ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА И ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, 1995, т. 36, № 4

УДК 537.84

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ БЫСТРОЙ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ С АНИЗОТРОПНЫМ ДАВЛЕНИЕМ

А. М. Блохин, Ю. Л. Трахинин

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 630090 Новосибирск

Различные модели магнитной гидродинамики (в том числе и так называемая модель Чу, Гольдбергера и Лоу, см. [1, 2]) широко применяются при описании реальных процессов в ряде областей физики и техники, таких как астрофизика, аэродинамика больших скоростей и т. д. При этом, как известно, зачастую движение среды происходит при наличии сильных разрывов (например, ударных волн). В связи с этим большой интерес вызывает проблема исследования устойчивости сильных разрывов (в том числе и ударных волн) в магнитной гидродинамике с анизотропным давлением.

Следует отметить, что вопрос об устойчивости сильных разрывов даже в обычной магнитной гидродинамике до конца еще не исследован (в отличие, скажем, от газовой динамики, см. [3, 4]). В самом деле, после выхода классических работ [5, 6] можно отметить только несколько последующих работ (см., например, [7, 8]), в которых вопрос об устойчивости сильных разрывов в обычной магнитной гидродинамике обсуждается в той или иной степени.

В настоящей работе для исследования проблемы устойчивости быстрых ударных волн в магнитной гидродинамике с анизотропным давлением использован так называемый «уравненческий» подход. Суть его заключается в изучении корректности соответствующей линейной смешанной задачи об устойчивости быстрых ударных волн. При этом основным моментом исследования является построение априорной оценки, указывающей на корректность этой линейной смешанной задачи. Наиболее полно данный подход (применительно к задачам обычной магнитной гидродинамики) описан в [9]. В [10] были рассмотрены два частных случая вышеупомянутой линейной смешанной задачи об устойчивости быстрой ударной волны в магнитной гидродинамике с анизотропным давлением и доказана ее корректность (путем получения априорной оценки с помощью техники диссипативных интегралов энергии).

В настоящей работе в случае общей постановки линейной смешанной задачи об устойчивости быстрой магнитогидродинамической ударной волны в плазме с анизотропным давлением доказана корректность смешанной задачи, т. е. устойчивость этого типа сильных разрывов при некоторых предположениях на параметры, характеризующие исходный стационарный разрыв.

1. Уравнения анизотропной магнитной гидродинамики и соотношения на сильном разрыве. В ЧГЛ-приближении (модель Чу, Гольдбергера и Лоу) движение бесстолкновительной плазмы в сильном магнитном поле описывается системой уравнений (см. [1, 2, 11])

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (\rho v_i)_t + \sum_{k=1}^{3} (\Pi_{ik})_{x_k} = 0, \quad i = 1,2,3,$$
$$\mathbf{H}_t - \operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{H}) = 0, \quad (\rho S^{\|})_t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}S^{\|}) = 0, \quad (\rho S^{\perp})_t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}S^{\perp}) = 0. \tag{1.1}$$

Здесь ρ — плотность плазмы; $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^*$ — скорость плазмы; t — время; $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — декартовы координаты; $\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + \mathcal{P} b_i b_k + \mathcal{P}^{\perp}\delta_{ik}$ — компоненты тензора потока импульса; $\mathcal{P} = p^{\|} - p^{\perp} - w^2/(4\pi)$, $\mathcal{P}^{\perp} = p^{\perp} + w^2/(8\pi)$; $p^{\|}$, $p^{\perp}$ — продольное и поперечное давления; $w = |\mathbf{H}|$; $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^* = \mathbf{H}/w$; $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)^*$ — вектор напряженности магнитного поля; $S^{\|}$, $S^{\perp}$ — продольная и поперечная энтропии. Кроме того, имеет место термодинамическое тождество [11]

$$dE = T^{\|}dS^{\|} + T^{\perp}dS^{\perp} + \frac{p^{\|}}{\rho^2}d\rho - \frac{p^{\|} - p^{\perp}}{\rho w}dw, \tag{1.2}$$

где E — внутренняя энергия; $T^{\|}$, $T^{\perp}$ — продольная и поперечная температуры. Из (1.2) вытекает, что

$$T^{\|} = E_{S^{\|}}, \quad T^{\perp} = E_{S^{\perp}}, \quad p^{\|} = \rho^2 E_{\rho}, \quad \frac{p^{\|} - p^{\perp}}{\rho w} = -E_w.$$

Таким образом, если к системе (1.1) добавим уравнение состояния плазмы

$$E = E(\rho, S^{\|}, S^{\perp}, w),$$

то замкнем систему (1.1), которую можно рассматривать как систему для определения компонент вектора

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{H} \\ S^{\|} \\ S^{\perp} \end{pmatrix}.$$

К системе (1.1) необходимо присоединить обязательное в магнитной гидродинамике условие

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \tag{1.3}$$

которое является, по существу, дополнительным требованием на начальные данные для системы (1.1): $\mathbf{U}|_{t=0} = \mathbf{U}_0(\mathbf{x})$. Это утверждение становится очевидным, если подействуем на систему $\mathbf{H}_t - \operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{H}) = 0$ оператором div, полагая при этом, что условие (1.3) выполняется при $t = 0$.

Наконец, к системе (1.1) добавим еще дополнительный закон сохранения энергии

$$(\mathcal{E}_0)_t + \operatorname{div}\boldsymbol{\mathcal{E}} = 0, \tag{1.4}$$

где

$$\mathcal{E}_0 = \rho E + \rho\frac{\omega^2}{2} + \frac{w^2}{8\pi}; \quad \omega = |\mathbf{v}|;$$

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3)^* = \rho\mathbf{v}(E + \frac{\omega^2}{2}) + \frac{1}{4\pi}\mathbf{H}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{H}) + p^{\perp}\mathbf{v} + (p^{\|} - p^{\perp})\mathbf{b}(\mathbf{b}, \mathbf{v}).$$

Отметим, что именно закон (1.4) использовался в [12] при симметризации уравнений (1.1). Согласно [12], система (1.1) может быть переписана в симметрическом виде

$$A_0(\mathbf{U})\mathbf{U}_t + \sum_{k=1}^{3} A_k(\mathbf{U})\mathbf{U}_{x_k} = 0 \tag{1.5}$$

(A_α ($\alpha = \overline{0,3}$) — симметрические матрицы (они описаны в [12])).

Далее будем считать, что уравнение состояния плазмы задается формулой (см. [11])

$$E = \frac{p^\perp}{\rho} + \frac{p^\parallel}{2\rho} \tag{1.6}$$

(аналог модели политропного газа для плазмы). Тогда

$$S^\parallel = \frac{c}{2}\ln\Big(\frac{p^\parallel w^2}{\rho^3}\Big), \quad S^\perp = c\ln\Big(\frac{p^\perp}{\rho w}\Big), \quad T^\parallel = \frac{p^\parallel}{c\rho}, \quad T^\perp = \frac{p^\perp}{c\rho} \tag{1.7}$$

(c — постоянная). Заметим также, что два последних уравнения в (1.1) в этом случае перепишутся так:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{p^\parallel w^2}{\rho^3}\Big) = 0, \qquad \frac{d}{dt}\Big(\frac{p^\perp}{\rho w}\Big) = 0.$$

Здесь $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)$; $\nabla = \Big(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, \dfrac{\partial}{\partial x_3}\Big)^*$.

Известно, что в бесстолкновительной замагниченной плазме могут возникать поверхности сильных разрывов (ударные волны, вращательный разрыв и т. д.). Рассмотрим кусочно-гладкие решения системы (1.1), гладкие куски которых отделены друг от друга поверхностью сильного разрыва с уравнением

$$\widetilde{f}(t, \mathbf{x}) = f(t, \mathbf{x}') - x_1 = 0, \qquad \mathbf{x}' = (x_2, x_3).$$

На поверхности сильного разрыва выполняются соотношения [2]

$$[j] = 0, \quad [H_N] = 0, \quad [jv_N + \widetilde{\mathcal{P}}] = 0,$$
$$j[v_{\tau_i}] = -H_N\Big[\frac{H_{\tau_i}}{w^2}\mathcal{P}\Big] \quad (i = 1, 2), \quad H_N[v_{\tau_i}] = j[VH_{\tau_i}] \quad (i = 1, 2), \tag{1.8}$$
$$\Big[V\mathcal{E}_0 j + \mathcal{P}^\perp v_N + \frac{\mathcal{P}}{w^2}H_N(\mathbf{H}, \mathbf{v})\Big] = 0, \quad j[S^\perp] = 0,$$

где использовано обычное обозначение $[F] = F - F_\infty$ (F — значения величины F справа (при $\widetilde{f} \to -0$), F_∞ — значения величины F слева (при $\widetilde{f} \to +0$) от поверхности разрыва). Здесь $j = \rho(v_N - D_N)$ — поток массы через разрыв; $v_N = (\mathbf{v}, \mathbf{N})$; $\mathbf{N} = \dfrac{1}{|\nabla\widetilde{f}|}(-1, f_{x_2}, f_{x_3})^*$ — нормаль к поверхности сильного разрыва;

$$|\nabla\widetilde{f}| = \sqrt{1 + f_{x_2}^2 + f_{x_3}^2}; \qquad D_N = \frac{-f_t}{|\nabla\widetilde{f}|};$$

$H_N = (\mathbf{H}, \mathbf{N})$; $v_{\tau_1} = (\mathbf{v}, \tau_1)$ и т. д.;

$$\tau_1 = (f_{x_2}, 1, 0)^*; \quad \tau_2 = (f_{x_3}, 0, 1)^*; \quad (\tau_i, \mathbf{N}) = 0 \qquad (i = 1, 2);$$

$$\widetilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P}^\perp + \frac{p^\parallel - p^\perp}{w^2} H_N^2;$$

$V = 1/\rho$ — удельный вес. Заметим, что мы взяли «стандартное» замыкание соотношений на сильном разрыве для анизотропной плазмы, а именно: последнее (замыкающее) соотношение в (1.8) выражает собой условие сохранения первого адиабатического инварианта (см. [13–15]).

Подробная классификация сильных разрывов в анизотропной магнитной гидродинамике приведена в [2]. В контексте настоящей работы нас будут интересовать ударные волны, для которых должны выполняться условия

$$j \neq 0, \qquad [\rho] \neq 0. \tag{1.9}$$

В этом случае вместо третьего условия из (1.8) можно использовать соотношение $[v_N]^2 + [V][\mathcal{P}] = 0$, а вместо предпоследнего соотношения из (1.8) — равенство (аналог адиабаты Гюгонио в обычной газовой динамике)

$$[E] + \langle p^{\parallel}\rangle [V] - \Big\langle \frac{|\mathbf{H}_\sigma|^2}{w^2}(p^{\parallel} - p^{\perp})\Big\rangle [V] + \\ + \Big\langle \frac{p^{\parallel} - p^{\perp}}{w^2} |\mathbf{H}_\sigma|\Big\rangle [V|\mathbf{H}_\sigma|] + \frac{1}{16\pi}[V][|\mathbf{H}_\sigma|]^2 = 0$$

($\langle F\rangle = (F + F_\infty)/2$, $\mathbf{H}_\sigma$ — тангенциальная к поверхности разрыва составляющая вектора $\mathbf{H}$).

2. Линеаризация. Проводя линеаризацию системы (1.5) относительно некоторого постоянного решения системы (1.1)

$$\mathbf{U} = \widehat{\mathbf{U}} = (\widehat{\rho}, \widehat{\mathbf{v}}^*, \widehat{\mathbf{H}}^*, \widehat{S}^{\parallel}, \widehat{S}^{\perp})^*,$$

получим линейную систему

$$\widetilde{A}_0(\delta\mathbf{U})_t + \sum_{k=1}^{3} \widetilde{A}_k(\delta\mathbf{U})_{x_k} = 0. \tag{2.1}$$

Здесь $\widetilde{A}_\alpha = A_\alpha(\widehat{\mathbf{U}})$ ($\alpha = \overline{0,3}$); $\delta\mathbf{U} = (\delta\rho, \delta\mathbf{v}^*, \delta\mathbf{H}^*, \delta S^{\parallel}, \delta S^{\perp})^*$ — вектор малых возмущений (в дальнейшем вектор $\delta\mathbf{U}$ будем вновь обозначать через $\mathbf{U}$).

Из (1.7) для возмущений энтропий имеем равенства

$$S^{\parallel} = \frac{1}{\widehat{T}^{\parallel}\widehat{\rho}}\Big\{\frac{1}{2}p^{\parallel} + \frac{\widehat{p}^{\parallel}}{\widehat{w}^2}(\widehat{\mathbf{H}}, \mathbf{H}) - \frac{3}{2}\frac{\widehat{p}^{\parallel}}{\widehat{\rho}}\rho\Big\},$$

$$S^{\perp} = \frac{1}{\widehat{T}^{\perp}\widehat{\rho}}\Big\{p^{\perp} - \frac{\widehat{p}^{\perp}}{\widehat{w}^2}(\widehat{\mathbf{H}}, \mathbf{H}) - \frac{\widehat{p}^{\perp}}{\widehat{\rho}}\rho\Big\},$$

с учетом которых систему (2.1) можно записать в безразмерном виде

$$\begin{gathered} L\rho + \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \\ L\mathbf{v} + \nabla\mathcal{P}^{\perp} - \bar{r}^2(\mathbf{h}, \nabla)\mathbf{H} + \frac{\mathbf{h}}{q^2}(\mathbf{h}, \nabla(\bar{p}p^{\parallel} - p^{\perp} + 2(\bar{r}^2 - 1)H_h)) = 0, \\ L\mathbf{H} - \operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{h}) = 0, \\ Lp^{\parallel} + \operatorname{div}\mathbf{v} + \frac{2}{q^2}(\mathbf{h}, \nabla v_h) = 0, \\ Lp^{\perp} + 2\operatorname{div}\mathbf{v} - \frac{1}{q^2}(\mathbf{h}, \nabla v_h) = 0, \end{gathered} \tag{2.2}$$

где координаты x_k $(k = 1,2,3)$, время t, компоненты векторов $\mathbf{v}$, $\mathbf{H}$, величины $p^{\parallel}$, $p^{\perp}$, ρ отнесены к характерным параметрам: $\hat{l}$, $\hat{l}/\hat{c}$, $\hat{c}$, $\hat{c}\sqrt{4\pi\hat{\rho}}$, $\hat{p}^{\parallel}$, $\hat{p}^{\perp}$, $\hat{\rho}$; $\hat{l}$ — характерная длина; $\hat{c} = (\hat{p}^{\perp}/\hat{\rho})^{1/2}$ — скорость звука в плазме;

$$L = \tau + (\mathrm{M}, \nabla); \quad \tau = \frac{\partial}{\partial t}; \quad \nabla = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^*; \quad \xi_k = \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (k = 1,2,3);$$

$$\mathrm{M} = \frac{\hat{\mathbf{v}}}{\hat{c}} = (\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3)^*; \quad \mathcal{P}^{\perp} = p^{\perp} + H_h; \quad H_h = (\mathbf{h}, \mathbf{H}); \quad v_h = (\mathbf{h}, \mathbf{v});$$

$$\bar{r} = \frac{(p_2 - p)^{1/2}}{q}; \quad q = |\mathbf{h}|; \quad \mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)^* = \frac{\hat{\mathbf{H}}}{\hat{c}\sqrt{4\pi\hat{\rho}}}; \quad p_2 = 1 + q^2; \quad p = \frac{\hat{p}^{\parallel}}{\hat{p}^{\perp}}.$$

При постановке смешанных задач для системы (2.1) и соответственно для системы (2.2) необходимо знать число граничных условий при $x_1 = 0$, которое должно совпадать с числом положительных собственных значений матрицы $\tilde{A}_0^{-1}\tilde{A}_1$ (см. [16]). После вычислений находим собственные числа матрицы (см., также [2]):

$$\begin{aligned} &\lambda_{1,2,3}(\tilde{A}_0^{-1}\tilde{A}_1) = \hat{v}_1, \qquad &&\lambda_{4,5}(\tilde{A}_0^{-1}\tilde{A}_1) = \hat{v}_1 \pm \hat{c}_A, \\ &\lambda_{6,7}(\tilde{A}_0^{-1}\tilde{A}_1) = \hat{v}_1 \pm \hat{c}_{\mathrm{M}}^-, \qquad &&\lambda_{8,9}(\tilde{A}_0^{-1}\tilde{A}_1) = \hat{v}_1 \pm \hat{c}_{\mathrm{M}}^+. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь $\hat{c}_A = \hat{c}h_1\bar{r}$ — альфвеновская скорость (для определенности полагаем, что $h_1 \geq 0$);

$$\hat{c}_{\mathrm{M}}^{\pm} = \hat{c}\left\{\frac{\bar{p}_2 + (2\bar{p} - 1)l^2 + 1}{2} \pm \left[\left(\frac{\bar{p}_2 - l^2(1 + 4\bar{p}) + 1}{2}\right)^2 + l^2(1 - l^2)\right]^{1/2}\right\}^{1/2}$$

— быстрая и медленная магнитные скорости звука в плазме [17]; $l = h_1/q$. В [12, 18] показано, что для положительной определенности матрицы $\tilde{A}_0$ (в этом случае система (2.1) будет симметрической t-гиперболической (по Фридрихсу)) должны выполняться неравенства

$$\bar{p}_1 < \bar{p} < \bar{p}_2, \tag{2.4}$$

где $p_1 = 1/p_2$. Кроме того, величины $\hat{c}_A$, $\hat{c}_{\mathrm{M}}^{\pm}$ удовлетворяют неравенствам (см. [12, 18])

$$\begin{aligned} &0 < \hat{c}_{\mathrm{M}}^- < \hat{c}_A < \hat{c}_{\mathrm{M}}^+, \quad &&\text{если} \quad \bar{p}_1 < \bar{p} < \bar{p}_* < \bar{p}_2, \\ &0 < \hat{c}_{\mathrm{M}}^- = \hat{c}_A < \hat{c}_{\mathrm{M}}^+, \quad &&\text{если} \quad p = p_*, \ \bar{p}_1 < \bar{p}_* < \bar{p}_2, \\ &0 < \hat{c}_A < \hat{c}_{\mathrm{M}}^- < \hat{c}_{\mathrm{M}}^+, \quad &&\text{если} \quad \bar{p}_1 < p_* < \bar{p} < \bar{p}_2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\left(\bar{p}_* = \frac{q^4 + 3q^2 + 3}{4(2 + q^2)}\right).$$

Наконец, проведем линеаризацию системы (1.1) на разрывном решении. Для этого рассмотрим кусочно-постоянное решение

$$\mathrm{U}(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} \hat{\mathrm{U}}_\infty = (\hat{\rho}_\infty, \hat{\mathbf{v}}_\infty^*, \hat{\mathbf{H}}_\infty^*, \hat{S}_\infty^{\parallel}, \hat{S}_\infty^{\perp})^*, & x_1 < 0, \\ \hat{\mathrm{U}} = (\hat{\rho}, \hat{\mathbf{v}}^*, \hat{\mathbf{H}}^*, \hat{S}^{\parallel}, \hat{S}^{\perp})^*, & x_1 > 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

системы (1.1), удовлетворяющее при $x_1 = 0$ соотношениям (1.8) (при условии, что фронт разрыва неподвижен и описывается уравнением $x_1 = 0$):

$$\hat{\rho}\hat{v}_1 = \hat{\rho}_\infty\hat{v}_{1\infty} = \hat{j}, \qquad \hat{H}_1 = \hat{H}_{1\infty},$$

$$\hat{j}^2[\hat{V}] + \left[\hat{p}^{\perp} + \frac{1}{8\pi}(\hat{H}_2^2 + \hat{H}_3^2)\right] + \left[\frac{\hat{p}^{\parallel} - \hat{p}^{\perp}}{\hat{w}^2}\right]\hat{H}_1^2 = 0,$$

$$\hat{j}[\hat{v}_i] = -\Big[\hat{\mathcal{P}}\frac{\hat{H}_2}{\hat{w}^2}\Big]\hat{H}_1 \quad (i=2,3), \qquad \hat{H}_1[\hat{v}_i] = \hat{j}[\hat{V}\hat{H}_2] \quad (i=2,3), \tag{2.7}$$

$$\hat{j}\Big[\hat{E} + \hat{p}^\perp\hat{V} + \frac{\hat{j}^2\hat{V}^2}{2} + \frac{\hat{v}_2^2+\hat{v}_3^2}{2} + \frac{\hat{H}_2^2+\hat{H}_3^2}{4\pi}\hat{V} + \frac{\hat{p}^{\|}-\hat{p}^\perp}{\hat{w}^2}\hat{H}_1^2\hat{V}\Big] +$$
$$+\Big[\frac{\hat{\mathcal{P}}}{\hat{w}^2}(\hat{H}_2\hat{v}_2 + \hat{H}_3\hat{v}_3)\Big]\hat{H}_1 = 0, \qquad \hat{j}[\hat{S}^\perp] = 0.$$

Здесь $\hat{V} = 1/\hat{\rho}$; $\hat{\mathcal{P}} = \hat{p}^{\|} - \hat{p}^\perp - \hat{w}^2/(4\pi)$; $\hat{E} = \hat{p}^\perp + \hat{p}^{\|}\hat{V}/2$. Линеаризуя уравнения (1.1) и соотношения (1.8) относительно кусочно-постоянного решения (2.6), с учетом (2.7) получаем математическую постановку задачи об устойчивости сильных разрывов в магнитной гидродинамике с анизотропным давлением.

Основная задача. В области $t > 0$, $\mathbf{x}\in R^3_+$ ищется решение системы

$$\tilde{A}_0\mathbf{U}_t + \sum_{k=1}^{3}\tilde{A}_k\mathbf{U}_{x_k} = 0, \tag{2.8}$$

в области $t>0$, $\mathbf{x}\in R^3_-$ — решение системы

$$\tilde{A}_{0\infty}\mathbf{U}_t + \sum_{k=1}^{3}\tilde{A}_{k\infty}\mathbf{U}_{x_k} = 0, \tag{2.9}$$

причем решения этих систем должны удовлетворять при $x_1 = 0$ следующим граничным условиям:

$$[\hat{v}_1\rho + J] = 0, \quad [I] = 0, \quad 2[\hat{v}_1 J] + [\hat{v}_1^2\rho + \Pi^\perp + \Pi_1] = 0,$$
$$\Big[\Big(\hat{\rho}\hat{v}_1^2 + \frac{\hat{\mathcal{P}}\hat{H}_1^2}{\hat{w}^2}\Big)F_{x_k} + \hat{v}_k(\hat{v}_1\rho + J) + \hat{j}v_k + \frac{\hat{\mathcal{P}}\hat{H}_1}{\hat{w}^2}H_k + \frac{\hat{H}_k}{\hat{w}^2}\Pi_2\Big] = 0,$$
$$[\hat{V}\hat{H}_k J + \hat{v}_1 H_k - \hat{v}_k I - \hat{H}_1 v_k] = 0, \quad k = 2,3, \tag{2.10}$$
$$\Big[\Big(\hat{E} + \frac{\hat{\omega}^2}{2} + \hat{p}^\perp\hat{V} + \frac{\hat{w}^2}{4\pi}\hat{V}\Big)J + \hat{\mathcal{P}}^\perp F_t + \hat{v}_1\Big\{2\Pi^\perp + \frac{p^{\|}}{2} + \frac{\hat{\omega}^2}{2}\rho + \hat{\rho}(\hat{\mathbf{v}},\mathbf{v})\Big\} +$$
$$+\frac{\hat{\mathcal{P}}\hat{H}_1}{\hat{w}^2}\{(\hat{\mathbf{H}},\mathbf{v}) + (\hat{\mathbf{v}},\mathbf{H})\} + \frac{(\hat{\mathbf{H}},\hat{\mathbf{v}})}{\hat{w}^2}\Pi_2\Big] = 0, \quad [(\hat{v}_1\rho + J)\hat{S}^\perp + \hat{j}S^\perp] = 0,$$

а при $t = 0$ — начальным данным

$$\begin{aligned} \mathbf{U}|_{t=0} &= \mathbf{U}_0(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}\in R^3_\pm, \\ F|_{t=0} &= F_0(\mathbf{x}'), \qquad \mathbf{x}'\in R^2. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Здесь $F = F(t,\mathbf{x}') = \delta f(t,\mathbf{x}')$ — малое смешение фронта разрыва; $\tilde{A}_{\alpha\infty} = A_\alpha(\hat{\mathbf{U}}_\infty)$ $(\alpha = 0,3)$;

$$J = \hat{\rho}(\hat{v}_1 - \hat{v}_2F_{x_2} - \hat{v}_3F_{x_3} - F_t); \quad I = H_1 - \hat{H}_2F_{x_2} - \hat{H}_3F_{x_3};$$

$$\Pi^\perp = p^\perp + \frac{(\hat{\mathbf{H}},\mathbf{H})}{4\pi}; \quad \Pi_1 = \frac{\hat{H}_1}{\hat{w}^2}\Big\{\hat{H}_1(p^{\|} - p^\perp) + 2(\hat{p}^{\|} - \hat{p}^\perp)\Big(I - \frac{\hat{H}_1(\hat{\mathbf{H}},\mathbf{H})}{\hat{w}^2}\Big)\Big\};$$

$$\Pi_2 = \hat{H}_1(p^{\|} - p^\perp) + \hat{\mathcal{P}}I - 2(\hat{\mathbf{H}},\mathbf{H})\hat{H}_1\frac{\hat{p}^{\|} - \hat{p}^\perp}{\hat{w}^2}; \qquad \hat{\mathcal{P}}^\perp = \hat{p}^\perp + \frac{\hat{w}^2}{8\pi}.$$

Заметим, что в процессе решения смешанной задачи (2.8)–(2.11) находится также и функция $F = F(t, \mathbf{x}')$. При этом одно из условий (2.10) надо считать уравнением для определения функции F. Кроме того, если все собственные значения матрицы $\widetilde{A}_{1\infty}$ (или $\widetilde{A}_{0\infty}^{-1}\widetilde{A}_{1\infty}$) неотрицательны, то, не нарушая общности, будем полагать, что $\mathbf{U}(t, \mathbf{x}) \equiv 0$ при $x_1 < 0$.

3. Постановка задачи об устойчивости быстрой ударной волны. В анизотропной магнитной гидродинамике, так же как и в обычной, ударные волны бывают быстрыми и медленными. Обратимся к случаю быстрых ударных волн.

Пусть стационарный разрыв — ударная волна ($\hat{j} \neq 0$, $[\hat{\rho}] \neq 0$). Не нарушая общности, будем считать, что $\hat{v}_1$, $\hat{H}_1 > 0$. Если выполнены условия

$$\hat{v}_{1\infty} > \hat{c}^{+}_{\mathrm{M}\infty}, \qquad \hat{c}^{+}_{\mathrm{M}} > \hat{v}_1 > \max\{\hat{c}_A, \hat{c}^{-}_{\mathrm{M}}\} \tag{3.1}$$

или условия

$$\hat{v}_{1\infty} > \hat{c}^{+}_{\mathrm{M}\infty}, \qquad \hat{c}^{+}_{\mathrm{M}} > \max\{\hat{c}_A, \hat{c}^{-}_{\mathrm{M}}\} > \hat{v}_1 > \min\{\hat{c}_A, \hat{c}^{-}_{\mathrm{M}}\}, \tag{3.1$'$}$$

то имеем дело с быстрой ударной волной. В силу первого условия (1.1) (с учетом формул (2.3) и неравенств (2.5)) у матрицы $\widetilde{A}_{0\infty}^{-1}\widetilde{A}_{1\infty}$ все собственные значения положительны, и, следовательно, система (2.9) не требует граничных условий при $x_1 = 0$, т. е. $\mathbf{U} \equiv 0$ при $x_1 < 0$. В силу второго условия (3.1) матрица $\widetilde{A}_0^{-1}\widetilde{A}_1$ имеет восемь положительных собственных значений, т. е. для системы (2.8) надо поставить восемь граничных условий, и в итоге требуется девять граничных условий (одно из них — уравнение для нахождения F) для эволюционности (см. [18]) быстрой ударной волны. Проводя аналогичные рассуждения для случая, когда выполнены условия (3.1$'$), приходим к выводу, что для эволюционности надо поставить восемь граничных условий при $x_1 = 0$ (система (2.9) по-прежнему не требует граничных условий). Тогда последнее (замыкающее) соотношение в (1.8) является лишним.

Пусть на стационарном разрыве выполнены условия (3.1). Сформулируем математическую постановку задачи об устойчивости быстрой ударной волны в плоском случае.

Задача $\mathcal{F}$. В области $t > 0$, $\mathbf{x} \in R^2_+$ ищется решение системы уравнений (см. также систему (2.2))

$$\begin{gathered}
L\rho + \operatorname{div}\mathbf{v} = 0,\\
L\mathbf{v} + \mathbf{b}(\mathbf{b}, \nabla(\bar{p}p^{\parallel} - p^{\perp})) + \frac{\bar{p} - 1}{q}(\mathbf{b}, \nabla)(\sigma H_\sigma - \mathbf{b}H_b) + \\
+ \nabla p^{\perp} - q(\xi_1 H_2 - \xi_2 H_1)\sigma = 0, \\
LH_1 + q\xi_2 v_\sigma = 0, \quad LH_2 - q\xi_1 v_\sigma = 0,\\
Lp^{\parallel} + \operatorname{div}\mathbf{v} + 2(\mathbf{b}, \nabla v_b) = 0, \quad Lp^{\perp} + 2\operatorname{div}\mathbf{v} - (\mathbf{b}, \nabla v_b) = 0,
\end{gathered} \tag{3.2}$$

удовлетворяющее при $t > 0$, $x_1 = 0$, $x_2 \in R^1$ граничным условиям

$$F_t + \mathrm{M}_2 F_{x_2} = \frac{1}{1 - \bar{\rho}}\{v_1 + \mathrm{M}_1\rho - \bar{\rho}[\mathrm{M}_2]F_{x_2}\}, \quad H_1 = [h_2]F_{x_2},$$

$$p^{\perp} + qH_b + l^2(\bar{p}p^{\parallel} - p^{\perp}) - 2(\bar{p} - 1)\frac{lm}{q}H_\sigma - 2lq[h_2]F_{x_2} + 2\mathrm{M}_1 v_1 + \mathrm{M}_1^2\rho = 0,$$

$$
\begin{gathered}
\Big\{p^{\perp} - 1 - (p-1)m^2 + \frac{1}{2}[h_2^2] + \frac{\bar{p}_\infty - 1}{l^2 + \chi^2 m^2}\,\bar{p}^{\perp}\chi^2 m^2 + \\
+ \frac{[\mathrm{M}_2]^2}{1-\bar{\rho}}\,\bar{\rho}\Big\} F_{x_2} - \frac{[\mathrm{M}_2]}{1-\bar{\rho}}\,\bar{\rho}(v_1 + \mathrm{M}_1\rho)\,\mathrm{M}_1 v_2 + \\
+ (\bar{p} - \bar{p}_2)\frac{lH_2 + mH_1}{q} + lm\Big\{pp^{\parallel} - p^{\perp} - 2\frac{\bar{p}-1}{q}H_b\Big\} = 0, \\
\mathrm{M}_1 H_2 = [h_2](F_t + \mathrm{M}_2 F_{x_2}) + qv_\sigma, \\
\Big\{-\Big(2\bar{p}^{\perp} + \frac{\bar{p}_\infty \bar{p}^{\perp}}{2} + (l^2 + m^2\chi^2)q^2 - \Big(2 + \frac{\bar{p}}{2} + q^2 + \frac{[|\mathbf{M}|^2]}{2}\Big)\bar{\rho}\Big)\frac{[\mathrm{M}_2]}{1-\bar{\rho}}\,\bar{\rho} - \\
- \Big(1 - \bar{p}^{\perp} + \frac{[h_2^2]}{2}\Big)\frac{\mathrm{M}_2 - \bar{\rho}\mathrm{M}_{2\infty}}{1-\bar{\rho}} + \frac{l\mathrm{M}_{1\infty} + \chi m \mathrm{M}_{2\infty}}{l^2 + \chi^2 m^2}\chi m\Big((\bar{p}_\infty - 1)\bar{p}^{\perp} - \\
- (l^2 + \chi^2 m^2)q^2\Big) - (p - p_2)(\mathbf{b}, \mathbf{M})m\Big\} F_{x_2} + \Big\{1 + p^{\perp} + \frac{p_\infty \bar{p}^{\perp}}{2} + \\
+ (l^2 + \chi^2 m^2)q^2 + \frac{[h_2^2]}{2} - \Big(2 + \frac{\bar{p}}{2} + q^2 + \frac{[|\mathbf{M}|^2]}{2}\Big)\rho\Big\}\frac{v_1 + \mathrm{M}_1\rho}{1-\bar{\rho}} + \\
+ \mathrm{M}_1\Big\{2p^{\perp} + 2qH_b + \bar{p}\frac{p^{\parallel}}{2} + (\mathbf{M}, \mathbf{v}) - \Big(2 + \frac{\bar{p}}{2} + q^2\Big)\rho\Big\} + (\bar{p} - \bar{p}_2) \times \\
\times \Big\{lv_b + \frac{l}{q}(\mathbf{M}, \mathbf{H}) + (\mathbf{b}, \mathbf{M})\frac{H_1}{q}\Big\} + l(\mathbf{b}, \mathbf{M})\Big\{\bar{p}p^{\parallel} - p^{\perp} - \frac{2}{q}H_b(\bar{p} - 1)\Big\} = 0, \\
S^{\perp} = 0
\end{gathered}
\tag{3.3}
$$

и начальным данным при $t = 0$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V}|_{t=0} &= \mathbf{V}_0(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in R^2, \\
F|_{t=0} &= F_0(x_2), \qquad x_2 \in R^1.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Здесь

$$
\mathbf{U} = (\rho, \mathbf{v}^*, \mathbf{H}^*, p^{\parallel}, p^{\perp})^*; \quad \mathbf{b} = (l, m)^*; \quad m = \frac{h_2}{q};
$$

$$
\sigma = (-m, l)^*; \quad \nabla = (\xi_1, \xi_2)^*; \quad L = \tau + \mathrm{M}_1\xi_1 + \mathrm{M}_2\xi_2;
$$

$$
\mathrm{M}_{2\infty} = \frac{\hat{v}_{2\infty}}{\hat{c}}; \quad h_{2\infty} = \frac{\hat{H}_{2\infty}}{\hat{c}\sqrt{4\pi\hat{\rho}}}; \quad \bar{\rho} = \frac{\hat{\rho}_\infty}{\hat{\rho}}; \quad \chi = \frac{h_{2\infty}}{h_2};
$$

$$
p^{\perp} = \frac{\hat{p}^{\perp}_\infty}{\hat{p}^{\perp}}; \quad \bar{p}_\infty = \frac{\hat{p}^{\parallel}_\infty}{\hat{p}^{\perp}_\infty}; \quad \mathbf{M} = (\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2)^*; \quad \mathrm{M}_{1\infty} = \frac{\hat{v}_{1\infty}}{\hat{c}} = \bar{v}_1\mathrm{M}_1;
$$

$$
\bar{v}_1 = \frac{\hat{v}_{1\infty}}{\hat{v}_1}; \quad H_b = (\mathbf{b}, \mathbf{H}); \quad H_\sigma = (\sigma, \mathbf{H}); \quad v_b = (\mathbf{b}, \mathbf{v}); \quad v_\sigma = (\sigma, \mathbf{v});
$$

$S^{\perp}$ — малое возмущение поперечной энтропии, отнесенное к $\hat{p}^{\perp}/(\hat{T}^{\perp}\hat{\rho})$. Граничные условия (3.3) получены из общих условий (2.10) и записаны в безразмерном виде. Кроме того, если выполнить преобразование Галилея

$$
t' = t, \quad x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2 - \mathrm{M}_2 t,
$$

то оператор L в системе (3.2) и агрегат $(F_t + \mathrm{M}_2 F_{x_2})$ в граничных условиях

(3.3) примут вид (штрихи опущены)

$$L = \tau + \mathrm{M}_1\xi_1 \quad \text{и} \quad F_t.$$

Для возмущения поперечной энтропии (в безразмерном виде) запишем равенство

$$S^\perp = p^\perp - \rho - H_b/q.$$

С другой стороны, функция $S^\perp(t, \mathbf{x})$ является решением смешанной задачи

$$\begin{aligned} &LS^\perp = 0, && t > 0, \quad \mathbf{x}\in R^2_+, \\ &S^\perp = 0, && x_1 = 0, \quad x_2\in R^1, \\ &S^\perp|_{t=0} = S^\perp_0(\mathbf{x}), && \mathbf{x}\in R^2_+. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Пусть, не нарушая общности, имеем $S_0^\perp(\mathbf{x})\equiv 0$, $\mathbf{x}\in R^2_+$. Тогда с учетом (3.5) можно считать, что $S^\perp\equiv 0$, $t > 0$, $\mathbf{x}\in R^2_+$. В таком случае

$$\rho = p^\perp - H_b/q. \tag{3.6}$$

Следовательно, учитывая формулу (3.6), постановку задачи $\mathcal{F}$ можно упростить: из системы (3.2) надо исключить первое уравнение, а из граничных условий (3.3) — последнее уравнение, а также вместо ρ использовать представление (3.6).

В [18] показано, что

$$\operatorname{div}\mathbf{H}\equiv 0, \quad t > 0, \quad \mathbf{x}\in R^2_+. \tag{3.7}$$

В случае выполнения условий (3.1′) в задаче $\mathcal{F}$ из граничных условий (3.3) надо исключить последнее равенство. При этом равенство (3.6) не выполнено.

4. Исследование стационарного разрыва. Рассмотрим соотношения (2.7) для быстрой ударной волны ($j\neq 0$, $[\hat\rho]\neq 0$) и плоского случая и запишем их как

$$\rho\bar v_1 = 1, \qquad h_1 = h_{1\infty},$$

$$\mathrm{M}_1^2\frac{\bar\rho - 1}{\bar\rho} + 1 - \bar p^\perp + \frac{q^2m^2(1-\chi^2)}{2} + l^2\Big(\bar p - 1 - \frac{\bar p^\perp(\bar p_\infty - 1)}{l^2 + \chi^2m^2}\Big) = 0,$$

$$\mathrm{M}_1[\mathrm{M}_2] - q^2lm(1-\chi) + lm\Big(\bar p - 1 - \frac{\bar p^\perp\chi(\bar p_\infty - 1)}{l^2 + \chi^2m^2}\Big) = 0,$$

$$l[\mathrm{M}_2] = \mathrm{M}_1 m\Big(1 - \frac{\chi}{\bar\rho}\Big), \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_1\Big\{2\Big(1 - \frac{\bar p^\perp}{\bar\rho}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\bar p - \frac{\bar p_\infty}{\bar\rho}\bar p^\perp\Big) + \frac{\mathrm{M}_1^2}{2}\Big(1 - \frac{1}{\bar\rho^2}\Big) + \frac{[\mathrm{M}_2^2]}{2} + q^2m^2\Big(1 - \frac{\chi^2}{\bar\rho}\Big) + \\ + l^2\Big(\bar p - 1 - \frac{\bar p^\perp(\bar p_\infty - 1)}{\bar\rho(l^2 + \chi^2m^2)}\Big)\Big\} + lm\Big\{\mathrm{M}_2(\bar p - 1) - \frac{(\bar p_\infty - 1)\bar p^\perp\chi\mathrm{M}_{2\infty}}{l^2 + \chi^2m^2} - \\ - q^2(\mathrm{M}_2 - \chi\mathrm{M}_{2\infty})\Big\} = 0, \qquad \bar p^\perp = \bar\rho\sqrt{l^2 + \chi^2m^2}, \end{aligned}$$

где $h_{1\infty} = \hat H_{1\infty}/(\hat c\sqrt{4\pi\hat\rho})$; $\mathrm{M}_{2\infty} = \hat v_{2\infty}/\hat c$.

В [10] показана эволюционность быстрых ударных волн для двух частных случаев: параллельная ($l = 1$, $m = 0$) и поперечная ($l = 0$, $m = 1$) ударные волны. Здесь рассмотрим общий случай ($0 < l < 1$), предполагая, что давление в плазме большое ($\hat{p}^{\|} \gg \hat{w}^2/(4\pi)$, $\hat{p}^{\perp} \gg \hat{w}^2/(4\pi)$), т. е. $q \ll 1$ ($q^2 = \hat{w}^2/(4\pi\hat{p}^{\perp})$, см. также неравенства (2.4)).

Так же как и в обычной магнитной гидродинамике (см., например, [19, 20]), не нарушая общности, будем полагать, что выполнены условия

$$\hat{S}^{\|} > \hat{S}^{\|}_{\infty}, \quad \hat{p}^{\|} > \hat{p}^{\|}_{\infty} > 0, \quad \hat{p}^{\perp} > \hat{p}^{\perp}_{\infty} > 0,$$

$$\hat{\rho} > \hat{\rho}_{\infty} > 0, \quad \hat{v}_{1\infty} > v_1 > 0, \quad \hat{H}_2 > \hat{H}_{2\infty},$$

которые можно переписать следующим образом:

$$\begin{gathered} \hat{S}^{\|} > \hat{S}^{\|}_{\infty}, \quad p_{\infty}\bar{p}^{\perp} < \bar{p}, \quad 0 < \bar{p}^{\perp} < 1, \\ 0 < \rho < 1, \quad v_1 > 1, \quad 0 < \chi < 1. \end{gathered} \tag{4.2}$$

Будем вести разложения всех входящих в (4.1) величин в ряд по малому параметру q:

$$\begin{aligned} &\bar{\rho} = R_0 + R_1 q + R_2 q^2 + \dots, && \bar{p}^{\perp} = P_0 + P_1 q + P_2 q^2 + \dots, \\ &\chi = Z_0 + Z_1 q + Z_2 q^2 + \dots, && \bar{p} = y_0 + y_1 q + y_2 q^2 + \dots, \\ &p_{\infty} = w_0 + w_1 q + w_2 q^2 + \dots, && [\mathrm{M}_2] = m_0 + m_1 q + m_2 q^2 + \dots \end{aligned} \tag{4.3}$$

и т. д. Введем в рассмотрение параметр

$$\mathrm{M}_0 = \hat{v}_1/\hat{c}^{+}_{\mathrm{M}},$$

который в силу второго условия из (3.1) удовлетворяет неравенствам

$$0 < \mathrm{M}_0 < 1.$$

Подставляя разложения (4.3) в соотношения (4.1), с учетом неравенств (2.4) получаем, что

$$R_0 = P_0 = Z_0 = y_0 = w_0 = 1, \quad m_0 = m_1, \quad R_1 = P_1 = Z_1 = y_1 = w_1 = 0.$$

Тогда, опуская подробные выкладки, первое неравенство из (3.1) перепишем:

$$\mathrm{M}_0^2 > \rho_0.$$

Здесь $\rho_0 = 1 + O(q^2)$; $\rho_0 < 1$. Следовательно,

$$\mathrm{M}_0^2 = 1 + O(q^2). \tag{4.4}$$

В силу формулы для быстрой магнитной скорости звука получим

$$\mathrm{M}_1^2 = \mathrm{M}_0^2 k, \qquad k = \omega + O(q^2),$$

где $\omega = 1 + \dfrac{l^2}{2} + \sqrt{1 - 4l^2 + \dfrac{21}{4}l^4}$. Тогда с учетом (4.4) имеем

$$\mathrm{M}_1^2 = \omega + O(q^2). \tag{4.5}$$

Используя (4.5), из (4.1) находим

$$R_k = \left(1 - \frac{m^2}{\omega}\right)P_i, \quad Z_i = \frac{P_i}{\omega}, \tag{4.6}$$

$$m_i = \frac{m}{l}\frac{\omega - 2 + l^2}{\sqrt{\omega}}P_i, \quad y_i - w_i = \frac{2 - l^2 - \omega}{l^2}P_i \qquad (i = 2, 3).$$

При этом в силу (4.2) $P_2 \le 0$. Если $P_2 = 0$, то равенства (4.6) становятся справедливыми при $i = 3, 4$ ($P_3 \le 0$) и т. д. Поэтому, не нарушая общности, будем считать, что $P_2 < 0$. Заметим, что при этом неравенство $v_1 > 1$ выполнено в силу первого соотношения из (4.1). Нетрудно убедиться в том, что первое и второе неравенства из (4.2) также справедливы.

Осталось проверить, что выполнены неравенства

$$p_{1\infty} < p_\infty < p_{2\infty}. \tag{4.7}$$

Здесь $\bar{p}_{2\infty} = 1 + q^2\bar{p}^\perp/\bar{\rho}^2$; $\bar{p}_{1\infty} = 1/\bar{p}_{2\infty}$. Легко проверить, что неравенства (4.7) выполнены, если

$$|w_2| < 1, \quad |y_2| < 1. \tag{4.8}$$

Последнее означает, что надо выбрать параметры y_2, w_2, P_2 так, чтобы выполнялись неравенства (4.8).

Наконец, заметим, что при $q \ll 1$ случай (3.1′) для быстрой ударной волны не реализуется (т. е. ударная волна неэволюционна).

5. Получение априорной оценки решения задачи $\mathcal{F}$. Докажем корректность задачи $\mathcal{F}$ при $q \ll 1$ и $0 < l < 1$. Иными словами, учитывая также результат, полученный в [10] (при $l = 0, 1$), покажем устойчивость быстрой магнитогидродинамической ударной волны в анизотропной плазме при большом давлении.

Вначале (в целях удобства) перепишем граничные условия (3.3). После чрезвычайно громоздких выкладок (которые опускаются) с учетом (4.6) условия (3.3) переписываются так:

$$\begin{gathered} v_1 + dp^\perp = N_1\xi_2F, \quad \tau F = \mu p^\perp + N_2\xi_2F, \quad v_2 = \lambda_0\xi_2F + \eta p^\perp, \\ p^\parallel = vp^\perp + N_3\xi_2F, \quad H_2 = mq(1-\chi)\tau F + qv_\sigma, \quad H_1 = mq(1-\chi)\xi_2F. \end{gathered} \tag{5.1}$$

Здесь

$$d = 1 - \frac{m^2}{\omega} + O(q^2); \quad \mu = \frac{1}{P_2}\frac{3l^2 - \omega}{20l^2m^2 - \omega(5l^2 + 3)} + O(q^2);$$

$$\lambda_0 = -P_2\Big(\frac{1}{\omega} + \frac{(\omega - 2m^2)(\omega + (\omega - m^2)(7l^2 + 1))}{l^2(\omega - m^2)^2\omega}\Big)q^2 + O(q^3);$$

$$\eta = -\frac{m}{l}\frac{\omega - m^2 - 1}{\omega} + O(q^2) \qquad (\eta = O(q^2) \text{ при } l = 1/\sqrt{3});$$

$$v = \frac{\omega - 2m^2}{l^2} + O(q^2); \quad N_i = O(q^2) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

В (5.1) использовано обезразмеривание (которое и далее будет использоваться), отличное от обезразмеривания, примененного при постановке задачи $\mathcal{F}$, а именно: в наборе характерных параметров вместо $\hat{l}/\hat{c}$ взято $\hat{l}/\hat{v}_1$, а вместо $\hat{c}$ — величина $\hat{v}_1$.

Третье и четвертое уравнения системы (3.2) можно переписать в виде

$$LH_b + qL_\sigma v_\sigma = 0, \qquad LH_\sigma - qL_bv_\sigma = 0, \tag{5.2}$$

где $L_b = (\mathbf{b}, \nabla)$; $L_\sigma = (\sigma, \nabla)$. Тогда из (5.2) с учетом (3.7) следует существование такой функции $\Phi = \Phi(t, \mathbf{x})$, что $H_b = -qL_\sigma\Phi$, $H_\sigma = qL_b\Phi$, $L\Phi = v_\sigma$.

Введем в рассмотрение также функцию $\Psi = \Psi(t, \mathbf{x})$:

$$\Psi = \frac{-pp^{\parallel} + (1-p)L_\sigma\Phi + \frac{1}{2}p^{\perp}}{3\bar{p} - \frac{1}{2}}.$$

Из двух последних уравнений системы (3.2) вытекает, что функция Ψ удовлетворяет уравнению $L\Psi = L_b v_b$. Тогда задачу $\mathcal{F}$ в итоге можно переформулировать.

Задача $\mathcal{F}'$. В области $t > 0$, $\mathbf{x}\in R^2_+$ ищется решение системы уравнений

$$\begin{gathered} Lp^{\perp} + L_b v_b + 2L_\sigma v_\sigma = 0, \\ \mathrm{M}_1^2 L v_b + \frac{1}{2}L_b p^{\perp} - \left(3\bar{p} - \frac{1}{2}\right)L_b\Psi = 0, \\ \mathrm{M}_1^2 L v_\sigma + L_\sigma p^{\perp} - (p_2 - p)L_b^2\Phi - q^2 L_\sigma^2\Phi = 0, \\ L\Phi = v_\sigma, \qquad L\Psi = L_b v_b, \end{gathered} \tag{5.3}$$

удовлетворяющее при $t > 0$, $x_1 = 0$, $x_2\in R^1$ граничным условиям

$$\begin{gathered} v_1 + dp^{\perp} = N_1\xi_2 F, \qquad \tau F = \mu p^{\perp} + N_2\xi_2 F, \\ v_2 = \lambda_0\xi_2 F + \eta p^{\perp}, \qquad \Psi = æp^{\perp} + N_4\xi_2 F, \qquad \Phi = -m(1-\chi)F, \end{gathered} \tag{5.4}$$

а также соответствующим начальным данным при $t = 0$. Здесь

$$æ = -\frac{2(\omega - m^2 - 1)}{5l^2} - \frac{1}{5} + O(q^2); \qquad N_4 = O(q^2).$$

Систему (5.3) можно переписать в виде симметрической t-гиперболической (по Фридрихсу) системы:

$$A\mathbf{V}_t + B\mathbf{V}_{x_1} + C\mathbf{V}_{x_2} + \Omega\mathbf{V} = 0. \tag{5.5}$$

Здесь $\mathbf{V} = (p^{\perp}, v_b, v_\sigma, Q, R, \Psi, \Phi)^*$; $Q = L_b\Phi$; $R = L_\sigma\Phi$; $A = \mathrm{diag}(1/2, \mathrm{M}_1^2, \mathrm{M}_1^2, \bar{p}_2 - \bar{p}, q^2, 3\bar{p} - 1/2, 1)$ — диагональная матрица;

$$B = A + B_0,$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}l & -m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}l & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{2} - 3\bar{p}\right)l & 0 \\ -m & 0 & 0 & (\bar{p}_2 - \bar{p})l & mq^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\bar{p}_2 - \bar{p})l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & mq^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2} - 3\bar{p}\right)l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}m & l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}m & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{2} - 3\bar{p}\right)m & 0 \\ l & 0 & 0 & (p_2 - p)m & -lq^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\bar{p}_2 - \bar{p})m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -lq^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2} - 3p\right)m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$\Omega = (\omega_{ij})$ $(i,j = \overline{1,7})$ — матрица, у которой элемент $\omega_{73} = -1$, а остальные элементы $\omega_{ij} = 0$. Заметим, что в силу неравенств (2.4)

$$p_2 - p > 0, \quad 3p - 1/2 > 0,$$

т. е. матрица $A > 0$.

Сконструируем теперь из системы (5.5) расширенную систему

$$A_p(\mathbf{V}_p)_t + B_p(\mathbf{V}_p)_{x_1} + C_p(\mathbf{V}_p)_{x_2} + \Omega_p\mathbf{V}_p = 0, \tag{5.6}$$

где $\mathbf{V}_p = (\mathbf{V}^*, \tau\mathbf{V}^*, \xi_1\mathbf{V}^*, \xi_2\mathbf{V}^*, \tau^2\mathbf{V}^*, \tau\xi_1\mathbf{V}^*, \tau\xi_2\mathbf{V}^*, \xi_1^2\mathbf{V}^*, \xi_1\xi_2\mathbf{V}^*, \xi_2^2\mathbf{V}^*)^*$; $A_p = \mathrm{diag}(A, A, A, A, A, A, A, A, A, A)$ — клеточно-диагональная матрица и т. д.

Записывая для системы (5.6) интеграл энергии в дифференциальной форме (см. [3]) и интегрируя его по области R^2_+, имеем

$$\frac{d}{dt}J_0(t) - \int\limits_{R^1}(B_p\mathbf{V}_p, \mathbf{V}_p)\Big|_{x_1=0}dx_2 + \iint\limits_{R^2_+}((\Omega_p + \Omega_p^*)\mathbf{V}_p, \mathbf{V}_p)\,d\mathbf{x} = 0. \tag{5.7}$$

Здесь

$$J_0(t) = \iint\limits_{R^2_+}(A_p\mathbf{V}_p, \mathbf{V}_p)\,d\mathbf{x}, \quad (A_p\mathbf{V}_p, \mathbf{V}_p) = (A\mathbf{V}, \mathbf{V}) + \ldots + (A\mathbf{V}_{x_2x_2}, \mathbf{V}_{x_2x_2});$$

$$(A\mathbf{V}, \mathbf{V}) = \frac{1}{2}(v^\perp)^2 + \mathrm{M}_1^2 v_b^2 + \mathrm{M}_1^2 v_\sigma^2 + \frac{\bar{p}_2 - \bar{p}}{q^2}H_\sigma^2 +$$

$$+ H_\xi^2 + \Phi^2 + \frac{\left(\bar{p}p^{\|} + \dfrac{1 - \bar{p}}{q}H_b - \dfrac{1}{2}p^\perp\right)^2}{3\bar{p} - \dfrac{1}{2}}$$

и т. д. При получении (5.7) полагали, что $(\mathbf{V}_p, \mathbf{V}_p)^{1/2} = |\mathbf{V}_p| \to 0$ при $x_1 \to \infty$ или $|x_2| \to \infty$.

С учетом системы (5.3) и граничных условий (5.4) при $x_1 = 0$ оцениваем в равенстве (5.7) второе и третье слагаемые. В итоге запишем неравенство

$$\frac{d}{dt}J_0(t) - \int\limits_{R^1}\Big\{C_1((p^\perp)^2 + v_\xi^2 + (p_t^\perp)^2 + (p_{x_1}^\perp)^2 + (p_{x_2}^\perp)^2 + P)\Big|_{x_1=0} +$$

$$+ C_q(\widetilde{F}^2 + \widetilde{F}_t^2 + \widetilde{F}_{x_2}^2)\Big\}dx_2 \le C_2J_0(t), \tag{5.8}$$

где $C_1, C_2 > 0$ — постоянные; $P = (p_{tt}^\perp)^2 + (p_{tx_1}^\perp)^2 + (p_{tx_2}^\perp)^2 + (p_{x_1x_1}^\perp)^2 + (p_{x_1x_2}^\perp)^2 + (p_{x_2x_2}^\perp)^2$; $C_q = O(q^2)$; $\widetilde{F} = F_{x_2x_2}$. Опять рассматривая систему (5.3) при $x_1 = 0$, после громоздких преобразований получим из нее с помощью граничных условий (5.4) равенство

$$\widetilde{F} = (a_1 p_t^{\perp} + a_2 p_{x_1}^{\perp} + a_3 p_{x_2}^{\perp})\Big|_{x_1=0} \quad (a_i = O(1),\ i = 1,3),$$

с учетом которого, воспользовавшись свойством следа функции из $W_2^1(R_+^2)$ на прямой $x_1 = 0$ (см. [21]), приведем неравенство (5.8) к виду

$$\frac{d}{dt} J_0(t) - \widetilde{C}_1 \int\limits_{R^1} P|_{x_1=0}\, dx_2 \le \widetilde{C}_2 J_0(t) \tag{5.9}$$

($\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2 > 0$ — постоянные).

Перейдем теперь ко второму (более сложному) этапу конструирования расширенной системы. Путем несложных выкладок из системы (5.3) находим, что функции $p^{\|}$, Φ, Ψ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\mathrm{M}^2 L^2 p^{\perp} - \xi_1^2 p^{\perp} - \gamma \xi_2^2 p^{\perp} + S = 0; \tag{5.10}$$

$$\mathrm{M}^2 L^2 \Phi + \frac{1}{\widetilde{k}} \left\{ L_\sigma p^{\perp} - (\bar{p}_2 - \bar{p}) L_b^2 \Phi - q^2 L_\sigma^2 \Phi \right\} = 0. \tag{5.11}$$

Здесь $\mathrm{M}^2 = \mathrm{M}_1^2/\widetilde{k} = 1 - \delta q^2 + O(q^3)$; $\widetilde{k} = k\rho_1 = \omega + O(q^2)$; $\rho_1 = 1 + O(q^2)$; $\delta > 0$ — пока произвольная постоянная, определяемая в конечном итоге выбором параметра $\widetilde{k}$;

$$S = \frac{1}{\widetilde{k}} \Big\{ \Big(3\bar{p} - \frac{1}{2}\Big) L_b^2 \Psi + \Big(\widetilde{k} - 2 + \frac{3l^2}{2}\Big) \xi_1^2 p^{\perp} + 3lm\xi_1\xi_2 p^{\perp} +$$
$$+ 2L_\sigma((\bar{p}_2 - \bar{p}) L_b^2 \Phi + q^2 L_\sigma^2 \Phi) \Big\}; \qquad \gamma = \frac{1 + 3l^2}{2\widetilde{k}} = \frac{1 + 3l^2}{2\omega} + O(q^2).$$

Следуя [3, 21] (см. также [9]), перепишем уравнение (5.10):

$$(\widetilde{L}_1^2 - L_2^2 - \widetilde{L}_3^2) p^{\perp} + \beta^2 S = 0. \tag{5.12}$$

Здесь $\widetilde{L}_1 = \mathrm{M}L_1$; $L_1 = \tau$; $L_2 = \beta^2\xi_1 - \mathrm{M}^2 L_1$; $\widetilde{L}_3 = \beta L_3$; $L_3 = \sqrt{\gamma}\xi_2$; $\beta = \sqrt{1 - \mathrm{M}^2} = \sqrt{\delta} q + O(q^2)$. Если функция $p^{\perp}(t, \mathrm{x})$ удовлетворяет уравнению (5.12), то вектор

$$\mathbf{W} = (\mathbf{Y}_1^*, \mathbf{Y}_2^*, \mathbf{Y}_3^*)^*$$

$$(\mathbf{Y}_1 = \widetilde{L}_1 \mathbf{Y},\quad \mathbf{Y}_2 = L_2 \mathbf{Y},\quad \mathbf{Y}_3 = \widetilde{L}_3 \mathbf{Y},\quad \mathbf{Y} = \widetilde{\nabla} p^{\perp},\quad \widetilde{\nabla} = (\widetilde{L}_1, L_2, \widetilde{L}_3)^*)$$

удовлетворяет системе вида (см. [3])

$$\{\hat{A}\widetilde{L}_1 - \hat{B}L_2 - \hat{C}\widetilde{L}_3\}\mathbf{W} + \beta^2 \begin{pmatrix} \mathcal{K} \\ \mathcal{L} \\ \mathcal{M} \end{pmatrix} \widetilde{\nabla} S = 0, \tag{5.13}$$

где

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{K} & \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{L} & \mathcal{K} & i\mathcal{N} \\ \mathcal{M} & -i\mathcal{N} & \mathcal{K} \end{pmatrix}; \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{K} & i\mathcal{N} \\ \mathcal{K} & \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ -i\mathcal{N} & \mathcal{M} & -\mathcal{L} \end{pmatrix}; \quad \hat{C} = \begin{pmatrix} \mathcal{M} & -i\mathcal{N} & \mathcal{K} \\ i\mathcal{N} & -\mathcal{M} & \mathcal{L} \\ \mathcal{K} & \mathcal{L} & \mathcal{M} \end{pmatrix};$$

$\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ — произвольные эрмитовы матрицы порядка 3. Возвращаясь в (5.13) к дифференциальным операторам τ, ξ_1, ξ_2, получим систему

$$\{D\tau - \beta^2\hat{B}\xi_1 - \beta\sqrt{\gamma}\hat{C}\xi_2\}\mathbf{W} + \beta^2 \begin{pmatrix} \mathcal{K} \\ \mathcal{L} \\ \mathcal{M} \end{pmatrix} \tilde{\nabla} S = 0 \tag{5.14}$$

$$(D = \mathrm{M}(\hat{A} + \mathrm{M}\hat{B})).$$

Справедливы следующие соотношения (см. [3]):

$$\hat{A} = T_0^*\{I_2 \times \tilde{H}\}T_0,$$
$$\hat{B} = T_0^*\left\{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \times \tilde{H}\right\}T_0, \qquad \hat{C} = T_0^*\left\{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \tilde{H}\right\}T_0. \tag{5.15}$$

Здесь

$$T_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times I_3; \qquad \tilde{H} = \begin{pmatrix} \mathcal{K} - \mathcal{M} & -\mathcal{L} - i\mathcal{N} \\ -\mathcal{L} + i\mathcal{N} & \mathcal{K} + \mathcal{M} \end{pmatrix};$$

$I_2 \times \tilde{H}$ — кронекерово произведение матриц I_2 и $\tilde{H}$ и т. д.; I_2 — единичная матрица порядка 2 и т. д. В силу (5.15)

$$D = \mathrm{M}T_0^*\left\{\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{M}_0 \\ -\mathrm{M}_0 & 1 \end{pmatrix} \times \tilde{H}\right\}T_0. \tag{5.16}$$

Получим для системы (5.13) граничные условия. Для этого умножим скалярно систему (5.3) на вектор $(\mathrm{M}^2\tau, -l\tau/\tilde{k}, 2m\tau/\tilde{k}, 0, 0)^*$. Рассматривая полученное выражение при $x_1 = 0$, с помощью граничных условий (5.4) приходим к соотношению

$$\left\{\mathrm{M}^2(1 + d\rho_2)\tau^2 - \beta^2\rho_3\tau\xi_1 + \mathrm{M}^2\lambda(\sqrt{\gamma}\xi_2)^2 + N_5\tau\xi_2\right\}p^\perp = 0, \quad x_1 = 0, \tag{5.17}$$

где $\lambda = \dfrac{1}{\gamma}\lambda_0\mu + O(q^2)$; $\rho_i = 1 + O(q^2)$ $(i = 2, 3)$; $N_5 = O(q^2)$. Рассмотрим также при $x_1 = 0$ уравнение (5.10). Используя граничные условия (5.4), приведем его к виду

$$(\rho_4\tilde{L}_1^2 - \rho_5 L_2^2 - \rho_6\tilde{L}_3^2)p^\perp +$$
$$+ (N_6\tilde{L}_1 L_2 + N_7\tilde{L}_1 L_3 + N_8 L_2\tilde{L}_3)p^\perp = 0, \quad x_1 = 0. \tag{5.18}$$

Здесь $\rho_i = 1 + O(q^2)$ $(i = \overline{4, 6})$; $N_i = O(q^2)$ $(i = \overline{6, 8})$. С учетом (5.17), (5.18) в качестве граничных условий при $x_1 = 0$ для системы (5.13) возьмем выражения (см. [3, 9])

$$\rho_4\tilde{L}_1(\tilde{L}_1 p^\perp) - \rho_5 L_2(L_2 p^\perp) - \rho_6\tilde{L}_3(\tilde{L}_3 p^\perp) +$$
$$+ \alpha\{\rho_7\tilde{L}_1(L_2 p^\perp) - \rho_8 L_2(\tilde{L}_1 p^\perp)\} + N_7\tilde{L}_1(\tilde{L}_3 p^\perp) + N_8 L_2(\tilde{L}_3 p^\perp) = 0,$$

$$\tilde{L}_3(L_2 p^\perp) - L_2(\tilde{L}_3 p^\perp) = 0,$$

$$\rho_9\tilde{L}_1(L_2p^\perp) - \rho_{10}\mathrm{M}dL_2(L_2p^\perp) - \frac{\mathrm{M}}{\beta}\tilde{m}\tilde{L}_3(\tilde{L}_3p^\perp) +$$
$$+ N_9\tilde{L}_1(\tilde{L}_3p^\perp) + N_{10}L_2(\tilde{L}_3p^\perp) + N_{11}\tilde{L}_1(\tilde{L}_1p^\perp) = 0,$$

которые запишем как

$$A_1\mathbf{Y}_1 + B_1\mathbf{Y}_2 + C_1\mathbf{Y}_3 = 0, \tag{5.19}$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} \rho_4 & \alpha\rho_7 & N_7 \\ 0 & 0 & 0 \\ N_{11} & \rho_9 & N_9 \end{pmatrix}; \qquad B_1 = \begin{pmatrix} -\alpha\rho_8 & -\rho_5 & N_8 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\rho_{10}\mathrm{M}d & N_{10} \end{pmatrix};$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\rho_6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{\mathrm{M}\tilde{m}}{\beta} \end{pmatrix};$$

$\alpha > 1$ — постоянная; $\tilde{m} = \rho_{11}\beta d + \mathrm{M}^2\lambda/\beta$; $\rho_i = 1 + O(q^2)$ $(i = \overline{7,11})$; $N_i = O(q^2)$ $(i = \overline{9,11})$. Нетрудно убедиться в том, что $\lambda < 0$ $(\mu < 0,\ \lambda_0 > 0)$. Теперь выберем число δ (т. е. $\tilde{k}$) так, чтобы коэффициент

$$\tilde{m} = \beta\Big(1 - \frac{m^2}{\omega} + \frac{\lambda^{(2)}}{\delta} + O(q^2)\Big)$$

был положителен. Здесь $\lambda = \lambda^{(2)}q^2 + O(q^3)$; $\lambda^{(2)} < 0$; $1 - m^2/\omega > 0$.

Пусть

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Lambda}_{\mathrm{I}} \\ \mathbf{\Lambda}_{\mathrm{II}} \end{pmatrix} = T_0\mathbf{W},$$

где

$$\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Lambda}_1 \\ \mathbf{\Lambda}_2 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{\Lambda}_{\mathrm{II}} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Lambda}_3 \\ \mathbf{\Lambda}_4 \end{pmatrix};$$

$\mathbf{\Lambda}_k$ $(k = \overline{1,4})$ — векторы размерности 3. Поскольку

$$\mathbf{Y}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{\Lambda}_1 + \mathbf{\Lambda}_4), \quad \mathbf{Y}_2 = -\sqrt{2}\mathbf{\Lambda}_2 = -\sqrt{2}\mathbf{\Lambda}_3, \quad \mathbf{Y}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{\Lambda}_4 - \mathbf{\Lambda}_1),$$

то условия (5.19) можно еще представить как

$$\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{I}} = G\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{II}} \tag{5.20}$$

$\Big(G = \begin{pmatrix} G_1 & -G_2 \\ I_3 & 0 \end{pmatrix},\ G_1 = 2(A_1 - C_1)^{-1}B_1,\ G_2 = (A_1 - C_1)^{-1}(A_1 + C_1)\Big)$.

Пусть все собственные числа матрицы G лежат строго в левой полуплоскости, т. е. $\mathrm{Re}\,\lambda_j(G) < 0$, $j = \overline{1,6}$. Последнее справедливо, если $\tilde{m} > 0$, $\lambda < 0$ (см. [3])! Составим теперь матричное уравнение Ляпунова

$$G^*\tilde{H} + \tilde{H}G = -G_0 \tag{5.21}$$

для нахождения матрицы $\tilde{H}$, которая фигурирует в формулах (5.15). Как известно (см., например, [22]), уравнение (5.21) имеет единственное решение

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} \tilde{H}_1 & \tilde{H}_2 \\ \tilde{H}_2^* & \tilde{H}_3 \end{pmatrix} > 0, \qquad \tilde{H}_1 = \tilde{H}_1^*, \qquad \tilde{H}_3 = \tilde{H}_3^*$$

при любой вещественной симметрической положительно определенной матрице G_0. При этом матрица $\widetilde{H}$ тоже вещественная, симметрическая, а матрицы $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ находятся следующим образом:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}(\widetilde{H}_1 + \widetilde{H}_3), \qquad \mathcal{M} = \frac{1}{2}(\widetilde{H}_3 - \widetilde{H}_1),$$
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\widetilde{H}_2 + \widetilde{H}_2^*), \qquad i\mathcal{N} = \frac{1}{2}(\widetilde{H}_2^* - \widetilde{H}_2).$$

Поскольку $\widetilde{H} > 0$, то $D > 0$ (см. (5.16)).

Выпишем для системы (5.14) интеграл энергии в дифференциальной форме (см. [3])

$$(D\mathbf{W},\mathbf{W})_t - \beta^2(\widehat{B}\mathbf{W},\mathbf{W})_{x_1} - \beta\sqrt{\gamma}(\widehat{C}\mathbf{W},\mathbf{W})_{x_2} +$$
$$+ \beta^2\{2(\mathbf{Y}_1,\mathcal{K}\widetilde{\nabla}S) + 2(\mathbf{Y}_2,\mathcal{L}\widetilde{\nabla}S) + 2(\mathbf{Y}_3,\mathcal{M}\widetilde{\nabla}S)\} = 0. \qquad (5.22)$$

С учетом системы (5.3) и равенства (5.11) выражение в фигурных скобках в (5.22) можно записать в виде

$$\{\cdots\} = \tau\Omega_0 + \xi_1\Omega_1 + \xi_2\Omega_2. \qquad (5.23)$$

Формулы для Ω_α ($\alpha = \overline{0,2}$) не приводятся ввиду их громоздкости.

Проинтегрируем тождество (5.22) (с учетом (5.3)) по области R_+^2, полагая, что $|\mathbf{W}|\to 0$ при $x_1\to\infty$ или $|x_2|\to\infty$ и т. д. В итоге имеем

$$\frac{d}{dt}J_1(t) + \beta^2\int\limits_{R^1}\{(\widehat{B}\mathbf{W},\mathbf{W}) - \Omega_1\}\Big|_{x_1=0}dx_2 = 0. \qquad (5.24)$$

Здесь

$$J_1(t) = \iint\limits_{R_+^2}\{(D\mathbf{W},\mathbf{W}) + \beta^2\Omega_0\}\,d\mathbf{x}.$$

Заметим, что в силу (5.15), (5.20) квадратичная форма

$$(\widehat{B}\mathbf{W},\mathbf{W})\Big|_{x_1=0} = (G_0\mathbf{\Lambda}_{\rm II},\mathbf{\Lambda}_{\rm II})\Big|_{x_1=0}$$

положительно определена, причем поскольку

$$\mathbf{\Lambda}_{\rm II} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -\mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_3\end{pmatrix},$$

то

$$(\widehat{B}\mathbf{W},\mathbf{W})\Big|_{x_1=0} > C_3\Big\{(\widetilde{L}_1^2p^\perp)^2 + (\widetilde{L}_1L_2p^\perp)^2 + (\widetilde{L}_1\widetilde{L}_3p^\perp)^2 +$$
$$+ (L_2^2p^\perp)^2 + (L_2\widetilde{L}_3p^\perp)^2 + (\widetilde{L}_3^2p^\perp)^2\Big\}\Big|_{x_1=0} > \widetilde{C}_3\beta^8P\Big|_{x_1=0}, \qquad (5.25)$$

где C_3, $\widetilde{C}_3 > 0$ — постоянные, не зависящие от q и определяемые в конечном итоге нормой матрицы G_0. Заметим также, что с помощью системы (5.3) и граничных условий (5.4) при $x_1 = 0$ можно получить неравенство

$$-\beta^2\Omega_1|_{x_1=0} > N_{12}P|_{x_1=0} \qquad (N_{12} = O(q^2)). \qquad (5.26)$$

В силу малости q квадратичная форма

$$(A_p\mathbf{V}_p, \mathbf{V}_p) + (D\mathbf{W}, \mathbf{W}) + \beta^2\Omega_0$$

положительно определена ($A_p > 0$, $D > 0$, $\beta^2 = O(q^2)$). Поэтому, складывая равенство (5.24) и неравенство (5.9) и учитывая, что за счет выбора матрицы G_0 (см. неравенство (5.25)), а также в силу (5.26) можно добиться положительной определенности формы

$$\mathcal{A} = \{\beta^2(\hat{B}\mathbf{W}, \mathbf{W}) - \beta^2\Omega_1 - \tilde{C}_1 P\}\Big|_{x_1=0} > (\beta^{10}\tilde{C}_3 - \tilde{C}_1 + N_{12})P\Big|_{x_1=0} > 0$$

(выбираем, например, G_0 так, чтобы $\tilde{C}_3 = O(q^{-11})$), в итоге получим

$$\frac{d}{dt}J(t) \le C_5 J(t), \qquad t > 0,$$

где $J(t) = J_0(t) + J_1(t)$; $C_5 > 0$ — постоянная, не зависящая от q. Из этого неравенства для задачи $\mathcal{F}'$ следует априорная оценка

$$J(t) \le \mathrm{e}^{C_5 t}J(0), \qquad t > 0, \tag{5.27}$$

которая указывает на то, что смешанная задача $\mathcal{F}'$ корректна.

Пусть начальные данные (3.4) таковы, что

$$H_k|_{t=0} = q\varphi_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in R^2_+, \quad k = 1, 2.$$

Тогда функция $\Phi_0(\mathbf{x})$ ($= \Phi|_{t=0}$) находится как решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\Delta\Phi_0 = \xi_1\varphi_2 - \xi_2\varphi_1, \quad \mathbf{x}\in R^2_+, \qquad \Phi_0\Big|_{x_1=0} = -m(1-\chi)F_0(x_2), \quad x_2\in R^1.$$

Пусть к тому же функции $\varphi_k(\mathbf{x})$, $k = 1, 2$, $\mathbf{x}\in R^2_+$ финитные с компактными носителями, лежащими в ограниченной области $\Omega\subset R^2_+$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Тогда функцию $\Phi_0(\mathbf{x})$ определим следующим образом. В области $R^2_+\backslash\Omega$ $\Phi_0(\mathbf{x})\equiv -m(1-\chi)F_0(x_2)$, а в области Ω она находится как решение задачи Дирихле:

$$\Delta\Phi_0 = \xi_1\varphi_2 - \xi_2\varphi_1, \quad \mathbf{x}\in\Omega, \qquad \Phi_0|_{\partial\Omega} = -m(1-\chi)F_0(x_2).$$

Тогда для построенной так функции $\Phi_0(\mathbf{x})$ справедлива оценка (см. [23])

$$\|\Phi_0\|_{W_2^2(R^2_+)} \le C_6\{\|\varphi_1\|_{W_2^2(R^2_+)} + \|\varphi_2\|_{W_2^2(R^2_+)} + \|F_0\|_{W_2^2(R^1)}\}.$$

Здесь $C_6 > 0$ — константа, не зависящая от $\varphi_{1,2}$, F_0. Из последнего неравенства с помощью граничных условий (5.4) выводим оценку

$$\|\Phi_0\|_{W_2^2(R^2_+)} \le \tilde{C}_6\{\|\varphi_1\|_{W_2^2(R^2_+)} + \|\varphi_2\|_{W_2^2(R^2_+)} + \\ + \|p_0^\perp|_{x_1=0}\|_{W_2^1(R^1)} + \|v_{2,0}|_{x_1=0}\|_{W_2^1(R^1)}\},$$

где $\tilde{C}_6 > 0$ — постоянная; $p_0^\perp = p^\perp|_{t=0}$; $v_{2,0} = v_2|_{t=0}$. И наконец, используя свойство следа функции из $W_2^1(R^2_+)$ на прямой $x_1 = 0$, в итоге получим

$$\|\Phi_0\|_{W_2^2(R^2_+)} \le C_7\{\|\varphi_1\|_{W_2^2(R^2_+)} + \|\varphi_2\|_{W_2^2(R^2_+)} + \\ + \|p_0^\perp\|_{W_2^2(R^2_+)} + \|v_{2,0}\|_{W_2^2(R^2_+)}\} \tag{5.28}$$

($C_7 > 0$ — постоянная, не зависящая от $\varphi_{1,2}$, $p_0^\perp$, $v_{2,0}$).

Рассматривая введение функции Φ как вспомогательный прием, с учетом (5.28) из неравенства (5.27) выводим искомую априорную оценку решения задачи $\mathcal{F}$:

$$\|\mathbf{U}(t)\|_{W_2^2(R_+^2)} \le K_1, \qquad 0 < t \le T < \infty. \tag{5.29}$$

Здесь $K_1 > 0$ — постоянная, определяемая в конечном итоге величиной T;

$$\|\mathbf{U}(t)\|^2_{W_2^2(R_+^2)} = \iint\limits_{R_+^2} \{(\mathbf{U},\mathbf{U}) + (\mathbf{U}_t,\mathbf{U}_t) + (\mathbf{U}_{x_1},\mathbf{U}_{x_1}) + (\mathbf{U}_{x_2},\mathbf{U}_{x_2}) +$$
$$+ (\mathbf{U}_{x_1x_1},\mathbf{U}_{x_1x_1}) + (\mathbf{U}_{x_1x_2},\mathbf{U}_{x_1x_2}) + (\mathbf{U}_{x_2x_2},\mathbf{U}_{x_2x_2})\}\,d\mathbf{x}.$$

Опять складывая равенство (5.24) и неравенство (5.9), имеем

$$\frac{d}{dt}J(t) + \int\limits_{R^1} \mathcal{A}\,dx_2 \le C_5 J(t). \tag{5.30}$$

Интегрируя (5.30) по интервалу $(0,T)$ и учитывая, что $J(t) > 0$, $\mathcal{A} > 0$, с помощью граничных условий находим неравенство

$$\int\limits_0^T\int\limits_{R^1} \{(F_t)^2+(F_{x_2})^2+(F_{tt})^2+(F_{tx_2})^2 + \ldots + (F_{x_2x_2x_2})^2\}\,dx_2\,dt \le C_8, \tag{5.31}$$

где $C_8 > 0$ — постоянная, определяемая в конечном итоге величиной T. Из второго и третьего граничных условий (2.3) получаем равенство

$$F_t = \Big(\tilde{\mu} - \frac{N_2\eta}{\lambda_0}\Big)p^\perp + \frac{N_2}{\lambda_0}v_2, \qquad x_1 = 0,$$

умножая которое на $2F$ и интегрируя по $x_2 \in R^1$, используя также неравенство Гельдера, имеем оценку

$$\frac{d}{dt}\|F(t)\|^2_{L_2(R^1)} \le c\|F(t)\|_{L_2(R^1)}\{\|p^\perp|_{x_1=0}\|_{L_2(R^1)} + \|v_2|_{x_1=0}\|_{L_2(R^1)}\}$$

($c > 0$ — постоянная, $\|F(t)\|^2 = \int\limits_{R^1} F^2 dx_2$ и т. д.). Последнее неравенство, если воспользоваться свойством следа функции на прямой $x_1 = 0$, переписывается так:

$$\frac{d}{dt}\|F(t)\|_{L_2(R^1)} \le \frac{c\mathrm{M}_b}{2}\Big\{\|p^\perp(t)\|_{W_2^1(R_+^2)} + \|v_2(t)\|_{W_2^1(R_+^2)}\Big\}. \tag{5.32}$$

Здесь $\mathrm{M}_b > 0$ — постоянная. Из неравенства (5.32) с учетом доказанной оценки (5.29) находим

$$\|F\|_{L_2((0,T)\times R^1)} \le C_9 \tag{5.33}$$

($C_9 > 0$ — константа, зависящая от T). Тогда, объединяя (5.31) и (5.33), окончательно получаем искомую априорную оценку для функции F:

$$\|F\|_{W_2^3((0,T)\times R^1)} \le K_2. \tag{5.34}$$

Здесь $K_2 > 0$ — постоянная, определяемая в конечном итоге величиной T.

Таким образом, полученные априорные оценки (5.29) и (5.34) указывают на то, что задача $\mathcal{F}$ при $q \ll 1$ корректна, и тем самым быстрая ударная волна в бесстолкновительной замагниченной плазме при большом давлении устойчива.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Chew G., Goldberger M., Low F.** The Boltzmann equation and the one-fluid hydromagnetic equations in the absence of particle collisions // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1956. V. 236, N 1204. P. 112–118.
2. **Баранов В. Б., Краснобаев К. В.** Гидродинамическая теория космической плазмы. М.: Наука, 1977.
3. **Блохин А. М.** Интегралы энергии и их приложения к задачам газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1986.
4. **Blokhin A. M., Mishchenko E. V.** Investigation on shock waves stability in relativistic gas dynamics // Le Matematiche. 1993. V. 48, Fasc. I. P. 53–75.
5. **Hoffman F., Teller E.** Magnetohydrodynamic shocks // Phys.Rev. 1950. V. 80, N 4. P. 696–703.
6. **Gardner C.S., Kruscal M. D.** Stability of plane magnetohydrodynamic shocks // Phys. Fluids. 1964. V. 7, N 5. P. 700–706.
7. **Lessen M., Deshpande M. V.** Stability of magnetohydrodynamic shocks waves // J. Plasma Phys. 1967. V. 1, N 4. P. 463–472.
8. **Филиппова О. В.** Устойчивость плоских МГД ударных волн в идеальном совершенном газе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. №6. С. 50–56.
9. **Blokhin A. M.** Strong discontinuities in magnetohydrodynamics. N.Y.: Nova Science Publ., 1993.
10. **Блохин А. М., Трахинин Ю. Л.** Об устойчивости ударных волн в магнитной гидродинамике с анизотропным давлением // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, №6. С. 10–22.
11. **Карталев М. Д.** О теореме Цемплена для ударных волн в плазме с анизотропным давлением // Докл. АН СССР. 1972. Т. 205, № 6. С. 1316–1319.
12. **Блохин А. М., Крымских Д. А.** Симметризация уравнений магнитной гидродинамики с анизотропным давлением // Краевые задачи для уравнений с частными производными: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики. 1990. С. 3–19.
13. **Захаров В. Ю.** К вопросу о возможности ударных волн разрежения в анизотропной плазме // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. №4. С. 161–164.
14. **Lynn Y. M.** Discontinuities in an anisotropic plasma // Phys. Fluids. 1967. V. 10, N 10. P. 2278–2280.
15. **Половин Р. В.** Выступление по докладу // Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы, II. Рига: Изд-во АН ЛатвССР, 1962. С. 37–38.
16. **Годунов С. К.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
17. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
18. **Блохин А. М., Крымских Д. А.** Постановка задач об устойчивости ударных волн в магнитной гидродинамике с анизотропным давлением // Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики. 1990. С. 3–30.
19. **Куликовский А. Г., Любимов Г. А.** Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962.
20. **Блохин А. М., Дружинин И. Ю.** Сильные разрывы в магнитной гидродинамике. Новосибирск: Наука, 1993.
21. **Мизохата С.** Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977.
22. **Беллман Р.** Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976.
23. **Михайлов В. П.** Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.

Поступила в редакцию 1/VIII 1994 г.