

**ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ  
В НАЧАЛЬНОМ УЧАСТКЕ ТРУБЫ С ШЕРОХОВАТЫМИ  
СТЕНКАМИ**

*В. В. Кузьмин, А. А. Тупиченков, А. В. Фафурин*

(Казань)

Исследовано развитие турбулентного пограничного слоя в начальном участке трубы с шероховатыми стенками в рамках теории пограничного слоя. Показано, что учет шероховатости можно проводить вводя в «стандартный» закон трения функцию, учитывающую этот фактор. Экспериментальное исследование проведено на опытной установке трубы с естественной шероховатостью, относительная величина которой равна  $10^{-3}$ . Диапазон чисел Рейнольдса  $5.1 \cdot 10^4 - 3.4 \cdot 10^5$ .

Предложенный метод расчета приводит к результатам удовлетворительно согласующимся с данными экспериментального исследования.

Для рассматриваемой задачи систему уравнений представим в виде [1]

$$\frac{dR^{**}}{dX} + (1 + H) \frac{R^{**}}{W_0} \frac{dW_0}{dX} = R \frac{c_f}{2}, \quad 4HR^{**} = R - R_1 \quad (1)$$

Здесь и далее обозначения общепринятые [1].

Для определения трения воспользуемся соотношением [1]

$$\frac{c_f}{2} = \left[ \int_{\omega_1}^1 \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0} \frac{\tau_0}{\tau} \frac{\tau_w}{\tau_{0w}}} d\omega \right]^2 \left[ \int_{\xi_1}^1 \frac{d\xi}{\kappa\xi} \right]^{-2} \quad (2)$$

При изотермическом течении несжимаемой жидкости, интегрирование (2) приводит к следующему результату:

$$\frac{c_f}{2} = \left( \frac{1 - \omega_1}{\kappa^{-1} \ln \xi_1} \right)^2 \quad (3)$$

Скорость на границе ламинарного подслоя в общем случае может быть выражена соотношением [2]

$$\omega_1 = \eta_1 \sqrt{c_f / 2} \quad (4)$$

где коэффициент пропорциональности  $\eta_1$  при прочих равных условиях является функцией состояния поверхности. Отсутствие экспериментальных данных по трению при турбулентном движении жидкости в начальном участке трубы не позволяет точно определить его величину. Однако если положить, что влияние состояния поверхности как в области стабилизированного течения, так и на участке гидродинамической стабилизации однозначно, то  $\eta_1$  можно найти следующим способом.

Коэффициент сопротивления при движении жидкости на основном участке трубы определяется соотношением [3]

$$-\frac{dp}{dX} = \lambda \frac{\rho w_0^2}{2} \quad (5)$$

Выражение (5) записано в предположении, что профиль скоростей на входе равномерный.

С другой стороны, из условия равновесия элементарного объема жидкости имеем

$$-\frac{dp}{dX} = 4\tau_w, \quad \tau_w = \frac{c_f}{2} \rho_0 w_0^2 \quad (6)$$

Решая совместно (4), (6), получаем связь между коэффициентами трения и сопротивления на участке стабилизированного течения

$$\lambda = 8 \frac{c_f}{2} \left( \frac{w_{0X}}{w_{01}} \right)^2 \quad (7)$$

Второе уравнение (1) удобно представить в виде

$$\frac{w_0}{w_{01}} = \left( 1 - 2 \frac{\delta^*}{r_0} \right)^{-1} \quad (8)$$

Входящая в (8) толщина вытеснения в общем случае выражается соотношением

$$\delta^* = \int_0^{\delta} (1 - \omega) \left( 1 - \frac{y}{r_0} \right) dy, \quad \omega = 1 + \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{c_f}{2}} \ln \zeta \quad (9)$$

Интегрируя (9), имеем

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{c_f}{2}} \left( 1 - \frac{1}{4} \frac{\delta}{r_0} \right) \quad (10)$$

Решая совместно (7), (8) и (10), находим

$$\frac{c_f}{2} = \left( \frac{3}{2\kappa} + \sqrt{\frac{8}{\lambda}} \right)^{-2}, \quad \frac{w_{0X}}{w_{01}} = \sqrt{\frac{\lambda}{4c_f}}, \quad R_X = R_1 W_{0X} \quad (11)$$

В работе [2] показано, что толщина ламинарного подслоя может быть выражена соотношением

$$\zeta_1 = \eta_1 \left( \frac{R}{2} \frac{\delta}{r_0} \right)^{-1} \left( \frac{c_f}{2} \right)^{-1/2} \quad (12)$$

Подставляя (4) и (12) в (3), получаем

$$\eta_1 \kappa - \ln \eta_1 = \frac{\kappa}{\sqrt{c_f/2}} - \ln \left( \sqrt{\frac{c_f}{2}} \frac{R_1}{2} \right) \quad (13)$$

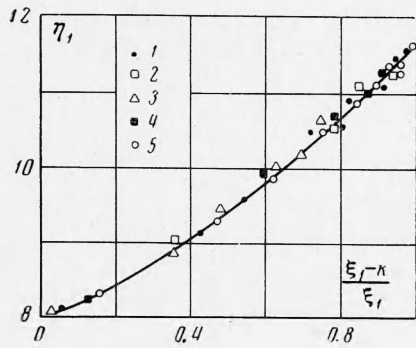
Используя экспериментальную зависимость  $\lambda$  от  $R_1$  и положив  $\delta = r_0$ , можно найти величину  $\eta_1$ .

На фиг. 1 точками представлены результаты обработки опытных данных работы [4], полученные для различных значений величины относительной шероховатости  $k_a/r_0$ : 1 — 0, 0.125, 2 — 0.004, 3 — 0.0166, 4 — 0.008, 5 — 0.001. Точки располагаются вдоль кривой, уравнение которой описывается зависимостью

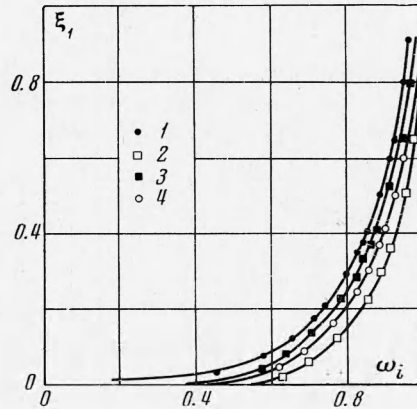
$$\eta_1 = 8 + 3.6 \left( \frac{\zeta_1 - K}{\zeta_1} \right)^{1/3}, \quad \zeta_1 - K \geq 0, \quad K = \frac{k_a}{5} \quad (14)$$

Система уравнений (3), (4), (12), (14) полностью определяет величину коэффициента трения как функцию числа Рейнольдса.

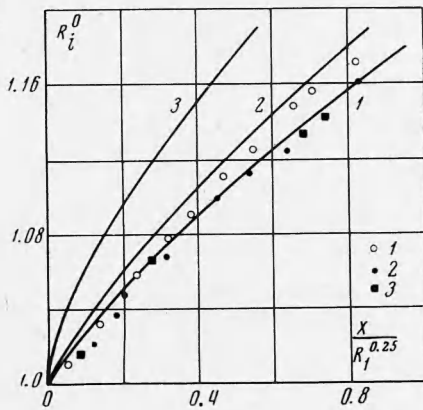
На фиг. 2 сплошными линиями приведены результаты расчета профиля скорости по формулам (3) и (9) для  $k_a/r_0$ : 1 — 0.0333, 2 — 0, 3 — 0.00795, 4 — 0.0198. Здесь же точками для тех же значений  $k_a/r_0$  нанесены опытные данные работы [3].



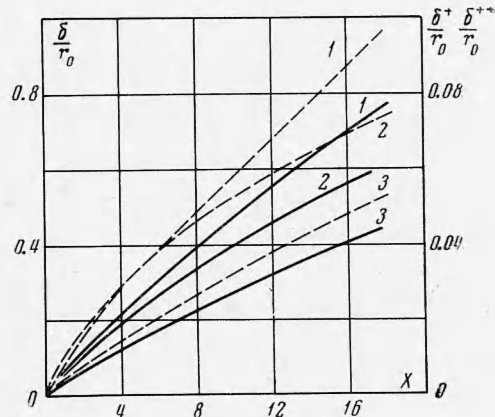
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Как эксперимент, так и расчет указывают на выполаживание профиля скорости в турбулентном ядре пограничного слоя с ростом относительной шероховатости.

Подставляя  $\omega$  из (9) в выражение для толщины потери импульса

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta} \omega(1 - \omega) \left(1 - \frac{y}{r_0}\right) dy \quad (15)$$

получаем

$$\frac{\delta^{**}}{\delta} = \frac{\delta^*}{\delta} - \frac{c_f}{\kappa^2} \left(1 - \frac{1}{8} \frac{\delta}{r_0}\right) \quad (16)$$

Разделив (16) на (10), для формпараметра  $H$  находим

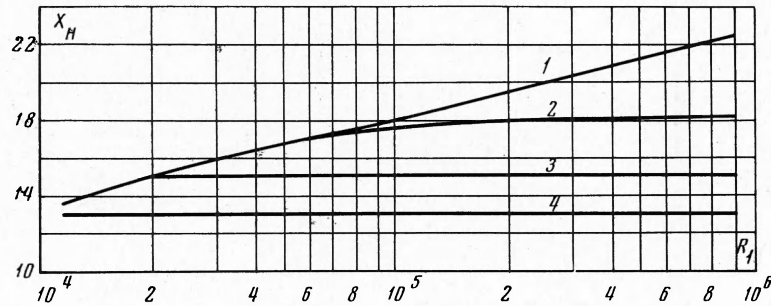
$$H = \left[1 - \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{c_f}{2}} \left\{1 + 2 \left(1 + \sqrt{1 - 2\kappa \sqrt{\frac{2}{c_f} \frac{R - R_1}{4R}}}\right)^{-1}\right\}\right]^{-1} \quad (17)$$

Анализ (9), (10), (16) и (17) показывает, что все интегральные характеристики являются функцией толщины пограничного слоя.

Вводя критерий Рейнольдса в (10) и разрешая последнее относительно  $\delta / r_0$  с учетом (1), имеем

$$\delta / r_0 = 2 \left( 1 - \sqrt{1 - 2\kappa \sqrt{2/c_f} \frac{R - R_1}{4R}} \right) \quad (18)$$

Таким образом, система (1), (3), (4), (12), (14), (18) полностью определяет развитие динамического пограничного слоя в начальном участке трубы с шероховатыми стенками.



Фиг. 5

Для ее решения уравнение (1) приведем к виду

$$\frac{dR}{dX} - 4RH \frac{c_f}{2} \left[ 1 - a \frac{R - R_1}{H} + (1 + H) \frac{R - R_1}{H} \right]^{-1} \quad (19)$$

Уравнение (19) было решено методом Рунге — Кутты на ЭВМ. При этом коэффициент  $a$  вычислялся из (17).

На фиг. 3 сплошными линиями приведены результаты расчета распределения числа Рейнольдса  $R$  по длине начального участка для значений относительной шероховатости  $k_a/r_0$ : 1 — 0,2, 2 —  $10^{-3}$ , 3 —  $10^{-2}$  и  $R_1 = 2 \cdot 10^5$ . Здесь точками приведены опытные данные, полученные в работах [5,6] для  $k_a/r_0 = 0$ , и данные авторов для  $k_a/r_0 = 10^{-3}$ . Видно, что шероховатость слабо влияет на относительную величину числа Рейнольдса  $R$ , построенного по скорости на оси трубы.

На фиг. 4 пунктирные линии 1—3 показывают:

1 —  $\delta / r_0$ ; 2 —  $\delta^* / r_0$ , 3 —  $\delta^{**} / r_0$ , при этом  $R_1 = 10^6$ ,  $k_a/r_0 = 10^{-3}$ . Сплошные линии то же для  $k_a/r_0 = 0$ . Наблюдается возрастание интегральных характеристик пограничного слоя с увеличением шероховатости.

На фиг. 5 приведены результаты расчета длины начального участка в зависимости от числа Рейнольдса  $R_1$  и относительной шероховатости. Линиям 1—4 соответствуют значения:

1 —  $k_a / r_0 = 0$ , 2 —  $10^{-3}$ , 3 —  $5 \cdot 10^{-3}$ ; 4 —  $10^{-2}$ . Длина участка гидродинамической стабилизации уменьшается с ростом отношения  $k_a/r_0$ .

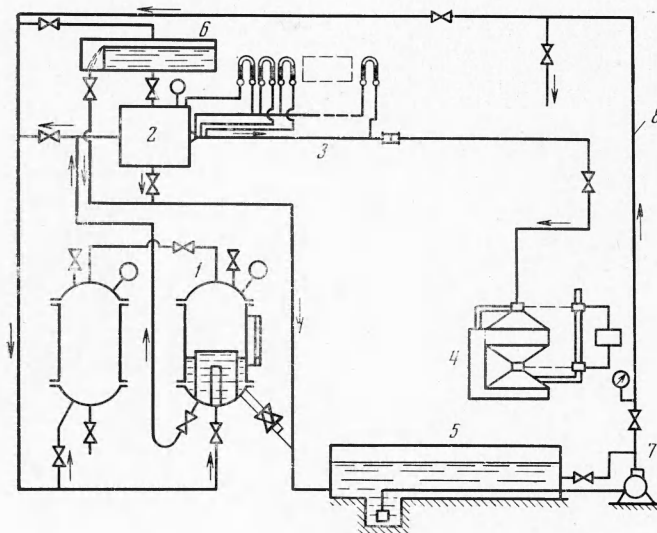
Это объясняется возрастанием касательных напряжений, возникающих на обтекаемой поверхности, и, следовательно, более глубоким проникновением их действия в поток. Это влечет за собой выполаживание профиля скоростей поперек пограничного слоя и ускоряет нарастание последнего.

Экспериментальное исследование рассматриваемой здесь задачи было проведено на гидродинамической установке, схематично представленной на фиг. 6. Ее основными элементами являются: 1 — безбашенная напор-

ная система, 2 — форкамера, 3 — опытный участок, 4 — мерник, 5 — сливной резервуар, 6 — напорный бак, 7 — насос, 8 — соединительные трубопроводы с запорными устройствами.

Безбашенная напорная система обеспечивала спокойную (без пульсаций) подачу воды в форкамеру, плавное регулирование величины расхода и поддержание его постоянным во время опыта.

Форкамера выполнена в виде цилиндра диаметром 1.2 м. На ее переднем днище установлено входное устройство, обеспечивающее плавный вход в опытный участок. В качестве опытного участка использовалась цилиндрическая труба из нержавеющей стали внутренним диаметром 99,8 мм и длиной 6500 мм.



Фиг. 6

По всей длине опытный участок был разделен на 24 сечения с координатами  $X = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65$ . В каждом из них диаметрально противоположно по горизонтали было просверлено по два отверстия диаметром 1.2 мм для отбора статического давления. После сверления с внутренних кромок отверстий были тщательно удалены заусенцы с целью предотвращения неправильных показаний. Снаружи каждые два отбора, относящиеся к одному сечению, соединялись между собой алюминиевой трубкой  $D_y = 4$  мм через специальную арматуру для осреднения измеряемой величины. Кроме того, в сечениях с координатами  $X = 2, 6, 12, 20, 65$  сверху имелись отверстия диаметром 3.5 мм для введения в поток трубки полного напора, а на наружной поверхности трубы в этих местах имелись приспособления для закрепления специальных координатников, служащих для перемещения трубки в пределах от 0 до 60 мм с минимальным шагом 0.05 мм.

Трубка полного напора использовалась для снятия профиля скоростей в выбранных поперечных сечениях опытного участка. Ее приемное отверстие было эллиптическим  $1.2 \times 0.8$  мм<sup>2</sup>.

Регистрация давления во всех случаях осуществлялась перевернутыми U-образными пьезометрами.

Расход воды измерялся объемным мерником 4, снабженным устройством для автоматического отсчета времени наполнения калиброванного

объема. Точность измерения расхода по данным проведенной аттестации составляет  $\pm 0.2\%$ .

Объем сливного резервуара 5 равен  $14 \text{ м}^3$ , что обеспечивает бесперебойную работу насоса во время наполнения мерника.

Величина относительной шероховатости определялась по измеренному коэффициенту сопротивления  $\lambda$ , выраженному зависимостью (5), и по известной формуле Никурадзе [3]. Она оказалась равной  $k_a / r_0 = 10^{-3}$ . Опыты проводились в стационарном режиме. Во время эксперимента измерялись следующие величины: давление и температура воды в форкамере, распределение статического давления по длине опытного участка, распределение полного давления по сечению трубопровода, объемный расход.

Результаты измерений обрабатывались по следующей методике.

Известно [6], что касательное напряжение на стенке при движении жидкости в трубопроводе может быть выражено соотношением

$$\tau_w = -\frac{1}{4} \left( \frac{d}{dX} \frac{p}{\rho_{01} w_{01}^2} + \frac{dM}{dX} \right), \quad M = \int_0^1 \left( \frac{\rho w}{\rho_{01} w_{01}} \right)^2 d \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \quad (20)$$

$M$  — количество движения жидкости, протекающей через любое сечение трубопровода. Величину  $\rho_{01} w_{01}^2 \frac{dM}{dX}$  можно представить в виде

$$\rho_{01} w_{01}^2 \frac{dM}{dX} = \frac{d}{dX} \left[ w_0 \left( \rho_{01} w_{01} - \frac{\rho_0 w_0 - \rho_{01} w_{01}}{H} \right) \right] \quad (21)$$

Замечая, что

$$\frac{\rho_0 w_0^2}{2} = p^* - p_i = \Delta h_i \quad (22)$$

из (21) в результате дифференцирования получаем

$$\rho_{01} w_{01}^2 \frac{dM}{dX} = \left( \sqrt{\frac{\Delta h_1}{\Delta h_i}} - \frac{2}{H} + \frac{1}{H} \sqrt{\frac{\Delta h_1}{\Delta h_i}} \right) \frac{d\Delta h_i}{dX} + \left( 2\Delta h_i - 2 \sqrt{\Delta h_i \Delta h_1} \right) \frac{1}{H^2} \frac{dH}{dX} \quad (23)$$

Подставляя (23) в (20), получаем рабочую формулу для расчета коэффициента трения по экспериментально замеренным величинам

$$\frac{c_f}{2} = \frac{1}{8\Delta h_i} \left\{ \frac{d\Delta h_i}{dX} - \left( \sqrt{\frac{\Delta h_1}{\Delta h_i}} - \frac{2}{H_i} + \frac{1}{H_i} \sqrt{\frac{\Delta h_1}{\Delta h_i}} \right) \frac{d\Delta h_i}{dX} - \left( 2\Delta h_i - 2 \sqrt{\Delta h_i \Delta h_1} \right) \frac{1}{H_i^2} \frac{dH_i}{dX} \right\} \quad (24)$$

Вычисление по формуле (21) проводилось в следующей последовательности. Сначала, в первом приближении, принималось, что  $dH/dX = 0$ . Методом наименьших квадратов для ряда точек находилась зависимость вида

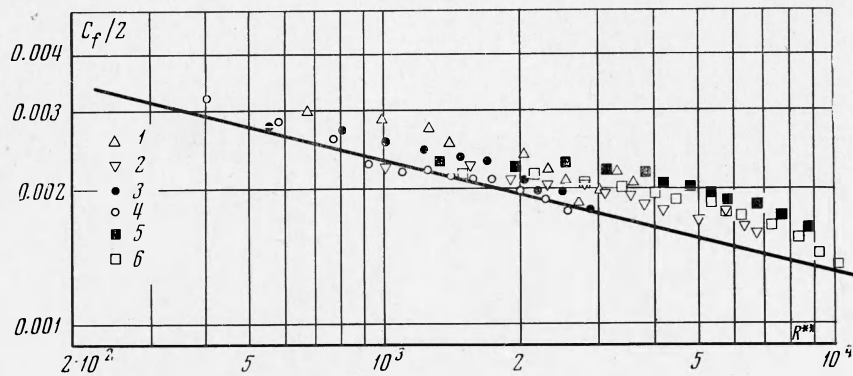
$$\Delta h_i = a + bX + cX^2 \quad (25)$$

которая дифференцировалась, а полученное выражение подставлялось в (24). Для всех этих точек определялись коэффициенты трения, а по формуле (17) рассчитывалось распределение формпараметра  $H_i$ . Найденные таким образом значения  $H_i$  затем аппроксимировались зависимостью вида (25), с той разницей, что вместо  $\Delta h_i$  использовалась величина  $H$ .

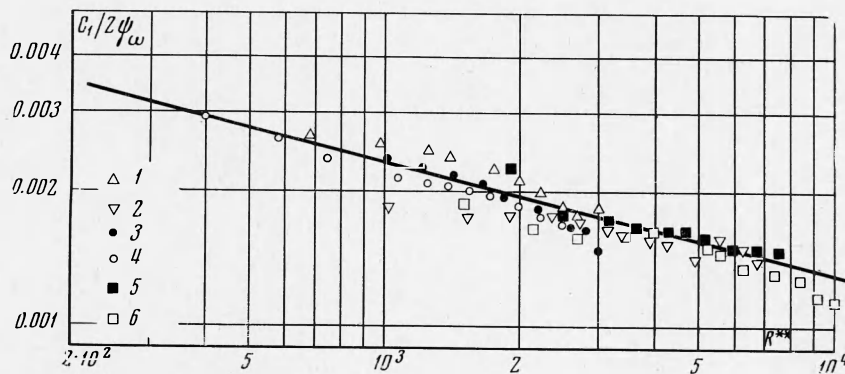
Выражение (25) дифференцировалось, а градиент формпараметра подставлялся в выражение (24). Таким образом вычислялись величины коэффициентов трения во втором приближении. Все операции повторялись до тех пор, пока в каждой точке не выполнялось соотношение

$$|(c_{fi} - c_{fi-1}) / c_{fi}| \leq 10^{-4} \quad (26)$$

Найденные значения коэффициентов трения в дальнейшем использовались для расчета числа Рейнольдса, построенного по толщине потери



Фиг. 7



Фиг. 8

импульсов. Расчетную зависимость для  $R^{**}$  можно получить из уравнения количества движения путем простых преобразований. Имеем

$$R_i^{**} = \exp \ln \sqrt{\frac{\Delta h_1}{\Delta h_i}} \int_0^{X_i} \sqrt{2\rho} \frac{D}{\mu} \sqrt{\Delta h_i} \frac{c_{fi}}{2} \left( \frac{\sqrt{\Delta h_i} + \sqrt{\Delta h_1}}{2 \sqrt{\Delta h_i}} \right) \exp \ln \sqrt{\frac{\Delta h_i}{\Delta h_1}} dX \quad (27)$$

На фиг. 7 представлены результаты такой обработки для  $R_1$ : 1 —  $10.2 \cdot 10^4$ , 2 —  $20.7 \cdot 10^4$ , 3 —  $8.9 \cdot 10^4$ , 4 —  $7.4 \cdot 10^4$ , 5 —  $26.7 \cdot 10^4$ , 6 —  $31 \cdot 10^4$ . Здесь же линией приведена зависимость

$$\frac{c_{f0}}{2} = \frac{0.0128}{R^{**0.25}} \quad (28)$$

которая по данным работ [1,3-7] хорошо согласуется с опытными данными, полученными для обтекания гладких поверхностей. Видно, что опытные данные ложатся выше этой зависимости.

Ввиду того что стенки трубопровода были шероховатыми, естественно предположить, что имеющее место различие между полученными результатами и соотношением (28) объясняется наличием шероховатости. Поэтому была сделана попытка учета этого влияния с использованием ранее полученных зависимостей.

Обозначим через  $\Psi^*$  величину относительного коэффициента трения

$$\Psi^* = (c_f / c_{f0})_{R^{**}} \quad (29)$$

Зависимость (29) может быть получена из (3) путем подстановки в нее значений скорости на границе ламинарного подслоя и его толщины, рассчитанных при одном и том же числе  $R^{**}$  для гладкой и шероховатой поверхностей. Имеем

$$\Psi_{R^{**}}^* = \left( \frac{\kappa \eta_{10} - \ln \xi_{10}}{\kappa \eta_1 - \ln \xi_1} \right)^2 \quad (30)$$

$$\xi_1 = \eta_1 \left( R^{**} \frac{r_0}{\delta^{**}} \right)^{-1} \left( \frac{c_{f0}}{2} \Psi^* \right)^{-1/2}$$

где  $\eta_1$  и  $1/2 c_{f0}$  определяются соответственно по формулам (13) и (28).

На фиг. 8 опытные данные по трению в начальном участке трубы обработаны с учетом зависимости (30). Видно, что учет влияния шероховатости приводит к согласованию опытных данных с зависимостью (28), справедливой для обтекания гладкой непроницаемой пластины. А это позволяет сделать вывод, что закон трения при обтекании шероховатых поверхностей может быть записан в виде

$$\frac{c_f}{2} = \frac{0.0128 \Psi^*}{R^{**0.25}}$$

Поступила 28 X 1970

#### ЛИТЕРАТУРА

1. К у т а т е л а д з е С. С., Л е о н т ь е в А. И. Турбулентный пограничный слой сжимаемого газа. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
2. Теплообмен и трение в турбулентном пограничном слое. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1964.
3. Ш л и х т и н г Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.
4. М у р и н Г. А. Гидравлическое сопротивление стальных труб. Изв. Всес. тепло-техн. ин-та им. Дзержинского, 1948, № 10.
5. Л е о н т ь е в А. И., М и р о н о в Б. П., Ф а ф у р и н А. В. Длина начального участка при турбулентном течении газа в цилиндрической трубе в условиях существенной неизотермичности. ПМТФ, 1968, № 4.
6. Б а р б и н, Д ж о у н с. Турбулентное течение в начальном участке гладкой трубы. Тр. Америк. о-ва инж.-мех. Техн. механ., 1963, № 1.
7. Ш и л л е р Л. Движение жидкости в трубах. М, Гостехиздат, 1936.