

**РАСЧЕТ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕПЛОТДАЧИ
ПРИ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ В ЗАМКНУТЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ
СОСУДАХ**

Ю. А. Кириченко, А. А. Моторная, П. С. Черняков

(Харьков)

Описывается приближенный способ расчета интегральных коэффициентов теплоотдачи при свободной конвекции, основанный на некоторых предположениях, оправданных экспериментальными результатами [1].

Анализ уравнений свободной конвекции проводится в безразмерном виде.

1. Пусть осесимметричный сосуд заполнен несжимаемой вязкой жидкостью, имеющей начальную температуру T_0 , и для $t > 0$ на поверхности сосуда задана плотность теплового потока q . Процесс свободной конвекции описывается следующей системой уравнений [2]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \text{grad}) \mathbf{v} = -\text{grad } p + P \Delta \mathbf{v} - GP^2 (T - \langle T \rangle) \mathbf{i} \quad (1.1)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v}, \text{grad}) T = \Delta T$$

и начальными и граничными условиями на S

$$\mathbf{v}|_{t=0} = 0, \quad \mathbf{v}|_{x \in S} = 0, \quad T|_{t=0} = T_0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{x \in S} = q$$

$$T = \frac{T_1 \lambda}{q_m l_0}, \quad T_0 = \frac{T_{10} \lambda}{q_m l_0}, \quad q = \frac{q_1}{q_m}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} l_0}{a}$$

$$t = \frac{at_1}{l_0^2}, \quad p = \frac{p_1 l_0^2}{\rho a^2}, \quad G = \frac{g \beta q_m l_0^4}{\lambda \nu a}, \quad P = \frac{\nu}{a}$$

Здесь T — безразмерная температура, T_1 — температура жидкости, λ — коэффициент теплопроводности жидкости, q_m — максимальное значение плотности q_1 , l_0 — характерный линейный размер, T_0 — безразмерная начальная температура жидкости, T_{10} — начальная температура жидкости, $\langle T \rangle$ — безразмерная среднеобъемная температура, \mathbf{v} — безразмерная скорость жидкости, t — безразмерное время, t_1 — время, a — коэффициент температуропроводности жидкости, p — безразмерное давление, p_1 — давление, ρ — плотность жидкости, \mathbf{i} — орт, направленный вдоль ускорения земного тяготения, G — число Грасгофа, ν — коэффициент кинематической вязкости, β — коэффициент объемного расширения, g — ускорение земного тяготения, P — число Прандтля, \mathbf{n} — нормаль к поверхности S , ограничивающей область Ω .

Записав уравнение баланса тепла и проинтегрировав его при начальном условии $\langle T \rangle|_{t=0} = T_0$, получим

$$\langle T \rangle = T_0 + \frac{Qt}{V}, \quad Q = \int_S q dS, \quad V = \frac{V_1}{l_0^3} \quad (1.2)$$

Здесь V_1 — объем области, занятой жидкостью.

Предположим, что выполняются условия:

- 1) течение жидкости ламинарное, квазистационарное, осесимметричное или плоское;
- 2) число Грасгофа значительно больше единицы и число Прандтля порядка единицы;
- 3) всю область, занимаемую жидкостью, можно разбить на тепловой пограничный слой толщиной δ , динамический пограничный слой и ядро жидкости;
- 4) течение жидкости в ядре идеальное;
- 5) температура ядра равна среднеобъемной температуре $\langle T \rangle$;
- 6) толщина теплового пограничного слоя равна толщине динамического пограничного слоя;
- 7) толщина теплового пограничного слоя — постоянная величина [4];
- 8) теплофизические свойства не зависят от температуры.

Остановимся на обосновании предположений 1) — 8). Предположение 2) не ограничивает существенно задачи, так как для целого ряда сред (например, криогенных жидкостей — жидкие кислород, азот, водород и др., — спиртов, воды) число Прандтля имеет порядок единицы, а условие $G \gg 1$ соответствует развитой конвекции. Предположение 6) является следствием предположения 2): при $P \sim 1$ тепловой и динамические пограничные слои совпадают [3]. Предположения 5), 7) и частично 1) соответст-

вуют экспериментальным результатам работы [1], в которой было показано, что при $t \sim 10^{-3}$ конвективное течение выходит на квазистационарный режим и для большей части объема толщина теплового пограничного слоя постоянна, а температура ядра жидкости незначительно отличается от среднеобъемной. Теоретическая модель, таким образом, представляет собой некоторую идеализацию экспериментальных результатов

Ищем поле температур T и скоростей v в следующем виде:

$$T = \langle T \rangle + \tau(x, y), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y) \quad (1.3)$$

Подставив (1.3) в (1.1) и (1.2) и воспользовавшись предположениями теории пограничного слоя [3], получим

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = P \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + GP^2 \tau \Phi(x) \quad (1.4)$$

$$u \frac{\partial \tau}{\partial x} + v \frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} - \gamma \left(\gamma = \frac{Q}{V} \right) \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (u R_0(x)) + R_0(x) \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.6)$$

$$x = \frac{x_1}{l_0}, \quad y = \frac{y_1}{l_0}, \quad u = v_{x1}, \quad v = v_{y1}, \quad \Phi = i_x$$

Здесь x_1, y_1 — система координат, связанная с поверхностью S ; начало координат — точка пересечения оси симметрии с нижней частью поверхности сосуда; $R_0(x)$ — радиус кривизны поперечного сечения сосуда.

Граничные условия для системы (1.4) — (1.6)

$$u|_{y=0} = 0, \quad v|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=\delta} = f, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=\delta} = 0 \quad (\delta = \frac{h}{l_0}) \quad (1.7)$$

$$\tau|_{y=\delta} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial y}|_{y=0} = -q(x), \quad \frac{\partial \tau}{\partial y}|_{y=\delta} = 0 \quad (f = \frac{f_1 l_0}{a})$$

При этом предполагается, что происходит перенос тепла от стенки сосуда в пограничный слой и затем перенос массы и тепла из пограничного слоя в ядро.

Здесь h — толщина теплового пограничного слоя, f_1 — значение продольной компоненты скорости ядра на границе пограничного слоя (при $y = \delta$).

Для решения краевой задачи (1.4) — (1.7) применим метод интегральных соотношений [3]. Ищем профиль температуры в следующем виде:

$$\tau = \tau_0 + \tau_1 \frac{y}{\delta} + \tau_2 \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 + \tau_3 \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 + \tau_4 \left(\frac{y}{\delta} \right)^4 \quad (1.8)$$

Коэффициенты $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ находим из условий

$$\tau|_{y=\delta} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial y}|_{y=\delta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2}|_{y=\delta} = \gamma \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial y}|_{y=0} = -q, \quad \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2}|_{y=0} = \gamma$$

Подставив (1.8) в (1.9), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \tau_0 + \tau_1 + \tau_3 + \tau_4 &= 0, \quad \tau_2 = 0.5\gamma\delta^2 \\ \tau_1 + 2\tau_2 + 3\tau_3 + 4\tau_4 &= 0, \quad 2\tau_2 + 6\tau_3 + 12\tau_4 = \gamma\delta^2 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Решая систему уравнений (1.10), получаем

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 0.5\delta q, \quad \tau_1 = -q\delta, \quad \tau_2 = 0.5\gamma\delta^2 \\ \tau_3 &= \delta(q - \gamma\delta), \quad \tau_4 = 0.5\delta(\gamma\delta - q) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Профиль продольной компоненты u ищем в виде

$$u = A_0 \frac{y}{\delta} + f_1 \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 + A_2 \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \quad (1.12)$$

Коэффициенты A_0, f_1, A_2 находим из следующих условий:

$$u|_{y=\delta} = f, \quad u|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=\delta} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}|_{y=0} = -\frac{GP\Phi q\delta}{2} \quad (1.13)$$

Подставив (1.12) в (1.13) и решая полученную систему уравнений, получим

$$A_0 = 3/2f - 1/2f_1, \quad f_1 = -1/4GP\delta^3q\Phi, \quad A_2 = -1/2(f + f_1)$$

$$u = \frac{1}{2} \left[f \left(\frac{3y}{\delta} - \frac{y^3}{\delta^3} \right) + f_1 \left(\frac{2y^2}{\delta^2} - \frac{y^3}{\delta^3} - \frac{y}{\delta} \right) \right] \quad (1.14)$$

Проинтегрировав (1.4) и (1.5), воспользовавшись (1.6) и (1.7), получим соответственно

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta u^2 R_0(x) dy - f \frac{d}{dx} \int_0^\delta u R_0(x) dy = -P R_0(x) \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} + GP^2 \Phi R_0(x) \int_0^\delta \tau dy \quad (1.15)$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta u \tau R_0(x) dy = q(x) (1 - \gamma \delta) R_0(x)$$

Подставив (1.8), (1.11), (1.14) в (1.15) и проинтегрировав полученные уравнения по x , получим систему двух алгебраических уравнений для δ и f .

Безразмерный интегральный коэффициент теплоотдачи N вычисляется по формуле

$$N = \frac{\alpha l}{q_m l_0} = \frac{2}{\delta}$$

Здесь α — интегральный коэффициент теплоотдачи.

Рассмотрим частные случаи данной общей задачи.

2. Рассмотрим свободную конвекцию в торе, на поверхности которого задана постоянная плотность теплового потока (фигура). В этом случае

$$R_0(x) = l + \sqrt{l^2 + \sin^2 x}, \quad \Phi(x) = \sin x, \quad q(x) = 1, \quad \gamma = 2$$

При этом уравнение для δ принимает вид

$$-39/70 k_0 F_1^2 + F_1 F_2 (6Pk_4 - Ra\delta^5 k_9) + F_2^2 \delta^2 (k_{10} Ra^2 \delta^8 - k_{11} R_n P \delta^3 + 2k_3 Ra P \delta^4) = 0 \quad (2.1)$$

$$F_1 = 2k_4 - 4k_4 \delta - Ra\delta^5 k_7 - Ra\delta^6 k_8$$

$$F_2 = s_0 k_6 + 2s_1 \delta k_0, \quad k_a = \sqrt{l^2 + 1} - l$$

$$k_1 = \sqrt{l^2 + 1} + 2l^3 - 2/3 (l^2 + 1)^{1/2}$$

$$k_2 = 0.5 \sqrt{l^2 + 1} - 0.5 l^2 \ln [(1 + \sqrt{l^2 + 1})/l]$$

$$k_3 = 1.5l + 0.5 (1 + l^2) \arcsin (l^2 + 1)^{-1/2}$$

$$k_4 = 1/2 l \pi + l^{-1} \sqrt{l^2 + 1} E ((l^2 + 1)^{-1/2})$$

$$k_5 = 1/3 (l^2 + 1)^{3/2} + 1/2 l - 1/3 l^3$$

$$k_6 = 1/2 \sqrt{l^2 + 1} + l + 0.5 l^2 \ln [(1 + \sqrt{l^2 + 1})/l]$$

$$k_7 = 0.25 s_2 (k_2 + k_6), \quad k_8 = 2s_3 (k_2 + k_6)$$

$$s_0 = -1.15535715, \quad s_1 = 0.02202381, \quad s_2 = 0.0684525, \quad s_3 = -0.17857 \cdot 10^{-2}$$

Здесь $E(z)$ — эллиптический интеграл первого рода, R_a — число Рэлея.

Значение продольной компоненты скорости ядра на границе пограничного слоя вычисляется по формуле

$$f = \frac{F_1}{F_2}$$

Решение уравнения (2.1) на ЭЦВМ М-20 по методу Мюллера [4] для $R_a = 10^7 \div 10^{11}$ дало восемь комплексных и четыре вещественных корня, из которых один положительный и меньше единицы. Этот корень был взят в качестве толщины теплового пограничного слоя. Анализ результатов показал, что δ и N не зависят от числа Прандтля. После

обработки результатов вычислений получены формулы

$$N = (0.661 + 0.0357l) (Ra)^{0.196}$$

$$\delta = \frac{2}{0.661 + 0.0357l} (Ra)^{-0.196} \quad (2.2)$$

Здесь $Ra = GP$.

В качестве определяющего размера в формуле (2.2) взят радиус тора. Максимальная погрешность вычисления N по формуле (2.2) составляет 8%.

3. Аналогично п. 2 была рассмотрена задача о свободной конвекции в шаре, на поверхности которого задана постоянная плотность теплового потока. В результате вычислений, аналогичных проведенных в п. 2, в диапазоне чисел Рэлея $10^7 \leq Ra \leq 10^{11}$ были получены следующие формулы:

$$N = 1.044 (Ra)^{0.193} \quad \delta = 1.92 (Ra)^{-0.193} \quad (3.1)$$

В качестве определяющего размера в формуле (3.1) взят радиус шара. Приводим значения продольной компоненты скорости ядра f на границе пограничного слоя

$GP =$	10^7	10^8	10^9	10^{11}
$f =$	324.5	855.1	2176	13360

Значения числа Нуссельта, вычисленные по формуле (3.1) для значений $GP = 10^9, 10^{11}$, соответственно будут $N = 57.5, 140$; по экспериментальным данным работы [1] они соответственно равны $N = 54, 123$.

Это позволяет рекомендовать формулу (3.1) для вычисления интегрального коэффициента теплоотдачи при свободной конвекции в шаре для диапазона чисел Рэлея $10^7 \leq Ra \leq 10^{11}$.

4. Аналогично п. 2 рассмотрена задача о свободной конвекции в бесконечном горизонтальном цилиндре, на поверхности которого задана постоянная плотность теплового потока. Аналогично для $Ra = 10^7 \div 10^{11}$ были получены следующие формулы:

$$N = 0.711 (Ra)^{0.1943}, \quad \delta = 2.81 (Ra)^{-0.1943} \quad (4.1)$$

За определяющий размер в формулах (4.1) взят радиус цилиндра.

Удовлетворительное совпадение результатов теории и эксперимента для одного из рассмотренных случаев (шара) свидетельствует в пользу правдоподобности использованной модели и позволяет рекомендовать предложенную методику расчета в диапазоне $Ra = 10^7 \div 10^{11}$ для вычисления интегральных коэффициентов теплоотдачи и распределения температур в пограничном слое при свободной конвекции в осесимметричных сосудах.

Поступила 28 IV 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. К и р и ч е н к о Ю. А., Щ е л к у н о в В. Н., Теплообмен при свободной конвекции в шаровом объеме. ПМТФ, 1968, № 5.
2. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
3. К у т а т е л а д з е С. С. Основы теории теплообмена, М.—Л., Машгиз, 1957.
4. Б е р е з и н И. С., Ж и д к о в Н. П. Методы вычислений, т. 2. М., Физматгиз, 1952.

ЧАСТОТА ОБРАЗОВАНИЯ ПАРОВЫХ ПУЗЫРЕЙ ПРИ КИПЕНИИ

В. Ф. Присняков

(Днепропетровск)

Получено выражение, определяющее частоту образования паровых пузырей, из которого как частные случаи следуют известные эмпирические зависимости. Теоретические результаты удовлетворительно согласуются с опытными данными.

Общего решения поставленной задачи пока не имеется [1,2]. Экспериментальным исследованиям посвящены работы [3-10], обзор работ, посвященных определению частоты образования паровых пузырей f при кипении, можно найти в [1,2,11,12].

Большая часть исследователей при определении частоты образования пузырей f искала ее связь с отрывным диаметром D в следующем виде:

$$fD = C$$

причем во многих случаях величина C считалась константой. Так, согласно [13] $C =$