ПМТФ, № 5, 1962

О ВОЗМОЖНОСТИ УСТОЙЧИВОГО ГОРЕНИЯ

Р. М. Зайдель

(*Москва*)

В работе [1] показано, что возможны различные режимы горения в зависимости от скорости подачи горючей смеси. В данной заметке рассматривается устойчивость режима индукции по отношению к малым возмущениям. При этом исследуется только предельный случай, когда длина волны возмущений мала по сравнению с диаметром камеры и расстоянием между фронтом горения и торцом камеры, с которого подается горючая смесь. Проведенный расчет отчасти повторяет вычисления Л. Д. Ландау (см. [2], стр. 574), который рассмотрел устойчивость пламени, считая скорость распространения пламени постоянной. Результаты Л. Д. Ландау относятся к промежуточному, второму из указанных в работе [1] режимов. Для режима индукции эта задача рассматривается в предположениях, аналогичных тем, которые были использованы в работе [3]. При этом оказывается, что если выполнено условие (15), то фронт пламени будет устойчив по отношению к малым возмущениям. Однако был рассмотрен не весь спектр возмущений, а лишь его коротковолновая часть, поэтому полученное условие устойчивости будет необходимым, но вообще говоря, не достаточным. Исследование устойчивости по отношению к длинноволновым возмущениям потребует детального анализа граничных условий на торце и боковых стенках камеры.

Пусть в невозмущенном движении фронт пламени совпадает с плоскостью yz, а скорость газа совпадает с положительным направлением оси x. При $x < 0$ (исходная горючая смесь) скорость, плотность, давление и температура газа равны v_1, ρ_1, p_1, T_1; при $x > 0$ (продукты горения) имеем соответственно v_2, ρ_2, p_2, T_2. Скорость пламени считаем малой по сравнению со скоростью звука, поэтому газ по обе стороны от разрыва можно рассматривать как несжимаемую жидкость. Вязкостью газа также пренебрегаем. В этих условиях уравнения для возмущений скорости $\mathbf{v}'$ и давления p' принимают вид

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_s' = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{v}_s'}{\partial t} + v_s \frac{\partial \mathbf{v}_s'}{\partial x} + \frac{1}{\rho_s} \nabla p_s' = 0 \qquad (s = 1,2) \tag{1}$$

В области $x < 0$ решение системы (1) ищем в виде

$$v_{1x}' = A \exp(iky + kx - i\omega t), \quad v_{1y}' = iA \exp(iky + kx - i\omega t)$$
$$p_1' = \rho_1 A \left(\frac{i\omega}{k} - v_1\right) \exp(iky + kx - i\omega t) \tag{2}$$

Формулы (2) описывают безвихревое поле скоростей. В области $x > 0$ должна быть учтена также вихревая часть скорости, которая появляется, так как возмущенный поток пересекает искривленную поверхность фронта. Поэтому при $x > 0$ имеем

$$v_{2x}' = B \exp(iky - kx - i\omega t) + C \exp\left(iky + \frac{i\omega}{v_2} x - i\omega t\right)$$
$$v_{2y}' = -iB \exp(iky - kx - i\omega t) - \frac{\omega}{kv_2} C \exp\left(iky + \frac{i\omega}{v_2} x - i\omega t\right) \tag{3}$$
$$p_2' = -\rho_2 B \left(\frac{i\omega}{k} + v_2\right) \exp(iky - kx - i\omega t)$$

На поверхности разрыва (в линейном приближении это по-прежнему будет $x = 0$) условия непрерывности давления, касательной к поверхности разрыва компоненты скорости и потока вещества приводят к соотношениям

$$p_1' = p_2', \qquad v_{1y}' - v_{2y}' = (v_2 - v_1)\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}, \qquad \frac{v_{1x}'}{v_1} - \frac{v_{2x}'}{v_2} = \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \tag{4}$$

где $\varepsilon(y, t)$ — малое смещение поверхности разрыва вдоль оси x при наличии возмущений.

Пусть кинетика реакции в данной частице газа описывается уравнением

$$\frac{d\psi}{dt} = f(p, T) \tag{5}$$

Здесь через ψ обозначена концентрация одной из компонент смеси, так что началу и концу реакции отвечают значения ψ_1 и ψ_2.

Рассмотрим частицу газа, которая в невозмущенном движении прошла через фронт пламени в момент t. Интегрируя (5) по траектории данной частицы, получим

$$\psi_2 - \psi_1 = \int_{-\infty}^{t} f(p_1, T_1)dt' \tag{6}$$

При наличии возмущений реакция в данной частице закончится в момент $t + \delta t$. Считаем также, что равновесные концентрации ψ_1 и ψ_2 в возмущенном потоке меняются пренебрежимо мало. Тогда соотношение (6) заменится следующим:

$$\psi_2 - \psi_1 = \int_{-\infty}^{t+\delta t} f(p_1 + p_1', T_1 + T_1')\, dt' \tag{7}$$

Отсюда, пользуясь малостью возмущений, получим

$$\psi_2 - \psi_1 = \int_{-\infty}^{t} f(p_1, T_1)\, dt' + f(p_1, T_1)\left[\delta t + \int_{-\infty}^{t}\left(M\frac{p_1'}{p_1} + N\frac{T_1'}{T_1}\right)dt'\right]$$
$$\left(M = \frac{\partial \ln f}{\partial \ln p}, \ N = \frac{\partial \ln f}{\partial \ln T}\right) \tag{8}$$

Здесь производные M и N берутся при $p = p_1$, $T = T_1$. С учетом (6) находим

$$\delta t = -\int_{-\infty}^{t}\left(M\frac{p_1'}{p_1} + N\frac{T_1'}{T_1}\right)dt' \tag{9}$$

Так как δt — величина малая, то интеграл в (9) можно вычислять вдоль невозмущенной траектории $x = v_1(t' - t)$. К моменту $t + \delta t$ окончания реакции рассматриваемая частица будет находиться в точке $\varepsilon(t + \delta t) \approx \approx \varepsilon(t)$. Величина этого смещения связана с возмущениями скорости соотношением

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t+\delta t}(v_1 + v_{1x}')\, dt' - \int_{-\infty}^{t} v_1\, dt' \approx v_1\delta t + \int_{-\infty}^{t} v_{1x}'\, dt' \tag{10}$$

Последний интеграл также можно вычислять вдоль невозмущенной траектории $x = v_1(t' - t)$. Подставляя для δt его значение, согласно (9), получим

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} v_{1x}' \, dt' - v_1 \int_{-\infty}^{t} \left(M \frac{p_1'}{p_1} + N \frac{T_1'}{T_1} \right) dt' \qquad (11)$$

При помощи (2) нетрудно убедиться, что второе слагаемое в (11) меньше первого в отношении $\rho_1 v_2^2 / p_1 \sim (v_1 / c_1)^2$. В приближении несжимаемой жидкости величинами такого порядка можно пренебречь. Таким образом, вместо (11) получим искомое недостающее условие

$$\varepsilon(y, t) = \int_{-\infty}^{t} v_{1x}' \, [x = v_1 (t' - t), \, y, \, t'] \, dt' \qquad (12)$$

Условие (12) означает, что $\delta t = 0$, т. е. в приближении несжимаемой жидкости период индукции для данной частицы при наличии возмущений не меняется.

Пусть

$$\varepsilon(y, t) = D \exp(iky - i\omega t)$$

Тогда условия (4) и (12) приводят к четырем однородным уравнениям для постоянных A, B, C, D. После несложных вычислений получим следующее условие совместности этой системы:

$$(\alpha + 1) z^2 + 4\alpha z + \alpha(3 - \alpha) = 0 \qquad \left(z = -\frac{i\omega}{kv_1}, \ \alpha = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \qquad (13)$$

Так как обычно $\alpha > 1$ (вследствие сильного разогрева при горении), то уравнение (13) имеет вещественные корни

$$z_{1,2} = \frac{-2\alpha \pm \sqrt{\alpha(\alpha - 1)(\alpha + 3)}}{\alpha + 1}$$

Поэтому оба корня будут отрицательными, а движение будет устойчивым, если

$$3 - \alpha > 0 \qquad (14)$$

Таким образом, критерий устойчивости в рассматриваемых условиях имеет вид

$$\rho_1 / \rho_2 < 3 \qquad (15)$$

Если исходная смесь и продукты горения подчиняются уравнению состояния идеального газа с показателем изэнтропы γ_1 и γ_2 соответственно, то условие (15) можно написать так:

$$\frac{\gamma_1 (\gamma_2 - 1)}{\gamma_2 (\gamma_1 - 1)} \left[(\gamma_1 - 1) \frac{q}{c_1^2} + 1 \right] < 3 \qquad (16)$$

где q — калорийность 1 *г* горючей смеси, приведенная к абсолютному нулю температуры, а c_1 — скорость звука в смеси до реакции.

Автор искренне признателен Я. Б. Зельдовичу за интерес к работе и обсуждения.

Поступила 19 V 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Зайдель Р. М., Зельдович Я. Б. О возможных режимах стационарного горения. ПМТФ, 1962, № 4.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., 1959.
3. Зайдель Р. М. Об устойчивости детонационных волн в газовых смесях. ДАН СССР, 1961, т. 136, стр. 1142.