

3. Гладкий Я. Н., Симиных В. Н., Хасин Г. А. и др. Влияние технологии выплавки и внепечного рафинирования на усталость и трещиностойкость высокопрочных низкоуглеродистых сталей // Физ.-хим. механика материалов.— 1978.— № 4.

г. Москва

Поступила 26/VI 1989 г.

УДК 539.3

В. А. Еремеев

ВЫПУЧИВАНИЕ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ ПЛИТЫ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ, С УЧЕТОМ ФАЗОВОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ

На основе уравнений пространственной нелинейной теории упругости [1] сформулированы условия равновесия при конечных деформациях произвольного термоупругого тела, испытывающего фазовый переход. С их помощью исследовано равновесие в поле силы тяжести лежащей на поверхности расплава круглой однородной плиты. Расплав моделировался однородной несжимаемой жидкостью. В качестве определяющего соотношения для материала плиты использована модель неогукковского материала, которая является одним из возможных обобщений модели несжимаемого линейно-упругого тела на случай конечных деформаций. Методом наложения малой деформации на конечную [1] изучена потеря устойчивости плиты в малом, вызванная ее сжатием в радиальном направлении. Численно определялись критические значения деформации. Аналогично исследовано выпучивание плиты при отсутствии фазового перехода.

1. Рассмотрим равновесие термоупругого тела, испытывающего фазовый переход первого рода жидкость — твердое тело. Подобные фазовые превращения в рамках механики сплошной среды изучались в [2—7], где использовались различные подходы к получению соотношений на границе раздела фаз, описывающих фазовый переход. Характерная особенность задачи равновесия термоупругого тела в условиях фазового перехода есть наличие заранее неизвестной границы раздела фаз. В качестве дополнительного условия фазового равновесия, служащего для определения положения фазовой границы, здесь выбрано уравнение кривой плавления, выражающее зависимость температуры плавления от давления в жидкости [8].

Пусть объем, занимаемый телом в отсчетной конфигурации, равен v . Внешнюю границу тела представим как объединение поверхности γ , отделяющей твердое тело от жидкости, и поверхности $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3 = \sigma_4 \cup \sigma_5$ (рис. 1). Тело деформируется под действием массовых сил \mathbf{b} , распределенных по поверхности σ , нагрузок \mathbf{d} . На поверхности σ_2 заданы перемещения. Часть границы σ_3 контактирует с гладкой жесткой поверхностью. На поверхности σ_4 задана температура Θ_0 , а на σ_5 — тепловой поток s .

Уравнения равновесия, теплового баланса и краевые условия на поверхности σ для нелинейно-термоупругого тела имеют вид [1]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \nabla^0 \cdot \mathbf{D} + \rho_0 \mathbf{b} &= 0, \quad \nabla^0 \cdot \mathbf{h}^0 = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} |_{\sigma_1} &= \mathbf{d}, \quad \mathbf{R} |_{\sigma_2} = \mathbf{R}_0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{N}\mathbf{N}) |_{\sigma_3} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{r}) |_{\sigma_3} &= 0, \quad \Theta |_{\sigma_4} = \Theta_0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{h}^0 |_{\sigma_5} = s, \end{aligned}$$

где ∇^0 — оператор градиента в отсчетной конфигурации; \mathbf{D} — тензор напряжений Пиолы; \mathbf{h}^0 — вектор теплового потока Пиолы; ρ_0 — плотность материала в отсчетной конфигурации; \mathbf{r} и $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{r})$ — радиусы-векторы точки тела в начальном и деформированном состояниях; \mathbf{E} — единичный тензор; \mathbf{n} — вектор единичной нормали к поверхности σ ; \mathbf{N} — вектор единичной нормали к границе тела в деформированном состоянии; Θ — температура.

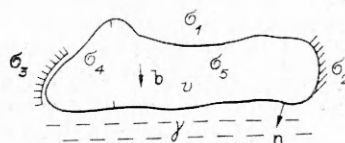


Рис. 1

Давление в жидкости p и ее температура могут быть определены из уравнений равновесия и теплового баланса, записанных в эйлеровых координатах [1, 9]:

$$(1.2) \quad -\nabla p + \rho \cdot \mathbf{b} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{h} = 0, \quad \mathbf{h} = J^{-1} \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{h}^0, \quad J = \det \mathbf{C}.$$

Здесь ρ — плотность жидкости; ∇ — оператор градиента в эйлеровых координатах, связанный с ∇^0 формулой [1] $\nabla = \mathbf{C}^{-1} \cdot \nabla^0$; \mathbf{h} — вектор теплового потока; $\mathbf{C} = \nabla^0 \mathbf{R}$ — градиент деформации. Краевые условия для жидкости на поверхностях, отличных от γ , записываются стандартным образом [9] и в дальнейшем не рассматриваются.

На межфазной границе γ требуется выполнение условий совместности для векторов напряжений, тепловых потоков и температур в твердом теле и жидкости:

$$(1.3) \quad \mathbf{n} \cdot [\mathbf{D}] = 0, \quad [\Theta] = 0, \quad \mathbf{n} \cdot [\mathbf{h}^0] = 0.$$

В (1.3) квадратными скобками обозначен скачок соответствующей величины при переходе через γ . Краевое условие для напряжений может быть преобразовано к виду, отвечающему действию на твердое тело гидростатического давления p со стороны жидкости [1]:

$$(1.4) \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = -p J \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{n}.$$

Условие фазового равновесия в форме уравнения кривой плавления имеет вид [8]

$$(1.5) \quad \Theta|_{\gamma} = \Theta^*(p)$$

($\Theta^*(p)$ — известная функция).

Рассмотрим частный случай, описываемый приведенными уравнениями. Пусть краевые условия таковы, что в твердом теле реализуется однородное поле температур: $\Theta = \Theta^0$. Если на тело действуют массовые силы, то давление в жидкости зависит от координат. Так, при равновесии однородной несжимаемой жидкости в поле силы тяжести давление линейно зависит от вертикальной координаты. В этом случае положение фазовой границы может быть найдено из условия, получаемого обращением зависимости (1.5):

$$(1.6) \quad p|_{\gamma} = p^*(\Theta^0).$$

Здесь $p^*(\Theta)$ — функция, обратная к $\Theta^*(p)$. Из соотношения (1.6) следует, что давление на фазовой границе постоянно.

2. Используем соотношения (1.1), (1.2), (1.4), (1.6) для исследования равновесия и устойчивости тяжелой круглой плиты, находящейся в однородном поле температур. Устойчивость пластин на основе трехмерной нелинейной теории упругости изучалась в [10—13]. В построенной в [14] теории плавающих ледяных пластин наряду с другими факторами учитывалась возможность плавления льда.

Предположим, что упругая плита лежит на слое однородной несжимаемой жидкости, глубину которого будем считать бесконечной. На боковой поверхности плиты заданы радиальные перемещения, касательные напряжения отсутствуют. Аналогичные краевые условия принимались в [10—13]. Верхняя поверхность плиты не нагружена, на нижней поверхности, согласно (1.4), действует гидростатическое давление со стороны жидкости, уравновешивающее вес плиты. Подобные краевые условия могут быть реализованы путем помещения плиты в жесткую гладкую цилиндрическую обойму, позволяющую перемещение плиты в вертикальном направлении и допускающую изменение своего радиуса. В отсчетной конфигурации плита занимает объем $0 \leq r \leq a$, $-h \leq z \leq 0$. Здесь и далее r , z , φ — лагранжевы цилиндрические координаты, a — радиус плиты, h — ее толщина. В случае фазового перехода толщина плиты определяется с помощью условия фазового равновесия (1.6).

Закон состояния упругого тела будем описывать моделью неогуковского материала [1] $\mathbf{D} = 2\mu \mathbf{C} - q \mathbf{C}^{-T}$ (μ — упругая постоянная). Не за-

висящая от деформации функция q возникает как следствие условия несжимаемости $\det \mathbf{C} = 1$, подобно функции давления в статике несжимаемой жидкости, и, являясь независимой характеристикой напряженного состояния, подлежит определению совместно с полем деформаций. При малых деформациях неогуковский материал следует закону Гука с модулем сдвига μ и коэффициентом Пуассона $1/2$.

Давление в однородной несжимаемой жидкости, находящейся в поле силы тяжести, имеет вид [9]

$$(2.1) \quad p = p_0 - \rho g Z$$

(p_0 — постоянная интегрирования, g — ускорение свободного падения). Здесь и далее R, Z, Φ — эйлеровы цилиндрические координаты. Так как, согласно (1.6), давление на фазовой границе постоянно, из зависимости (2.1) вытекает, что в поле силы тяжести фазовая граница в деформированном состоянии может быть только горизонтальной плоскостью

$$(2.2) \quad Z = \text{const.}$$

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние плиты, в котором она остается плоской. В этом случае удовлетворяющая условию несжимаемости деформация дается формулами [12, 13]

$$(2.3) \quad R = \lambda r, \Phi = \varphi, Z = \lambda^{-2} z$$

(λ — параметр деформации, характеризующий сжатие плиты в радиальном направлении). Легко проверить, что преобразование (2.3) удовлетворяет краевым условиям на боковой поверхности плиты, а уравнения равновесия и краевые условия на торцах плиты приводятся к виду

$$\frac{d}{dz} D_{zz} - \rho_0 g = 0, \quad D_{zz}|_{z=0} = 0, \quad D_{zz}|_{z=-h} = -p^* \lambda^2,$$

где $D_{zz} = -q \lambda^2 + 2\mu \lambda^{-2}$. Отсюда находим

$$(2.4) \quad D_{zz} = \rho_0 g z, \quad q \equiv q^0(z) = 2\mu \lambda^{-4} - \rho_0 g \lambda^{-2} z, \quad h = p^* \lambda^2 / (\rho_0 g).$$

Последнее соотношение в (2.4), связывающее толщину плиты h и давление на фазовой границе p^* , представляет собой условие равновесия плиты, лежащей на поверхности жидкости, и может быть получено непосредственно путем анализа уравнений гидростатики [9]. В отличие от задач равновесия плавающих тел здесь давление, действующее на фазовой границе, задано, а определяется толщина плиты.

3. Устойчивость в малом плоского состояния равновесия плиты будем изучать статическим методом, состоящим в рассмотрении положений равновесия, мало отличающихся от заданного, и определении критических значений параметра деформации λ , при которых возможно существование нетривиальных решений линеаризованных уравнений равновесия и краевых условий.

Осесимметричная деформация плиты, описывающая ее отклонение от плоского состояния, имеет вид [13]

$$(3.1) \quad R = \lambda r + u(r, z), \Phi = \varphi, Z = \lambda^{-2} z + v(r, z).$$

Уравнение межфазной границы в лагранжевых координатах, учитывающее ее изменение в результате фазового превращения, также отличается от уравнения плоскости

$$(3.2) \quad z = -h + \zeta(r).$$

Функция $\zeta(r)$ описывает изменение толщины плиты, вызванное ее плавлением или кристаллизацией жидкости. Подставляя зависимость (3.2) в последнее из соотношений (3.1), получим соответствующее (2.2) соотношение, связывающее вертикальное перемещение точек нижней поверхности плиты v и функцию ζ :

$$(3.3) \quad Z|_{z=-h+\zeta(r)} \equiv v(r, -h + \zeta(r)) - \lambda^{-2} h + \lambda^{-2} \zeta(r) = \text{const.}$$

Линеаризованные уравнения равновесия, несжимаемости и краевые условия на поверхности, не контактирующей с жидкостью, запишем как [1, 12, 13]

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \nabla^0 \cdot \mathbf{D}^* &= 0, \mathbf{C}^{-T} \cdot \nabla^0 \mathbf{w} = 0, \mathbf{w} = u \mathbf{e}_r + v \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D}^*|_{z=0} &= 0, \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}^* \cdot \mathbf{e}_z|_{r=a} = 0, \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}^* \cdot \mathbf{e}_\varphi|_{r=a} = 0, \\ u(a, z) &= 0, \mathbf{D}^* = 2\mu \nabla^0 \mathbf{w} - q \mathbf{C}^{-T} + q \mathbf{C}^{-T} \cdot \nabla^0 \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{C}^{-T}. \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{w} — вектор малых добавочных перемещений; \mathbf{D}^* — линеаризованный тензор напряжений Пиолы, описывающий изменение напряженного состояния при наложении добавочных перемещений; q^* — малое возмущение функции q^* ; \mathbf{C} — градиент деформации в основном деформированном состоянии, определяемом формулами (2.3); $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\varphi$ — ортонормированный базис, связанный с цилиндрическими лагранжевыми координатами. Функции u, v, q^* полностью характеризуют осесимметричное напряженно-деформированное состояние в объеме плиты, мало отличающееся от начального деформированного состояния равновесия.

Для получения линеаризованных соотношений на фазовой границе рассмотрим нелинейные краевые условия (1.4), (3.3) с учетом выражений (3.1), (3.2). Вектор нормали к искривленной фазовой границе, определяемой уравнением (3.2), дается соотношением

$$(3.5) \quad \mathbf{n} = \left(\left(\frac{\partial \zeta}{\partial r} \right)^2 + 1 \right)^{-1/2} \left(- \frac{\partial \zeta}{\partial r} \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_z \right).$$

Используя (3.5), условие (1.4) при $z = -h + \zeta(r)$ можно преобразовать к виду

$$(3.6) \quad \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D} - \frac{\partial \zeta}{\partial r} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D} = -p^* \left(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{C}^{-T} - \frac{\partial \zeta}{\partial r} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{C}^{-T} \right),$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D} &= \left[2\mu \left(\lambda^{-2} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) - q \left(\lambda + \frac{u}{r} \right) \left(\lambda + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] \mathbf{e}_z + \\ &+ \left[2\mu \frac{\partial u}{\partial z} + q \left(\lambda + \frac{u}{r} \right) \frac{\partial v}{\partial r} \right] \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D} = \left[2\mu \left(\lambda + \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \right. \\ &- q \left(\lambda + \frac{u}{r} \right) \left(\lambda^{-2} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \left. \right] \mathbf{e}_r + \left[2\mu \frac{\partial v}{\partial r} + q \left(\lambda + \frac{u}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial z} \right] \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{C}^{-T} &= \left(\lambda + \frac{u}{r} \right) \left[\left(\lambda + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \mathbf{e}_z - \frac{\partial v}{\partial r} \mathbf{e}_r \right], \quad \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{C}^{-T} = \\ &= \left(\lambda + \frac{u}{r} \right) \left[\left(\lambda^{-2} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r - \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z \right], \quad q = q^0(z) + q^*(r, z). \end{aligned}$$

В случае отсутствия фазового перехода ($\zeta = 0$) нелинейные соотношения (3.6) принимают форму, приведенную в [13]. Удерживая в (3.6) слагаемые не выше первой степени по неизвестным функциям u, v, q^*, ζ и учитывая зависимости (2.4), находим линеаризованные краевые условия при $z = -h$

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \partial v / \partial z - q^* \lambda^2 / 2\mu - \lambda^{-2} (\partial u / \partial r + u/r) + \rho_0 g \zeta / 2\mu &= 0, \\ \partial u / \partial z + \lambda^{-3} \partial v / \partial r - (\lambda - \lambda^{-5}) \partial \zeta / \partial r &= 0. \end{aligned}$$

Неизвестное возмущение фазовой границы ζ может быть определено путем линеаризации соотношения (3.3)

$$(3.8) \quad \lambda^2 v(r, -h) + \zeta(r) = 0.$$

Уравнение (3.8) позволяет исключить из краевых условий (3.7) неизвестную ζ , что приводит к соотношениям

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \partial v / \partial z - q^* \lambda^2 / 2\mu - \lambda^{-2} (\partial u / \partial r + u/r) - \rho_0 g \lambda^2 v / 2\mu &= 0, \\ \partial u / \partial z + \lambda^3 \partial v / \partial r &= 0. \end{aligned}$$

Таблица 1

\bar{h}	β							
	0,01		0,05		0,1		0,2	
	λ'	λ^*	λ'	λ^*	λ'	λ^*	λ'	λ^*
0,1	0,9907	0,9813	0,9864	0,9733	0,9812	0,9641	0,9718	0,9481
0,2	0,9664	0,9304	0,9643	0,9267	0,9616	0,9224	0,9567	0,9142
0,3	0,9240	0,8368	0,9227	0,8349	0,9210	0,8326	0,9178	0,8281

Получим также линеаризованные краевые условия на нижней поверхности плиты, когда фазовое превращение не происходит. В этом случае соответствующее (1.4) нелинейное граничное условие, задаваемое при $z = -h$, имеет вид

$$(3.10) \quad \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D} = -p \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{C}^{-T},$$

где давление p дается формулами (2.1), (3.1), а остальные выражения определяются, как в (3.6). Линеаризация (3.10) приводит к уравнениям

$$(3.11) \quad 2\partial v/\partial z - \lambda^2 q \cdot /2\mu - \rho_0 g \lambda^2 v/2\mu = 0, \quad \partial u/\partial z + \lambda^{-3} \partial v/\partial r = 0.$$

Следуя [12, 13], решение уравнений (3.4) ищется в виде

$$(3.12) \quad u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(z) J_1(\gamma_n r/a), \quad v(r, z) = V_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} V_n(z) J_0(\gamma_n r/a),$$

$$q(r, z) = Q_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(z) J_0(\gamma_n r/a)$$

(γ_n — корни функции Бесселя J_1). Функции $V_0(z)$, $Q_0(z)$ отвечают малой деформации плиты, не зависящей от радиальной координаты. При таком выборе решения краевые условия на боковой поверхности удовлетворяются тождественно. Как и в [10, 12, 13], будем интересоваться формами потери устойчивости, сопровождающимися изгибом плиты. Подстановка представления (3.12) в соотношения (3.4), (3.9) и (3.4), (3.11) приводит к линейной однородной краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $V_0(z)$, $Q_0(z)$, $U_n(z)$, $V_n(z)$, $Q_n(z)$. Общее решение полученной системы дифференциальных уравнений дается формулами

$$V_n(z) = C_1 \operatorname{ch} a_n z + C_2 \operatorname{sh} a_n z + C_3 \operatorname{ch} \frac{a_n z}{\lambda^3} + C_4 \operatorname{sh} \frac{a_n z}{\lambda^3},$$

$$U_n(z) = -\frac{\lambda^3}{a_n} \frac{d}{dz} V_n(z), \quad Q_n(z) = -\alpha C_1 \operatorname{ch} a_n z - \alpha C_2 \operatorname{sh} a_n z +$$

$$+ C_3 \left(a_n \lambda (\lambda^{-6} - 1) \operatorname{sh} \frac{a_n z}{\lambda^3} - \alpha \operatorname{ch} \frac{a_n z}{\lambda^3} \right) + C_4 \left(a_n \lambda (\lambda^{-6} - 1) \operatorname{ch} \frac{a_n z}{\lambda^3} + \alpha \operatorname{sh} \frac{a_n z}{\lambda^3} \right),$$

$$V_0(z) = C'_0, \quad Q_0(z) = C''_0, \quad a_n = \gamma_n/a, \quad \alpha = \rho_0 g/2\mu.$$

Подставляя найденное решение в краевые условия при $z = 0$, $z = -h$, приходим к однородной системе линейных алгебраических уравнений для определения постоянных интегрирования C'_0 , C''_0 , C_k ($k = 1, \dots, 4$). Можно показать что C'_0 , C''_0 равны нулю.

Таблица 2

\bar{h}	$\lambda^* \cdot 10^4$	$\lambda' \cdot 10^4$	n	\bar{h}	$\lambda^* \cdot 10^4$	$\lambda' \cdot 10^4$	n
0,005	9915	9957	12	0,04	9760	9876	2
0,01	9881	9939	7	0,06	9699	9847	2
0,02	9833	9914	4	0,08	9654	9817	1

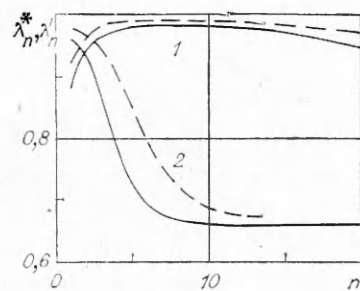


Рис. 2

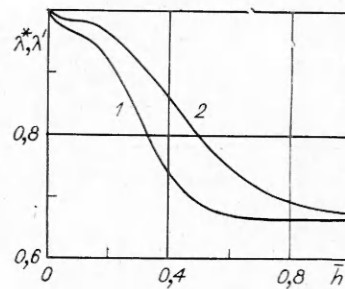


Рис. 3

Критические значения параметра деформации λ_n^* , получаемые с учетом фазового превращения, определялись численно из условия нетривиальной разрешимости системы уравнений для C_R . Также вычислялись критические значения параметра деформации λ_n' при отсутствии фазового перехода. Максимальные значения среди λ_n^* , λ_n' ($n = 1, 2, \dots$) обозначим через λ^* , λ' , которые отвечают наименьшим усилиям, прилагаемым на боковой поверхности плиты, при которых происходит выпучивание. Расчеты показали, что всегда $\lambda^* < \lambda'$. Это говорит о том, что в рассматриваемой задаче учет фазового превращения приводит к повышению критических нагрузок и деформаций, при которых происходит потеря устойчивости плиты, т. е. фазовый переход оказывает стабилизирующее воздействие. В табл. 1, 2 приведены λ^* , λ' при различных относительной толщине $\bar{h} = h/a$ и параметре $\beta = \rho_0 g a / 2\mu$, характеризующем влияние силы тяжести. Форма плиты после потери устойчивости определяется номером n . Соответствующий приведенным в табл. 1 значениям λ^* , λ' номер моды выпучивания $n = 1$. Для достаточно тонких плит наименьшим критическим нагрузкам отвечает номер моды выпучивания $n > 1$, что отличает рассматриваемую задачу, учитывающую действие силы тяжести и влияние жидкости, от изученных в [10, 12, 13], где всегда $n = 1$. В табл. 2 даны λ^* , λ' и соответствующие им номера n при $\beta = 0,1$. Зависимости λ_n^* и λ_n' от n при $\beta = 0,1$ и $\bar{h} = 0,01$ и $0,1$ (кривые 1, 2) приведены на рис. 2. Здесь зависимость λ^* от n изображена сплошными линиями, λ' от n — штриховыми. Зависимости λ^* , λ' от толщины при $\beta = 0,1$ представлены на рис. 3 (линии 1, 2).

Автор благодарит Л. М. Зубова за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости.— М.: Наука, 1980.
2. Пальмов В. А. О напряжениях, возникающих при затвердевании материалов // Инж. журн. МТТ.— 1967.— № 4.
3. Гринфельд М. А. Об условиях термодинамического равновесия фаз нелинейно-упругого материала // ДАН СССР.— 1980.— Т. 251, № 4.
4. Кондауров В. И., Никитин Л. В. Исследование фазовых переходов первого рода в нелинейно-упругих средах // Изв. АН СССР. МТТ.— 1983.— № 6.
5. Белова И. В., Овсянникова А. Л. Анализ влияния термоупругих напряжений на процесс кристаллизации шара в невесомости // ПМТФ.— 1985.— № 5.
6. Арутюнян Н. Х., Дроздов А. Д., Наумов В. Э. Механика растущих вязкоупруго-пластических тел.— М.: Наука, 1987.
7. Гетц И. Г., Мейрманов А. М., Шеметов Н. В. Феноменологическая модель фазовых переходов первого рода в деформируемой упругой среде // ПМТФ.— 1987.— № 6.
8. Жарков В. Н., Калинин В. А. Уравнения состояния твердых тел при высоких давлениях и температурах.— М.: Наука, 1968.
9. Седов Д. И. Механика сплошной среды.— М.: Наука, 1984.— Т. 2.
10. Сенсениг К. Некоторые задачи о выпучивании в нелинейной теории упругости // Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения.— М.: Мир, 1974.
11. Зубов Л. М. Приближенная теория выпучивания тонких пластинок из полунелинейного материала при аффинной начальной конфигурации // ПММ.— 1969.— Т. 33, вып. 4.

12. **Зубов Л. М.** Выпучивание пластинок из неогуковского материала при аффинной начальной деформации // ПММ.— 1970.— Т. 34, вып. 4.
 13. **Зеленин А. А., Зубов Л. М.** Поведение толстой круглой плиты после потери устойчивости // ПММ.— 1988.— Т. 52, вып. 4.
 14. **Хатгер К., Вильямс Ф.** Теория плавающих ледяных пластин // Физика и механика льда.— М.: Мир, 1983.

г. Ростов-на-Дону

Поступила 12/VII 1989 г.
 в окончательном варианте — 22/I 1990 г.

УДК 539.214; 539.374; 539.375

М. А. Лёган

К ВОПРОСУ О НАЧАЛЕ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ В ЗОНЕ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ

В практике расчетов элементов конструкций на прочность в настоящее время широко используют классические критерии пластичности, считая при этом, что пластическое течение начинается тогда, когда в соответствии с принятым критерием достигается предельное напряженное состояние хотя бы в одной (самой опасной) точке элемента конструкции. Однако эти критерии не учитывают влияния неравномерности распределения напряжений в окрестности самой опасной точки тела на начало пластического течения.

Вопрос о влиянии неравномерности напряженного состояния на предел текучести в зоне максимальных напряжений давно привлекал внимание исследователей [1—3]. В дальнейшем обычно использовался предложенный в [1] градиентный подход к оценке этой неравномерности и ее влияния на локальный предел текучести в самой опасной точке тела [4—6]. Признаками пластического течения в зоне максимальных напряжений считали появление линий Людерса в образцах из мягкой стали [1], а также отклонения от законов упругого деформирования, фиксируемые, например, тензодатчиками [4, 5]. При этом было замечено, что указанные признаки пластического течения появляются при напряжениях в самой опасной точке, превышающих предел текучести при однородном напряженном состоянии σ_T . В последнее время проведены эксперименты, в которых отклонения от законов упругого деформирования фиксировались высокочувствительным методом голографической интерферометрии [7, 8]. Эти эксперименты также подтвердили повышение локального предела текучести в самой опасной точке тела. На основании полученных результатов предложен градиентный критерий начала пластического течения при неоднородном напряженном состоянии [9—11].

В данной работе на примере задачи о растяжении пластины с эллиптическим отверстием рассмотрен вопрос о границах применимости градиентного критерия и модели сплошной среды в случае очень малых отверстий, отмечается взаимосвязь данного критерия и структуры материала, а также показано, что в достаточно широком диапазоне коэффициентов концентрации напряжений и размеров отверстия этот критерий фактически отражает энергетическую закономерность начала пластического течения.

1. О границах применимости градиентного критерия и модели сплошной среды в случае очень малых отверстий. При неоднородном напряженном состоянии, согласно градиентному критерию, пластические деформации появляются только тогда, когда эквивалентное напряжение, пусть это будет интенсивность напряжений σ_i , в самой опасной точке тела σ_i^{\max} превысит σ_T и достигнет локального предела текучести σ_T^* :

$$(1.1) \quad \sigma_T^* = \sigma_T \left(1 + \sqrt{L_0 G / \sigma_i^{\max}} \right).$$

Здесь $G = |\text{grad } \sigma_i|$ — модуль градиента σ_i в самой опасной точке тела; L_0 — константа материала, имеющая размерность длины. При однородном напряженном состоянии $G = 0$ и $\sigma_T^* = \sigma_T$. Данный критерий хорошо подтверждается экспериментами, проведенными при растяжении широких плоских образцов с центральным эллиптическим отверстием и образцов с боковыми вырезами [9—11]. При этом значения коэффициента концентрации напряжений K изменялись от 3 до 10, а размер эллиптического отверстия в направлении, перпендикулярном направлению растяжения, составлял 10 либо 20 мм. Однако необходимо заметить, что при меньших размерах отверстия по опасному сечению меньше будут и зна-