \dots, N_1, \\ p = 1, \dots, N_2,$$

а координаты контрольных точек — как $x_{\Delta k}^{(1)} = \Delta_1(-k + v_k^{(1)})$, $k = 1, \dots, N_1$.

Предположим, что в интервале $[-\varepsilon, +\varepsilon]$ интенсивность вихревого слоя $\gamma(x, t)$ является непрерывной ограниченной функцией по переменным x, t , а сам интервал настолько мал, что в первом приближении $\gamma(x, t) = \gamma(0, t)$ для всех $x \in [-\varepsilon, +\varepsilon]$. Требуя равенства в контрольных точках скоростей, индуцированных непрерывным вихревым слоем на отрезке $[-\varepsilon, +\varepsilon]$ и системой дискретных вихрей, приходим к трансцендентному уравнению для определения коэффициентов $v_k^{(1)}$:

$$(1) \quad \ln \frac{1 + (k - v_k^{(1)})/N_1}{1 - (k - v_k^{(1)})/N_2} + \sum_{m=1}^{N_1} \frac{1}{m - \mu_1 - k + v_k^{(1)}} - \\ - \sum_{p=1}^{N_2} \frac{\delta}{\delta(p - 1 + \mu_2) + k - v_k^{(1)}} = 0 \\ (\delta = \Delta_2/\Delta_1, \quad N_2 = N_1/\delta).$$

Уравнение (1) решалось при $N_1 \rightarrow \infty$. Полученные таким образом коэффициенты $v_k^{(1)}$ соответствуют предельному случаю неограниченного возрастания элементов на профиле. Тем самым положение контрольных точек на каждом элементе профиля оказывается независимым от числа этих элементов (это имеет место и в обычной расчетной схеме, когда контрольные точки выбираются строго между вихрями). Расчет проводился для значений $\mu_2 = 0,5$ (вихри в следе расположены в середине каждого элемента) и $\mu_1 = 0; 0,25; 0,5$ в широком диапазоне изменения параметра δ . Результаты расчета показали, что различие длин элементов вихревого слоя на профиле и в следе проявляется, по существу, только в изменении положения ближайшей к задней кромке контрольной точки, определяемой коэффициентом $v_1^{(1)}$. Все остальные контрольные точки оказываются практически посередине между дискретными вихрями для всех Δ_2/Δ_1 . Зависимость $v_1^{(1)}$ от Δ_2/Δ_1 представлена на рис. 2 (а — для $0 < \Delta_2/\Delta_1 \leq 1$, б — для $1 \leq \Delta_2/\Delta_1 < \infty$). При достаточно больших Δ_2/Δ_1 $v_1^{(1)}$ становится больше единицы, что означает выход контрольной точки, определяемой уравнением (1), за пределы профиля. Поэтому в практических расчетах необходимо наложить ограничения на величину шага по времени Δt , чтобы Δ_2/Δ_1 не достигало своих критических значений. Например, для $\mu_1 = 0,5$, когда вихри на профиле выбираются в середине элементов, условие $v_1^{(1)} \leq 1$ приводит к требованию $\Delta_2 \leq \Delta_1$; для $\mu_1 = 0,25$ (вихри расположены на четверти длины от передней кромки каждого элемента) должно быть $\Delta_2 < 2,5 \Delta_1$, а для $\mu_1 = 0$ (вихри в начале элементов) $\Delta_2 < 4,3 \Delta_1$.

Что касается расчета контрольных точек вблизи передней кромки, обтекаемой с отрывом потока, то все полученные результаты остаются без

изменения, если положение дискретных вихрей и контрольных точек на профиле (коэффициенты μ_1 и $\nu_1^{(1)}$, $\nu_2^{(1)}, \dots$) отсчитывать от задней кромки соответствующих элементов.

Для иллюстрации полученных результатов проведем расчет нестационарного обтекания пластинки, совершающей вертикальные гармонические колебания с круговой частотой ω и амплитудой y_0 в потоке идеальной несжимаемой жидкости. Ограничимся для простоты изложения линейной постановкой задачи, согласно которой вихревой след сходит прямолинейно с задней кромки, а свободные вихри в следе движутся с постоянной скоростью V , равной скорости основного (невозмущенного) потока жидкости. Предположим, что пластинка начала колебаться с момента времени $t = 0$ с некоторыми заданными начальными данными. Алгоритм решения этой задачи методом дискретных вихрей хорошо известен (см., например, [1, 6]).

Хорду пластинки b разобьем на n элементов длиной $\Delta_1 = b/n$, каждый из которых заменим дискретным вихрем $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, расположенным в середине элемента ($\mu_1 = 0,5$), а вихревой след — системой свободных вихрей, находящихся в середине элементов длиной $\Delta_2 = V\Delta t$. Полагая $\Delta t = T/N$ (T — период колебаний пластинки ($T = 2\pi/\omega$), N — число расчетных шагов по времени в T), получим выражение

$$(2) \quad \Delta_2 = \frac{n\pi}{kN} \Delta_1,$$

связывающее длины элементов Δ_1, Δ_2 . Здесь k — число Струхала ($k = \omega b/2V$).

Прежде всего проведем расчет по стандартной расчетной схеме метода дискретных вихрей, когда контрольные точки лежат строго между вихрями. В рассматриваемом случае ($\mu_1 = 0,5$) контрольные точки совпадают с задними кромками элементов на пластинке.

Отметим, что в алгоритмах решения задач нестационарного обтекания профилей методом дискретных вихрей рекомендуется выбирать шаг по времени Δt таким, чтобы образующийся за время Δt элемент вихревого следа Δ_2 был равен элементу Δ_1 на профиле [6]. Обусловлено это тем, что только при $\Delta_2 = \Delta_1$ дискретная модель вихревого слоя позволяет корректно вычислять скорость в задней кромке профиля, определяемую для непрерывного вихревого слоя сингулярным интегралом. При $\Delta_2/\Delta_1 \neq 1$ возникает ошибка, которая увеличивается по мере отклонения Δ_2/Δ_1 от единицы.

Оценим ошибку расчета по стандартной схеме метода дискретных вихрей, возникающую при $\Delta_2 \neq \Delta_1$, для рассматриваемой задачи нестационарного обтекания пластинки. Пусть $n = 20$, $k = 1$, $y_0 = 0,1b$, а число шагов N в периоде T меняется таким образом, чтобы в соответствии с формулой (2) получить значения параметра $\delta = 0,2; 0,5; 1$.

На рис. 3 приведены результаты расчета интенсивности вихревого слоя $\gamma(x, t)$ вдоль хорды колеблющейся пластинки в моменты времени $t/T = 1; 1,25; 1,5; 1,75$ для значений $\Delta_2/\Delta_1 = 1$ и $0,2$. Они показывают, что ошибка расчета из-за различия длин элементов вихревого слоя на пластинке и следе проявляется, по существу, только в окрестности задней кромки. Особенно сильно Δ_2/Δ_1 влияет на точность расчета интенсивности сходящего с пластинки вихревого следа, которая определяется Γ_n . Поэтому интересно выяснить влияние Δ_2/Δ_1 на зависимость Γ_n от времени

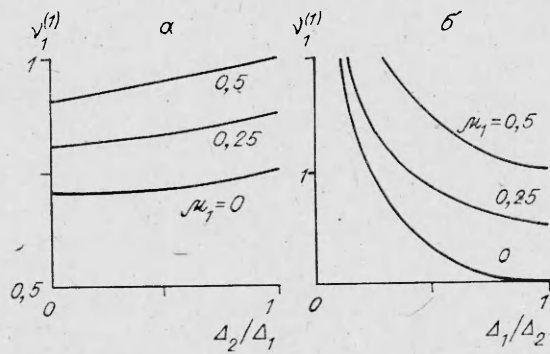
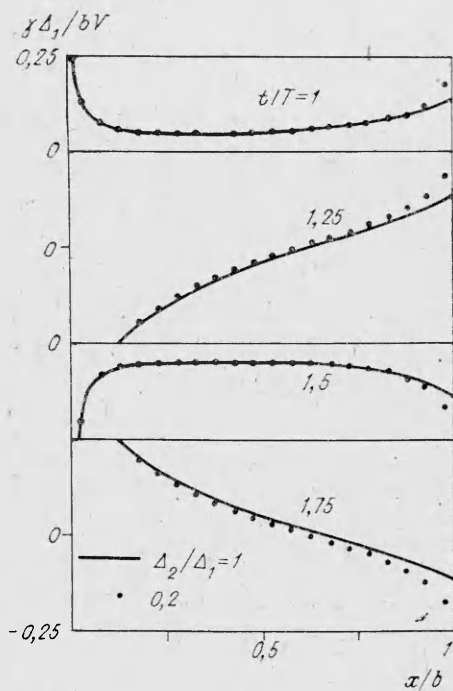


Рис. 2



Р и с. 3

(1). Коэффициент v_n ($v_n = v_1^{(1)}$) определяем по формуле

$$(3) \quad v_n = \begin{cases} 0,914 + 0,03\delta + 0,11\delta^2 - 0,05\delta^3, & 0 < \delta \leq 0,5, \\ 0,9 + 0,1\delta, & 0,5 < \delta \leq 1, \end{cases}$$

которая аппроксимирует решение уравнения (1) для $v_1^{(1)}$ при $\mu_1 = 0,5$, представленное на рис. 2. Остальные коэффициенты v_1, \dots, v_{n-1} полагаем равными единице, как и в стандартной схеме.

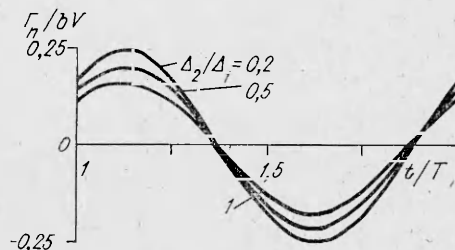
Расчет проведем для тех же значений параметров, включая $\delta = 0,2; 0,5; 1$. Результаты расчета для всех $\delta < 1$ практически совпали с данными, полученными для $\delta = 1$. Иначе говоря, изменением положения контрольной точки на последнем элементе пластины по формуле (3) можно сохранить при $\Delta_2 \neq \Delta_1$ ту же точность расчета, что и при $\Delta_2 = \Delta_1$. Таким образом, предложенная расчетная схема позволяет в задачах нестационарного безотрывного и отрывного обтекания профилей в широких пределах изменять шаг по времени Δt без нарушения точности расчета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. — М.: Наука, 1985.
2. Сарен В. Э. О сходимости метода дискретных вихрей // Сиб. мат. журн. — 1978. — Т. 19, № 2.
3. Горелов Д. Н., Куляев Р. Л. Нелинейная задача о нестационарном обтекании тонкого профиля несжимаемой жидкостью // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1971. — № 6.
4. Горелов Д. Н. Локальная аппроксимация вихревого слоя системой дискретных вихрей // ПМТФ. — 1980. — № 5.
5. Горелов Д. Н. О сходимости метода дискретных вихрей, основанного на локальной аппроксимации вихревого слоя // Динамика сплошной среды. — Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1984. — Вып. 68.
6. Белоцерковский С. М., Ништ М. И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. — М.: Наука, 1978.

г. Омск

Поступила 15/XI 1988 г.,
в окончательном варианте — 16/II 1989 г.



Р и с. 4

t . Соответствующие результаты показаны на рис. 4. Они показывают, что расчет по стандартной схеме метода дискретных вихрей в случае $\Delta_2 \neq \Delta_1$ может привести к большой погрешности вычисления амплитуды дискретного вихря Γ_n ; для $\Delta_2/\Delta_1 = 0,2$, например, эта погрешность достигает 45 %.

Выясним теперь, что дает предлагаемая расчетная схема, в которой последняя контрольная точка выбирается с учетом влияния параметра Δ_2/Δ_1 , используя решение уравнения