

УДК 662.62

## СКОРОСТЬ ГОРЕНИЯ ТВЕРДОГО ТОПЛИВА КАК ФУНКЦИЯ ДАВЛЕНИЯ

А. М. Липанов

Институт механики УрО РАН, 426067 Ижевск, ipm@udman.ru

Анализируются зависимости скорости горения порохов, твердых топлив и взрывчатых веществ от давления. С этой целью осуществлен поворот координат на угол, тангенс которого равен коэффициенту скорости горения в ее одночленном законе в зависимости от давления. Рассмотрены различные варианты аппроксимации и предложено выражение, наилучшим образом аппроксимирующее зависимость скорости горения от давления в интервале давления от нуля до бесконечности.

Ключевые слова: горение, скорость горения, давление, аппроксимация.

Имеется достаточно большое количество экспериментальных данных по зависимости скоростей горения твердых топлив, порохов и взрывчатых веществ от давления [1–3] (рис. 1). В большинстве случаев вид этих зависимостей близок к кривой 1 на рис. 1, б. Но в ряде случаев при использовании катализаторов зависимости  $U_T(P)$  принимают другой вид — с наличием максимума и минимума. Все кривые имеют асимптотику

$$U_T = U_1 P \quad (1)$$

при  $P \rightarrow \infty$ .

В работе используются безразмерные переменные: давление  $P$ , отнесенное к 1 атм, и скорость горения топлива  $U_T$ , отнесенная к своему значению при  $P = 500$  МПа.

Давление  $P = 500$  МПа может быть реализовано в артиллерийских установках. Но в артиллерийских установках скорость горения как функцию давления аппроксимировать не надо. В этих условиях зависимость  $U_T(P)$  хорошо известна — это одночленный закон (1). Аппроксимация  $U_T(P)$  в основном нужна при  $P < 60$  МПа, или 600 отн. ед. Но тогда скорость  $U_T$ , будучи положительной, много меньше единицы. Коэффициент  $U_1$  — безразмерный и малый. Будем использовать  $U_1 = 0.0002$ . Поскольку рассматривается ракетный диапазон давлений, считается, что величина  $U_1$  известна.

Из анализа кривых 1 и 2 на рис. 2 видно, что в ракетном диапазоне давлений (до  $P \leq 150$ ) кривую  $U_T(P)$  можно аппроксимировать степенной функцией

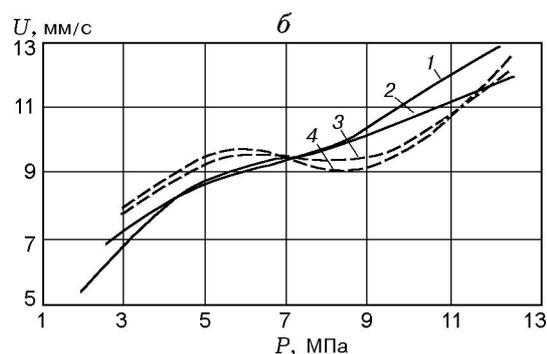
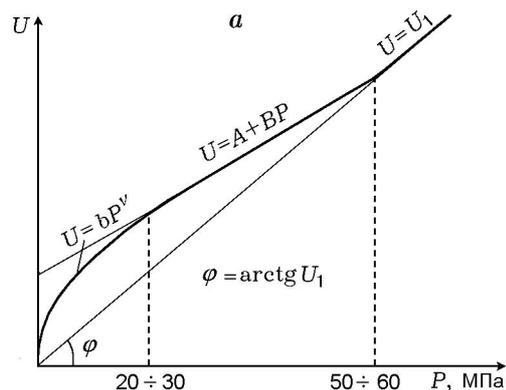


Рис. 1. Экспериментальные данные о зависимости скорости горения от давления:

*a* — для диапазона давлений от нуля до бесконечности (рисунок заимствован из работы [1]), *б* — окрестности точки перегиба на кривой  $U(P)$  (рисунок заимствован из работы [3]): кривые 1, 2 — для топлива, содержащего  $\beta$ -РbO в качестве катализатора, кривые 3, 4 — для топлива, содержащего  $\alpha$ -РbO в качестве катализатора

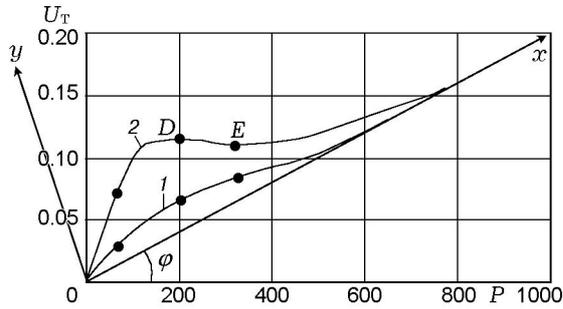


Рис. 2. Экспериментальные зависимости  $U_T(P)$ :

1 — монотонно нарастающая кривая, 2 — кривая с максимумом и минимумом

$$U_T = a_1 P^\nu.$$

В окрестности точки перегиба можно использовать прямую

$$U_T = a + bP.$$

Такой диапазон давлений реализуется и в артиллерийско-ракетных системах. Для ракетного диапазона давлений применяют также формулу Саммерфилда [4]:

$$\frac{1}{U_T} = \frac{a_S}{P} + \frac{b_S}{P^{1/3}},$$

где  $a_S, b_S$  — постоянные Саммерфилда.

Для артиллерийского диапазона давлений ( $P > 100$  МПа) используют одночленный закон скорости горения (1).

Для бесконечно большого диапазона давлений используют формулу Победоносцева [5]

$$U_T = U_1 P (1 + \Pi \exp(-KP)). \quad (2)$$

Она, как видим, при  $P = 0$  позволяет получить  $U_T = 0$ , а при  $P \rightarrow \infty$  имеет асимптотику (1). Цель данной работы — уточнить формулу (2).

Выполним поворот координат  $(U_T, P)$  на угол  $\varphi$ , тангенс которого равен  $U_1$ . Поскольку

$$\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{U_1}{\sqrt{1 + U_1^2}},$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + U_1^2}},$$

то

$$y = -P \sin \varphi + U_T \cos \varphi = \frac{-U_1 P + U_T}{\sqrt{1 + U_1^2}}, \quad (3)$$

$$x = P \cos \varphi + U_T \sin \varphi = \frac{P + U_1 U_T}{\sqrt{1 + U_1^2}}. \quad (4)$$

Рассмотрим зависимости  $U_T(P)$ , приведенные на рис. 2 (кривые 1 и 2), в координатах  $(x, y)$  (рис. 3). В этом случае обе кривые имеют только максимум: и та, у которой в координатах  $(P, U_T)$  максимум отсутствовал, и та, которая имела максимум и минимум. Вид зависимостей упростился и стал универсальным. Кривые  $y(x)$  асимметричны, справа от максимума присутствует по одной точке перегиба, слева точек перегиба нет. При  $x = 0, y = 0$ , при  $x \rightarrow \infty, y \rightarrow 0$ .

Для аппроксимации  $y(x)$  можно использовать различные варианты зависимостей. Воспользуемся зависимостью вида

$$y = a(1 - \exp(-mx)) \exp(-nx). \quad (5)$$

Здесь функция  $1 - \exp(-mx)$  аппроксимирует восходящую ветвь кривой  $y(x)$ , функция  $\exp(-nx)$  — нисходящую ветвь.

В формуле (2) присутствует только функция  $\exp(-KP)$ , соответствующая нисходящей ветви  $U_T(P)$ , а функция, соответствующая восходящей ветви, отсутствует.

Функция, определяемая формулой (5), при  $x = 0$  равна нулю, а при  $x \rightarrow \infty$  стремится к нулю. Данная функция имеет производную

$$\frac{dy}{dx} = a[(m + n) \exp(-mx) - n] \exp(-nx),$$

которая при  $x = 0$  равна  $am > 0$ . Ниже показано, что коэффициенты  $a, m$  и  $n$  положительные. С ростом  $x$  производная  $\frac{dy}{dx}$ , будучи положительной, убывает и при

$$(m + n) \exp(-mx_m) - n = 0 \quad (6)$$

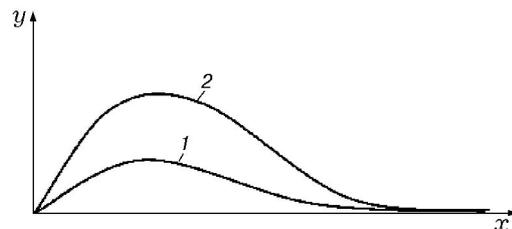


Рис. 3. Типичные кривые для скорости горения в координатах  $(x, y)$ :

1, 2 — кривые, соответствующие кривым 1 и 2 на рис. 2

становится равной нулю. В точке  $(x_m, y_m)$  достигается максимум.

Максимуму функции соответствует  $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ . Вторая производная для  $y(x)$  имеет вид

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a[n^2 - (m+n)^2 \exp(-mx)] \exp(-nx). \quad (7)$$

При  $x = 0$   $\frac{d^2y}{dx^2} = -a(m+2n)m < 0$ . При возрастании  $x$  производная  $\frac{d^2y}{dx^2}$  растет, оставаясь отрицательной в том числе при  $x = x_m$ . При  $x = x_m$  подставим в правую часть формулы (7) вместо  $n$  его выражение из (6). Получим

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x_m} = a(m+n)^2 \times \\ \times [\exp(-2mx_m) - \exp(-mx_m)] \exp(-nx_m) < 0,$$

поскольку  $(\exp(-2mx) - \exp(-mx)) < 0$ . Так что в интервале  $0 \leq x \leq x_m$  вторая производная только отрицательная. Это означает, что при  $x = x_m$  имеем максимум, а при  $x < x_m$  нет точек перегиба, так как вторая производная знака не меняет.

При  $x > x_m$  вторая производная становится равной нулю, когда

$$n^2 - (m+n)^2 \exp(-mx_n) = 0 \quad (8)$$

в точке  $x = x_n$  — точке перегиба. Подставим в равенство (8) вместо  $n$  его выражение из (6). Получим

$$x_n = 2x_m.$$

На отрезке  $[0, x_m]$  функция  $y$  изменяется от нуля до  $y_m$ . На таком же по протяженности участке при  $x > x_m$  функция  $y$  убывает от  $y_m$  до  $y_n > 0$ . Имеем

$$\frac{y_n}{y_m} = \frac{1 - \exp(-2mx_m)}{1 - \exp(-mx_m)} \exp(-nx_m) > 0.$$

При этом  $\frac{1 - \exp(-2mx_m)}{1 - \exp(-mx_m)} > 1$ , хотя  $\frac{y_n}{y_m} < 1$ . Это означает, что функция  $y(x)$  асимметричная с более протяженной правой (нисходящей) ветвью.

При  $x > x_n$  вторая производная становится положительной. Она достигает максимума в точке  $(x_*, y_*)$ , где ее первая производная равна

нулю. Фактически это третья производная для функции  $y(x)$ :

$$\frac{d^3y}{dx^3} = a[(m+n)^3 \exp(-mx) - n^3] \exp(-nx).$$

При  $x = x_*$

$$(m+n)^3 \exp(-mx_*) - n^3 = 0.$$

Подставим в последнее равенство вместо  $n$  его выражение из (6). Находим

$$x_* = 3x_m.$$

Тогда в точке  $(x_*, y_*)$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x_*} = a(m+n)^2 [\exp(-2mx_m) - \\ - \exp(-3mx_m)] \exp(-3nx_m) > 0,$$

поскольку  $[\exp(-2mx_m) - \exp(-3mx_m)] > 0$ . Все остальные множители тоже положительные. При  $x > x_*$  вторая производная убывает и вместе с  $y(x)$  и  $\frac{dy}{dx}$  при  $x \rightarrow \infty$  стремится к нулю.

Итак, функция (5) отвечает характеру изменения  $y(x)$ . Подставив в нее выражения (3), (4), получим

$$-U_1 P + U_T = \\ = a \sqrt{1 + U_1^2} \left[ 1 - \exp\left(-m \frac{P + U_1 U_T}{\sqrt{1 + U_1^2}}\right) \right] \times \\ \times \exp\left(-n \frac{P + U_1 U_T}{\sqrt{1 + U_1^2}}\right). \quad (9)$$

Теперь необходимо определить постоянные  $a$ ,  $m$  и  $n$ . Для этого на каждой кривой  $U_T(P)$  возьмем по три точки: первую примерно посередине между нулем и максимумом, вторую — в окрестности максимума, третью точку — в окрестности точки перегиба. Тогда с помощью уравнения (9) запишем:

$$\frac{-U_1 P_1 + U_{T1}}{\sqrt{1 + U_1^2}} = a \left[ 1 - \exp\left(-\frac{m Q_1}{\sqrt{1 + U_1^2}}\right) \right] \times \\ \times \exp\left(-\frac{n Q_1}{\sqrt{1 + U_1^2}}\right),$$

$$\begin{aligned} \frac{-U_1 P_2 + U_{T2}}{\sqrt{1 + U_1^2}} &= a \left[ 1 - \exp\left(-\frac{mQ_2}{\sqrt{1 + U_1^2}}\right) \right] \times \\ &\times \exp\left(-\frac{nQ_2}{\sqrt{1 + U_1^2}}\right), \\ \frac{-U_1 P_3 + U_{T3}}{\sqrt{1 + U_1^2}} &= a \left[ 1 - \exp\left(-\frac{mQ_3}{\sqrt{1 + U_1^2}}\right) \right] \times \\ &\times \exp\left(-\frac{nQ_3}{\sqrt{1 + U_1^2}}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $Q_\nu = P_\nu + U_1 U_{T\nu}$ ,  $\nu = 1, 2, 3$ . Разделив первое из уравнений (10) на второе, а второе — на третье, получаем

$$\begin{aligned} \frac{-U_1 P_1 + U_{T1}}{-U_1 P_2 + U_{T2}} &= \frac{\Phi_1(m)}{\Phi_2(m)} \exp\left(-n \frac{Q_1 - Q_2}{\sqrt{1 + U_1^2}}\right), \\ \frac{-U_1 P_2 + U_{T2}}{-U_1 P_3 + U_{T3}} &= \frac{\Phi_2(m)}{\Phi_3(m)} \exp\left(-n \frac{Q_2 - Q_3}{\sqrt{1 + U_1^2}}\right), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\Phi_\nu(m) = 1 - \exp\left(-\frac{mQ_\nu}{\sqrt{1 + U_1^2}}\right)$ ,  $\nu = 1, 2, 3$ .

Далее обозначим

$$F_{12} = \frac{-U_1 P_1 + U_{T1}}{-U_1 P_2 + U_{T2}}, \quad F_{23} = \frac{-U_1 P_2 + U_{T2}}{-U_1 P_3 + U_{T3}}$$

и прологарифмируем равенства (11). Тогда

$$\begin{aligned} \ln F_{12} &= \ln \frac{\Phi_1(m)}{\Phi_2(m)} - n \frac{Q_1 - Q_2}{\sqrt{1 + U_1^2}}, \\ \ln F_{23} &= \ln \frac{\Phi_2(m)}{\Phi_3(m)} - n \frac{Q_2 - Q_3}{\sqrt{1 + U_1^2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} (Q_2 - Q_3) \ln F_{12} - (Q_1 - Q_2) \ln F_{23} &= \\ &= (Q_2 - Q_3) \ln \frac{\Phi_1(m)}{\Phi_2(m)} - (Q_1 - Q_2) \ln \frac{\Phi_2(m)}{\Phi_3(m)}. \end{aligned}$$

Определив  $m$  из этого трансцендентного уравнения, находим коэффициент  $n$ . Затем находим коэффициент  $a$  с помощью, например, первого из уравнений (10).

Используя кривые 1 и 2 (см. рис. 2), получаем исходные данные (табл. 1). С их помощью рассчитываем коэффициенты  $a$ ,  $m$  и  $n$  (табл. 2). Как следует из результатов расчетов, все коэффициенты положительные, при этом коэффициенты  $m$  и  $n$  существенно меньше единицы. С учетом полученных значений коэффициентов  $m$  и  $n$ , а также коэффициента скорости горения  $U_1$  оценим некоторые параметры, входящие в формулу (9).

Поскольку  $U_1 = 0.0002$ , то ее квадрат на 8 порядков меньше единицы. Поэтому уравнение (9) запишем в виде

$$\begin{aligned} -U_1 P + U_T &= a [1 - \exp(-mP) \exp(-mU_1 U_T)] \times \\ &\times \exp(-nP) \exp(-nU_1 U_T). \end{aligned}$$

Здесь показатели экспонент  $\exp(-mU_1 U_T)$  и  $\exp(-nU_1 U_T)$  малы, не выше  $10^{-8}$ . Следовательно, можно принять  $\exp(-mU_1 U_T) = 1$  и  $\exp(-nU_1 U_T) = 1$ . Тогда из уравнения (9) получаем явное выражение для линейной скорости горения твердого топлива как функции давления:

$$U_T = U_1 P + a [1 - \exp(-mP)] \exp(-nP). \quad (13)$$

С использованием формулы (13) и входящих в нее параметров  $U_1$ ,  $a$ ,  $m$ , и  $n$  были рассчитаны скорости горения в зависимости от давления. Результаты расчетов приведены в виде точек на кривых 1 и 2 на рис. 2 и в табл. 3. Полученные значения параметров  $a$ ,  $m$  и  $n$  позволяют с хорошей точностью находить скорость горения как в опорных точках

Таблица 1  
Давления и скорости горения, использованные при определении постоянных  $a$ ,  $m$  и  $n$

Номер кривой	$P_1/U_{T1}$	$P_2/U_{T2}$	$P_3/U_{T3}$
1	50/0.0255	200/0.064	320/0.082
2	50/0.0680	200/0.114	320/0.112

Таблица 2  
Параметры  $a$ ,  $m$  и  $n$

Номер кривой	$a$	$m$	$n$
1	0.39295	0.001083	0.005798
2	0.58488	0.002913	0.0062494

Таблица 3  
Скорости горения, полученные по формуле (13)

$P$	$U_T$
0	0/0
20	0.011500/0.033212
50	0.025500/0.06800
100	0.042587/0.099117
150	0.054694/0.11109
200	0.06400/0.11400

Примечание. Значения перед косой чертой соответствуют кривой 1, после косой черты — кривой 2 (см. рис. 2).

при давлениях 50, 200, 320, так и при других давлениях.

Согласно формуле (13)  $U_T = 0$  при  $P = 0$ ,  $U_T = U_1 P$  при  $P \rightarrow \infty$ .

Аналитически выражение (13) отличается от формулы (5) только слагаемым  $U_1 P$ . Это слагаемое обеспечивает достижение асимптотики и наклон кривой  $U_T(P)$  при  $P \rightarrow \infty$ . Вторая и производные более высоких порядков для  $y(x)$  (формула (5)) и для  $U_T(P)$  совпадают. Поэтому анализ экстремумов формулы (13) может быть выполнен аналогично тому, как это было сделано для формулы (5).

Рассчитаем такой популярный во внутренней баллистике параметр, как показатель степени  $\nu$  в законе скорости горения топлива как функции давления. Величина  $\nu$  определяется выражением [5]

$$\nu = \frac{P}{U_T} \frac{\partial U_T}{\partial P}.$$

С помощью формулы (13) можно рассчитать  $\nu$  как функцию давления. Результаты расчетов, соответствующие кривой 1 на рис. 2, приведены на рис. 4.

Параметр  $\nu$  в интервале давления  $0 \div 200$  изменяется от единицы до 0.526 или уменьшается почти в два раза. Для более узкого

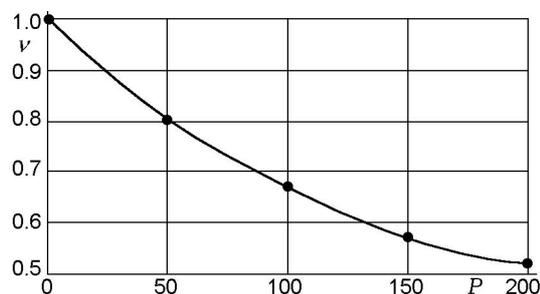


Рис. 4. Изменение показателя степени  $\nu$  как функции давления для кривой 1 на рис. 2

интервала давления, например  $50 \div 150$ ,  $\nu = 0.80 \div 0.57$ .

Возьмем в качестве опорного значения  $\nu = 0.664$  при  $P = 100$ . В интервале давлений  $50.0 \div 100 \delta\nu = 0.143$  (или 21.5 %), в интервале  $100 \div 150 \delta\nu = 0.0926$  (или 13.9 %). Как в одну, так и в другую сторону показатель  $\nu$  изменяется значительно. Поскольку разбросы давления пропорциональны  $1/(1 - \nu)$  [5], ясно, что такие отклонения  $\nu$  негативно отразятся на величине разбросов давления, если в зависимости от давления не учитывать переменность  $\nu$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Абугов Д. И., Бобылев В. М. Теория и расчет ракетных двигателей твердого топлива. — М.: Машиностроение, 1987.
2. Ассовский И. Г. Физика горения и внутренняя баллистика. — М.: Наука, 2005.
3. Жегров Е. Ф., Милехин Ю. М., Берковская Е. В. Химия и технология баллиститных порохов, твердых топлив. Т. I: Химия. — М.: РИЦ МГУП им. И. Федорова, 2011.
4. Внутренняя баллистика РДТТ / под ред. А. М. Липанова, Ю. М. Милехина. — М.: Машиностроение, 2007.
5. Соркин Р. Е. Теория внутрикамерных процессов в ракетных системах на твердом топливе. — М.: Наука, 1983.

Поступила в редакцию 6/VI 2012 г.