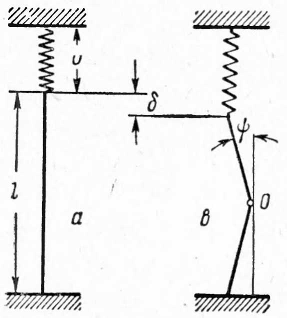
ОБ ОДНОМ ВОЗМОЖНОМ СЛУЧАЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ИЗГИБА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПОЛОСЫ

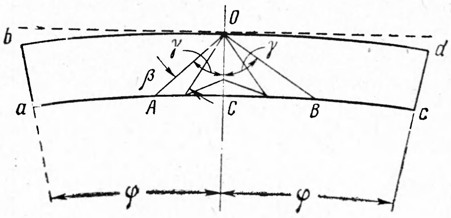
Б. Д. Аннин, Ю. М. Волчков *(Новосибирск)*

Рассматривается одна из возможных схем потери устойчивости плоской формы изгиба полосы, предложенная Ю. Н. Работновым.

1. Постановку задачи можно проиллюстрировать на следующей механической модели. Рассмотрим систему, состоящую из упругой пружины и стержня длиной l. Будем увеличивать поджатие пружины. При некотором определенном значении иоджатия пружины накопленной упругой энергией сжатия оказывается достаточно, чтобы перевести стержень в некоторое соседнее положение с образованием пластического шарнира в центре (фиг. 1).



Фиг. 1



Фиг. 2

При этом нижний конец пружины опускается на величину δ. В результате освобождается часть упругой энергии сжатия пружины, которая должна быть равна работе, произведенной моментом в пластическом шарнире O. Если u — поджатие пружины в момент потери устойчивости, то освободившаяся упругая энергия равна

$$U = c\left(u\delta - \frac{\delta^2}{2}\right) \qquad (c \text{ — жесткость пружины}) \tag{1.1}$$

Работа, произведенная в пластическом шарнире O, подсчитывается по формуле

$$A = 2m\psi = 2m \arccos\left(1 - \frac{\delta}{l}\right) \tag{1.2}$$

Используя равенство $U = A$, получим уравнение

$$c\left(u\delta - \frac{\delta^2}{2}\right) = 2m \arccos\left(1 - \frac{\delta}{l}\right) \tag{1.3}$$

Считая величину δ / l малой, представим арккосинус в виде ряда, в котором сохраним только первый член. Тогда уравнение (1.3) примет следующий вид:

$$2\frac{u}{l}\frac{\delta}{l} - \left(\frac{\delta}{l}\right)^2 = \frac{4\sqrt{2m}}{cl^2}\sqrt{\frac{\delta}{l}} \tag{1.4}$$

Это уравнение можно представить в виде

$$2\varphi z - z^3 = B_1 \qquad \left(z = \sqrt{\frac{\delta}{l}},\ \varphi = \frac{u}{l},\ B_1 = \frac{4\sqrt{2}}{cl^2}\, m\right) \tag{1.5}$$

Уравнение (1.5) имеет положительный корень при

$$\varphi \geqslant \frac{3}{4}\, 2^{-\frac{1}{3}} B_1^{\frac{2}{3}} \tag{1.6}$$

Величину поджатия пружины, определяемую равенством

$$u_* = \varphi_* l = \frac{3}{2}\, 0.75^{-\frac{1}{3}}\, l^{-\frac{1}{3}}\, c^{-\frac{2}{3}}\, m^{\frac{2}{3}} \tag{1.7}$$

назовем критической. В этой формуле φ_* определяется знаком равенства в условии (1.6). При величине поджатия u_* возможен переход системы (фиг. 1) из положения a в положение b.

2. Рассмотрим полосу, находящуюся под действием изгибающего момента (фиг 2). Роль упругой энергии сжатия пружины будет выполнять упругая энергия изгиба полосы. При достижении вполне определенного значения угла φ упругой энергии изгиба, накопленной в полосе, оказывается достаточным для того, чтобы перевести полосу в некоторое соседнее положение, в котором форма ее отличается от плоской. Вдоль линий OA, OC и OB образуются пластические шарниры, вокруг которых происходит поворот треугольников OAC и OCB. В момент потери устойчивости линии OA и OB

поворачиваются на угол β, а точка C приподнимается вверх. Концы полосы ab и cd в момент потери устойчивости остаются неподвижными. При переходе полосы в это положение освобождается часть упругой энергии изгиба, которая должна быть равна работе, произведенной моментом в шарнирах OA, OC и OB и вследствие поворота треугольников. Упругая энергия изгиба до потери устойчивости равна

$$U_0 = 2c\varphi^2 \tag{2.1}$$

Упругая энергия изгиба в послекритическом положении равна

$$U_1 = 2c(\varphi - \beta)^2 \tag{2.2}$$

Следовательно, энергия, освобожденная в результате потери устойчивости,

$$U = U_0 - U_1 = 2c(2\varphi\beta - \beta)^2 \qquad \left(c = \frac{EI_x}{l}\right) \tag{2.3}$$

Работа, затраченная на поворот треугольников вокруг пластических шарниров:

$$A = 2mh\left[\arccos\frac{\operatorname{tg}(\gamma-\beta)}{\operatorname{tg}\gamma} + \frac{1}{\cos\gamma}\arccos\frac{\sin(\gamma-\beta)}{\sin\gamma}\right] \tag{2.4}$$

Используя равенство $U = A$, разлагая выражение для арккосинусов в ряд и удерживая в разложении только первые члены ввиду малости угла β, получим

$$2z\varphi - z^3 = \frac{4mh}{c\sqrt{\sin 2\gamma}} \quad (z = \sqrt{\beta}) \tag{2.5}$$

Уравнение (2.5) отличается от (1.5) тем, что в правой части стоит величина, зависящая от параметра γ. Уравнение (2.5) имеет положительный корень при

$$\varphi \geqslant 3\cdot 2^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{mh}{c\sqrt{\sin 2\gamma}}\right)^{\frac{2}{3}} \tag{2.6}$$

Минимальное значение угла φ, определяемое знаком равенства в условии (2.6), будет достигаться при $\gamma = \pi/4$. Это значение угла φ назовем критическим

$$\varphi_* = 3\cdot 2^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{mh}{c}\right)^{\frac{2}{3}} \quad \left(\beta_* = \frac{2}{3}\varphi_*\right) \tag{2.7}$$

Критическое значение для изгибающего момента M найдем по формуле

$$M_* = c\varphi_* = 3\cdot 2^{-\frac{1}{3}}(mh)^{\frac{2}{3}}c^{\frac{1}{3}} \tag{2.8}$$

Для полосы прямоугольного сечения имеем ($\sigma_т$ — предел текучести)

$$mh = \frac{hb^2}{4}\sigma_т, \qquad I_x = \frac{bh^3}{12} \tag{2.9}$$

Подставляя выражения для mh и c в формулу (2.8), получим

$$M_* = 0.41\,\frac{(hb)^{\frac{5}{3}}}{l^{1/3}}E^{\frac{1}{3}}\sigma_т^{\frac{2}{3}} \tag{2.10}$$

Сравним полученное значение для M_* с величиной критического момента в случае упругой потери устойчивости плоской формы изгиба полосы с защемленными концами. По известной формуле имеем

$$M_*^e = \frac{2\pi\sqrt{B_1C_1}}{l} \tag{2.11}$$

где B_1 — наименьшая жесткость при изгибе, а C_1 — жесткость при кручении. Если $10\,b \leqslant h$ и $\nu = 0.3$, то выражение (2.11) можно представить в виде

$$M_*^e = 0.65\,\frac{b^3h}{l}\,E \tag{2.12}$$

Составим соотношение

$$\frac{M_*}{M_*^e} = 0.63\left(\frac{hl}{b^2}\,\frac{\sigma_т}{E}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Отсюда

$$M_* < M_*^e \quad \text{при} \quad \frac{hl}{b^2} < 2\,\frac{E}{\sigma_т}$$

Поступила 6 I 1962