ПМТФ, № 2, 1967

О ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ СИСТЕМ

В. П. Мясников

(Москва)

В работе сделана попытка построить модель двухкомпонентной системы, основываясь на предположении, что движение совокупности твердых частиц в потоке жидкости или газа можно представить как случайный процесс с независимыми приращениями. Полученное на основе этого предположения кинетическое уравнение для функции распределения твердых частиц имеет тот же вид, что и предложенное ранее в [1]. Построенное решение кинетического уравнения позволяет получить систему уравнений гидродинамики «псевдогаза» — совокупности твердых частиц. Отличие полученных уравнений от предложенных ранее в работах [3, 2] состоит в наличии добавочных членов, связанных с относительным движением компонент, присутствие которых обусловливает анизотропию поля нормальных напряжений в псевдогазе.

§ 1. Вывод кинетического уравнения. Рассмотрим движение совокупности большого числа частиц в потоке жидкости или газа. Изменение скорости движения каждой из частиц происходит под действием трех типов сил: внешних массовых сил, силы взаимодействия между частицей и несущим потоком, а также в результате взаимных столкновений.

Каждая движущаяся частица вызывает возмущения в движении несущего потока, меняя при этом условия взаимодействия других частиц с этим потоком. Поэтому условия движения отдельной частицы будут зависеть, вообще говоря, от движения всех других частиц.

В результате сложения большого числа различных случайных влияний взаимодействие частицы с потоком будет приводить к относительно плавному и медленному изменению ее скорости. Непосредственные столкновения частиц между собой также будут изменять скорость движения частиц, однако такое взаимодействие частиц между собой является, в отличие от предыдущего, существенно короткодействующим.

Если вязкость несущего потока невелика, то столкновения частиц между собой можно считать статистически независимыми от взаимного влияния частиц друг на друга через посредство несущего потока.

Обозначим через $\{\mathbf{u}, \mathbf{x}\}$ радиус-вектор точки, изображающей состояние системы N частиц в фазовом пространстве

$$\{\mathbf{u}, \mathbf{x}\} = \{\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \ldots, \mathbf{u}^{(N)}; \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}^{(N)}\}$$

Здесь $\mathbf{u}^{(i)}$ — вектор скорости i-й частицы, $\mathbf{x}^{(i)}$ — радиус-вектор ее центра масс относительно некоторой неподвижной декартовой системы координат.

Сделаем следующие предположения.

1°. Вектор скорости $\mathbf{u}(t)$ изображающей точки системы в ее фазовом пространстве скоростей можно рассматривать как случайный процесс с независимыми приращениями.

2°. Столкновения частиц между собой могут быть моделированы столкновениями абсолютно упругих шаров.

3°. Одновременными соударениями трех и большего числа частиц можно пренебречь.

Последнее предположение является, вообще говоря, следствием предыдущего, и, видимо, можно предполагать, что оно справедливо для любых короткодействующих взаимодействий и пригодно при любом числе частиц, вплоть до их почти плотной упаковки [4].

Случайный процесс с независимыми приращениями можно представить в виде суммы двух случайных процессов: непрерывного диффузионного процесса и случайного процесса, построенного по скачкам исходного. Для определения плотности условной вероятности перехода системы из заданного состояния в любое другое $\Psi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ будем иметь [5]

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{3} u_\alpha^{(i)} \frac{\partial \Psi}{\partial x_\alpha^{(i)}} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial}{\partial u_\alpha^{(i)}}\left[a_\alpha^{(i)}\Psi + \sum_{\beta=1}^{3} B_{\alpha\beta}^{(i)} \frac{\partial \Psi}{\partial u_\beta^{(i)}}\right] +$$

$$+ \sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} \int_{(\mathbf{l})} \left[\Psi(t, \mathbf{x}, A_{ij}(\mathbf{l})\mathbf{u}) - \Psi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\right] \varphi_{ij} d\mathbf{l} \qquad (1.1)$$

$$A_{ij}(\mathbf{l})\mathbf{u} = \{\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(i-1)}, \mathbf{u}^{(i)} + \mathbf{l}\sum_{\alpha=1}^{3} l_\alpha (u_\alpha^{(j)} - u_\alpha^{(i)}), \mathbf{u}^{(i+1)}, \ldots$$

$$\ldots, \mathbf{u}^{(j-1)}, \mathbf{u}^{(j)} - \mathbf{l}\sum_{\alpha=1}^{3} l_\alpha (u_\alpha^{(j)} - u_\alpha^{(i)}), \mathbf{u}^{(j+1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(N)}\}$$

Здесь $Aij(\mathbf{l})$ — оператор перехода системы из одного состояния в другое при столкновении i-й и j-й частиц, $\mathbf{l}$ — единичный вектор, задающий направление линии центров i-й и j-й частиц. Функция $\varphi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ — плотность вероятности столкновения этих частиц, так что вероятность этого столкновения за время dt равна $\varphi_{ij} d\mathbf{l} dt$.

Величины $a_\alpha^{(i)}$ и $B_{\alpha\beta}^{(i)}$ характеризуют непрерывную составляющую рассматриваемого процесса с независимыми приращениями.

Введем следующие частичные функции распределения:

$$f(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{x}^{(1)}, t) = \frac{1}{V^{N-1}} \int \Psi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\, d\mathbf{u}^{(2)} \ldots d\mathbf{u}^{(N)} d\mathbf{x}^{(2)} \ldots d\mathbf{x}^{(N)}$$

$$g(t; \mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{x}^{(1)}; \mathbf{u}^{(2)}, \mathbf{x}^{(2)}) = \frac{1}{V^{N-2}} \int \Psi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\, d\mathbf{u}^{(2)} \ldots d\mathbf{u}^{(N)} d\mathbf{x}^{(3)} \ldots d\mathbf{x}^{(N)} \qquad (1.2)$$

Интегрирование в (1.2) ведется по всем допустимым значениям переменных.

Применяя к (1.1) процедуру, указанную в (1.2), найдем

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{3} u_\alpha^{(1)} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha^{(1)}} = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial}{\partial u_\alpha^{(1)}}\left[a_\alpha f + \sum_{\beta=1}^{3} B_{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial u_\beta^{(1)}}\right] +$$

$$+ \iint g(t; \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{u}_*^{(1)}; \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{l}\sigma; \mathbf{u}_*^{(2)}) K_* d\mathbf{l} d\mathbf{u}_*^{(2)} -$$

$$- \iint g(t; \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{u}^{(1)}; \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{l}\sigma; \mathbf{u}^{(2)}) K d\mathbf{l} d\mathbf{u}^{(2)} \qquad (1.3)$$

где K — сечение столкновения, а величины $\mathbf{u}_*^{(1)}$, $\mathbf{u}_*^{(2)}$, $\mathbf{u}^1$ и $\mathbf{u}^2$ связаны друг с другом при помощи оператора $A_{12}(\mathbf{l})$

$$\mathbf{u}_*^{(1)} = \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{l}\sum_{\alpha=1}^{3} l_\alpha (u_\alpha^{(2)} - u_\alpha^{(1)}), \qquad \mathbf{u}_*^{(2)} = \mathbf{u}^{(2)} - \mathbf{l}\sum_{\alpha=1}^{3} l_\alpha (u_\alpha^{(2)} - u_\alpha^{(1)}) \qquad (1.4)$$

Примем в дальнейшем, что является справедливой гипотеза «молекулярного хаоса»

$$g(t;\, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{u}^{(1)};\, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{u}^{(2)}) = f(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{u}^{(1)}, t)\, f(\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{u}^{(2)}, t) \qquad (1.5)$$

В принятой модели столкновений эта гипотеза справедлива и для плотных взвесей [4].

С учетом (1.5) из (1.3) получим уравнения для определения функции f

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{3} u_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left[a_\alpha f + \sum_{\beta=1}^{3} B_{\alpha\beta}\frac{\partial f}{\partial u_\beta}\right] +$$
$$+ \sigma^2 \iint [\chi' f' f_1' - \chi f f_1]\, k d\mathbf{l} d\mathbf{u}_1 \qquad (1.6)$$

где во втором члене в правой части приняты стандартные для кинетической теории газов обозначения.

Уравнение (1.6) совпадает с уравнением, предложенным ранее в [1].

§ 2. Характеристики непрерывной составляющей процесса. Уравнение движения частицы можно представить в виде

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{1}{m}(\mathbf{G} + \mathbf{F} + \mathbf{K}) \qquad (2.1)$$

Здесь $\mathbf{G}$ — внешняя массовая сила (например, сила тяжести), $\mathbf{F}$ — сила взаимодействия частицы с несущим потоком и $\mathbf{K}$ — сила взаимодействия между частицами при столкновениях. В принятой модели столкновений $\mathbf{K}(t)$ может быть представлена в виде суммы δ-образных слагаемых.

Если учесть, что характерное время свободного пробега частицы между двумя последовательными соударениями много меньше, чем характерное время изменения $\mathbf{F}(t)$, то для определения характеристик диффузионного оператора в (1.6) достаточно рассмотреть укороченное уравнение (2.1)

$$d\mathbf{u}/dt = m^{-1}(\mathbf{G} + \mathbf{F}) \qquad (2.2)$$

Ограничимся в дальнейшем случаем, когда плотность твердых частиц значительно превышает плотность несущего потока, что позволяет пренебречь присоединенными массами частиц. Тогда для силы, действующей на частицу со стороны несущего потока, будем иметь

$$\mathbf{F}/m = \Phi(\varepsilon, |\mathbf{s} - \mathbf{u}|)(\mathbf{s} - \mathbf{u}) \qquad (2.3)$$

Здесь $\mathbf{s}$ — скорость несущего потока, $\mathbf{u}$ — скорость частицы, а ε — средний относительный объем, занимаемый несущим потоком в достаточно большой окрестности частицы. Величина ε связана с числом частиц в этом объеме при помощи соотношения $\varepsilon = 1 - nv_0$, где v_0 — объем частицы.

Как показывают оценки, проведенные в [6], основную роль в передаче энергии от неоднородностей в движении газа к частицам играют только достаточно крупные неоднородности.

Необходимость учета зависимости $\mathbf{F}$ от ε подтверждается полуэмпирическим анализом, проведенным в [7], и приводит к хорошо согласующимся с экспериментальными данными результатам.

Представим $\mathbf{s}$ и $\mathbf{u}$ в виде

$$\begin{array}{l}\mathbf{s} = \mathbf{q} + \boldsymbol{\omega},\\ \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{v},\end{array} \quad \mathbf{w} = \int \mathbf{u} f d\mathbf{u}, \quad \int \mathbf{v} f d\mathbf{u} = 0, \quad \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \omega(\xi)\, d\xi = 0 \qquad (2.4)$$

Здесь $\mathbf{q}$ — средняя скорость движения несущего потока в окрестности частицы при средней пористости взвеси в этой окрестности, равной ε.

Предположим далее, что $|\boldsymbol{\omega}|$ и $|\mathbf{v}|$ малы по сравнению с $|\mathbf{q}-\mathbf{w}|$, и представим $\mathbf{F}$ в виде

$$\frac{\mathbf{F}}{m}=\Phi(\varepsilon,|\mathbf{q}-\mathbf{w}|)(\mathbf{q}-\mathbf{w})+\Phi(\varepsilon,|\mathbf{q}-\mathbf{w}|)(\boldsymbol{\omega}-\mathbf{v})+$$
$$+\frac{\partial\Phi(\varepsilon,|\mathbf{q}-\mathbf{w}|)}{\partial\varepsilon}\Delta\varepsilon(\mathbf{q}-\mathbf{w}) \qquad (2.5)$$

пренебрегая членами порядка $|\boldsymbol{\omega}-\mathbf{v}|^2$, $(\Delta\varepsilon)^2$ и т. п., где $\Delta\varepsilon$ — флюктуация пористости взвеси в окрестности рассматриваемой частицы.

Выражение (2.4) можно представить в виде двух слагаемых

$$m^{-1}F_\alpha=-a_\alpha{}^*+A_\alpha \quad (\alpha=1,2,3)$$
$$a_\alpha{}^*=-\Phi(\varepsilon,|\mathbf{q}-\mathbf{w}|)(q_\alpha-w_\alpha)+\Phi(\varepsilon,|\mathbf{q}-\mathbf{w}|)v_\alpha \qquad (2.6)$$
$$A_\alpha=\Phi(\varepsilon,|\mathbf{q}-\mathbf{w}|)\omega_\alpha+\frac{\partial\Phi(\varepsilon,|\mathbf{q}-\mathbf{w}|)}{\partial\varepsilon}\Delta\varepsilon(q_\alpha-w_\alpha)$$

Среднее по времени значение A_α будет равно нулю. Таким образом, для $\mathbf{v}$ получим соотношение

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{\mathbf{G}}{m}-\frac{d\mathbf{w}}{dt}-\mathbf{a}^*+\mathbf{A} \qquad (2.7)$$

В случае стационарного состояния

$$\mathbf{G}/m+\Phi(\varepsilon,|\mathbf{q}-\mathbf{w}|)(\mathbf{q}-\mathbf{w})=d\mathbf{w}/dt \qquad (2.8)$$

и для определения $\mathbf{v}$ будем иметь стохастическое уравнение

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\Phi(\varepsilon,|\mathbf{q}-\mathbf{w}|)(\boldsymbol{\omega}-\mathbf{v})+\frac{\partial\Phi(\varepsilon,|\mathbf{q}-\mathbf{w}|)}{\partial\varepsilon}\Delta\varepsilon(\mathbf{q}-\mathbf{w}) \qquad (2.9)$$

Величины $\boldsymbol{\omega}$ и $\Delta\varepsilon$ не являются независимыми. Кроме того, поскольку $\Delta\varepsilon$ прямо связано с флюктуациями числа частиц в рассматриваемом объеме, то характер пульсаций $\Delta\varepsilon$ определяется статистическими свойствами системы частиц и, следовательно, $\Delta\varepsilon$ является некоторым функционалом от f. Таким образом, $\mathbf{a}^*$ и $B_{\alpha\beta}$ также функционально зависят от f, и уравнение (1.6) является аналогом кинетических уравнений теории самосогласованных полей [8]. Соотношение (2.9) показывает, что в общем случае имеет место резко выраженная анизотропия статистических характеристик $\mathbf{v}(t)$. В случае изотропного состояния $\mathbf{G}=\mathbf{q}=\mathbf{w}=0$ и

$$d\mathbf{v}/dt=-\Phi(\varepsilon,0)\mathbf{v}+\Phi(\varepsilon,0)\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{v}=\mathbf{u} \qquad (2.10)$$

Отсюда

$$a_\alpha=\Phi(\varepsilon,0)u_\alpha, \qquad B_{\alpha\beta}=B_0(\varepsilon)\delta_{\alpha\beta} \qquad (2.11)$$

При наличии относительного движения компонент из условия сохранения среднего расхода несущего потока при помощи несложных оценок получим

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_1+V\frac{\mathbf{q}-\mathbf{w}}{|\mathbf{q}-\mathbf{w}|}, \qquad \boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_1-\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}(\mathbf{q}-\mathbf{w}) \qquad (2.12)$$

причем $\boldsymbol{\omega}_1$ имеет уже равномерное распределение по направлениям и $|\mathbf{v}_1|\sim|\boldsymbol{\omega}_1|\ll|V|$.

Стохастические уравнения для $\mathbf{v}_1$ и V запишутся следующим образом:

$$\frac{dV}{dt}=-\Phi(\varepsilon,|\mathbf{q}-\mathbf{w}|)V-\Phi\left\{\frac{1}{\varepsilon}-\frac{\partial\ln\Phi}{\partial\varepsilon}\right\}|\mathbf{q}-\mathbf{w}|\Delta\varepsilon \qquad (2.13)$$
$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt}=\Phi(\varepsilon,|\mathbf{q}-\mathbf{w}|)(\boldsymbol{\omega}_1-\mathbf{v}_1)$$

В результате для a_α и $B_{\alpha\beta}$ будем иметь

$$a_\alpha^* = -\frac{G_\alpha}{m} - \Phi(\varepsilon, |\mathbf{q}-\mathbf{w}|)(q_\alpha - w_\alpha) + \Phi(\varepsilon, |\mathbf{q}-\mathbf{w}|)(u_\alpha - w_\alpha) \tag{2.14}$$

$$B_{\alpha\beta} = B_0(\varepsilon)\,\delta_{\alpha\beta} + B(q_\alpha - w_\alpha)(q_\beta - w_\beta)$$

Для определения зависимости B от параметров системы можно воспользоваться известными соотношениями теории стационарных случайных процессов [9]

$$B = \Phi^2(\varepsilon, |\mathbf{q}-\mathbf{w}|)\left\{\frac{1}{\varepsilon} - \frac{\partial \ln \Phi}{\partial \varepsilon}\right\}^2 \langle(\Delta\varepsilon)^2\rangle\, T \tag{2.15}$$

где T — характерный временный масштаб существования флюктуации $\Delta\varepsilon$. Заметим, что флюктуация $\Delta\varepsilon$ приводит к изменению движения частиц до тех пор, пока силы вязкости, действующие на поверхности каждой частицы, не приведут к стационарному соотношению между $|\mathbf{q}-\mathbf{w}|$ и $\varepsilon + \Delta\varepsilon$. В результате

$$T = \frac{D}{\Phi(\varepsilon, |\mathbf{q}-\mathbf{w}|)} \tag{2.16}$$

где D — некоторая постоянная.

Подставляя (2.16) в (2.15), окончательно получим

$$B = D\Phi(\varepsilon, |\mathbf{q}-\mathbf{w}|)\left\{\frac{1}{\varepsilon} - \frac{\partial \ln \Phi}{\partial \varepsilon}\right\}^2 \langle(\Delta\varepsilon)^2\rangle \tag{2.17}$$

Заметим, что всегда можно считать, что $B_0 \ll B$.

Уравнение (2.13) позволяет сделать некоторые качественные выводы о характере движения частиц. При $\Delta\varepsilon < 0$, что соответствует агрегации частиц, происходит ускорение их движения в направлении относительной скорости движения компонент.

В кипящем слое это условие эквивалентно восходящему движению группы частиц при их тесном сближении, что качественно хорошо соответствует результатам экспериментов [10].

Для полного определения B необходимо получить явную зависимость $\Delta\varepsilon$ от f, вид которой будет зависеть от свойств решений уравнения (1.7).

§ 3. Аналог *H*-теоремы и стационарные состояния. Рассмотрим случай пространственно однородного состояния системы

$$(\partial f/\partial x_\alpha) = 0, \quad \mathbf{G} = \mathbf{q} = \mathbf{w} = 0 \tag{3.1}$$

Кинетическое уравнение для определения $f(u, t)$ будет иметь вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = C(ff_1) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial u_i}\left[\Phi(\varepsilon, 0)\, u_i f + B_0(\varepsilon)\frac{\partial f}{\partial u_i}\right] \tag{3.2}$$

где $C(ff_1)$ — оператор столкновений. В силу пространственной однородности состояния системы $\varepsilon = \text{const}$.

Теорема. Полная производная по времени от

$$H(t) = \int f(\mathbf{u}, t) \ln \varphi(\mathbf{u}, t)\, d\mathbf{u}, \qquad \varphi(\mathbf{u}, t) = f(\mathbf{u}, t) \exp(-\Phi u^2/2B_0) \tag{3.3}$$

неположительна, т. е. $(dH/dt) \leqslant 0$.

Доказательство. Дифференцируя H по времени и проинтегрировав по частям, с учетом (3.2) получим

$$\frac{dH}{dt} = \int C(ff_1)(\ln\varphi + 1)\, d\mathbf{u} - B_0 \int \exp\left(-\frac{\Phi u^2}{2B_0}\right) \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\varphi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}\right)^2 d\mathbf{u} \tag{3.4}$$

Первое слагаемое в (3.4) имеет обычный и хорошо известный в кинетической теории газов вид [11], причем

$$\int C\,(ff_1)\,(\ln\varphi + 1)\,d\mathbf{u} \leqslant 0 \tag{3.5}$$

и равенство достигается на произвольной функции вида $A\exp(-\gamma u^2)$, A, γ — постоянные. Полагая $g = \varphi^{1/2}$, преобразуем последнее слагаемое в (3.4) следующим образом

$$-B_0\int\exp\left(-\frac{\Phi u^2}{2B_0}\right)\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}\right)^2 d\mathbf{u} = -4B_0\int\exp\left(-\frac{\Phi u^2}{2B_0}\right)|\nabla\rho|^2\,d\mathbf{u} \leqslant 0 \tag{3.6}$$

причем равенство достигается на функции $\varphi = \mathrm{const}$. Из условия нормировки следует, что $(dH/dt) = 0$ на функции

$$f^{(0)} = n\left(\frac{\Phi}{2\pi B_0}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{\Phi u^2}{2B_0}\right) \tag{3.7}$$

Функция $f^{(0)}$, определенная в (3.7), имеет тот же вид, что и максвелловское распределение в кинетической теории газов. Отличие состоит только в том, что множитель при u^2 в показателе экспоненты, в отличие от кинетической теории газов, уже не может быть призвольным. Последнее обстоятельство весьма естественно с точки зрения механизма действия каждого из операторов в правой части (3.2).

Действительно, действие оператора столкновений состоит в выравнивании к среднему значению кинетических энергий сталкивающихся частиц, поскольку разность кинетических энергий частиц после столкновения уменьшается почти для всех столкновений [12]. Однако исходное значение энергии системы при этом сохраняется.

Действие же диффузионного оператора состоит в согласовании количества энергии, подводимой к системе извне с уровнем ее диссипации, а так как величина последней зависит от кинетической энергии движения частиц, то это и приводит к выбору системой определенного среднего значения кинетической энергии частиц.

Процесс перехода к равновесному состоянию слагаемых из двух процессов: быстрого кинетического процесса выравнивания значений кинетической энергии частиц, а затем более медленной эволюцией этого среднего значения к некоторой вполне однозначно определяемой величине. Действительно, (3.2) допускает следующее решение:

$$f = n\left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mu^2}{2\theta}\right),\quad \theta = \frac{m}{2}\left[\frac{m}{2\theta_0}e^{-2\Phi t} + \frac{B_0}{2\Phi}\left(1 - e^{-2\Phi t}\right)\right]^{-1} \tag{3.8}$$

Здесь θ — эффективная «температура псевдогаза», а θ_0 — ее значение при $t = 0$, n — число частиц в единице объема.

§ 4. Уравнения переноса псевдогаза и решение кинетического уравнения. Полученное выше кинетическое уравнение (1.7) позволяет получить при помощи стандартного приема уравнения переноса для псевдогаза. Введем следующие средние:

$$n = \int f d\mathbf{u},\quad \rho = mn,\quad w_\alpha = \frac{1}{n}\int u_\alpha f d\mathbf{u},\quad \theta = \frac{1}{3n}\int m(\mathbf{u} - \mathbf{w})^2 f d\mathbf{u} \tag{4.1}$$

В результате получим

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial\rho w_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \tag{4.2}$$

$$\rho\frac{\partial w_i}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{3}\rho w_\alpha\frac{\partial w_i}{\partial x_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} + \rho\left[\frac{G_i}{m} + \Phi(q_i - w_i)\right]$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{3}w_\alpha\frac{\partial\theta}{\partial x_\alpha} = \frac{2}{3n}\left[\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_\alpha} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{3}P_{\alpha\beta}\frac{\partial w_\alpha}{\partial x_\beta}\right] + \frac{2m}{3}[3B_0 + B] - 2\Phi\theta$$

Система уравнений (4.2) отличается от обычной системы уравнений переноса только наличием в уравнении энергии источникообразных членов. Величины Q_α и $P_{\alpha\beta}$ определяются обычным для кинетической теории плотных газов образом [11].

Приступим теперь к решению кинетического уравнения. Вводя вместо $\mathbf{u}$ новую независимую переменную $\mathbf{c} = \mathbf{u} - \mathbf{w}$, перепишем исходное кинетическое уравнение (3.9) в виде

$$\frac{Df}{Dt} + \sum_{\beta=1}^{3}\left[C_\beta \frac{\partial f}{\partial x_\beta} + \left(R_\beta - \frac{Dw_\beta}{Dt}\right)\frac{\partial f}{\partial c_\beta}\right] - \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} C_\beta \frac{\partial w_\alpha}{\partial x_\beta}\frac{\partial f}{\partial c_\alpha} -$$

$$-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial c_i}\left[\Phi c_i f + \sum_{j=1}^{3} B_{ij}\frac{\partial f}{\partial c_j}\right] = C(ff_1) \tag{4.3}$$

$$R_\beta = \frac{G_\beta}{m} + \Phi(\varepsilon, |\mathbf{q} - \mathbf{w}|)(q_\beta - w_\beta)$$

Здесь оператор

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{3} w_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \tag{4.4}$$

В соответствии с методом Чепмена — Энскога, будем искать решение (4.3) в виде

$$f = \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)} \tag{4.5}$$

Выберем в качестве нулевого приближения максвелловскую функцию распределения

$$f_{(0)} = n\left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mc^2}{2\theta}\right) \tag{4.6}$$

в которой $n(\mathrm{x}, t)$, $w_\alpha(\mathrm{x}, t)$ и $\theta(\mathrm{x}, t)$ совпадают с истинными значениями этих величин для псевдогаза.

Применяя далее с несущественными изменениями метод Энскога [11] для решения кинетического уравнения в случае плотных газов, можно показать, что если обозначить тензор

$$E_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial x_j} - \frac{mB_{ij}}{\theta\,(1 + {}^4/_{15}\pi\sigma^3 n\chi)} \tag{4.7}$$

то уравнение для определения $f^{(1)}$ будет иметь следующий вид:

$$\chi\left[C(f^{(0)}f_1^{1}) + C(f_1^{(0)}f^{(1)})\right] = f^{(0)}\left\{\left(1 + \frac{2}{5}\pi\sigma^3 n\chi\right)\left(\frac{mc^2}{2\theta} - \frac{5}{2}\right)\sum_{i=1}^{3} c_i \frac{\partial \ln\theta}{\partial x_i} + \right.$$

$$\left. + \left(1 + \frac{4}{15}\pi\sigma^3 n\chi\right)\frac{m}{\theta}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\left(c_\alpha c_\beta - \frac{1}{3}c^2\delta_{\alpha\beta}\right)E_{\alpha\beta}\right\} \tag{4.8}$$

Последнее совпадает по форме с хорошо изученным в кинетической теории газов.

Таким образом, все известные в кинетической теории газов соотношения для коэффициентов переноса, самодиффузии и т. п. автоматически переносятся на псевдогаз.

§ 5. Определение коэффициента диффузии. Решение кинетического уравнения (1.7), полученное в § 4, позволяет найти замкнутое выражение для тензора диффузии в пространстве скоростей.

Заметим, прежде всего, что по определению

$$\Delta\varepsilon = -v_0 \Delta n, \qquad \langle(\Delta\varepsilon)^2\rangle = v_0^2 \langle(\Delta n)^2\rangle \tag{5.1}$$

Статистические свойства флюктуаций Δn числа частиц в единице объема полностью определяются статистическими свойствами совокупности частиц, образующих псевдогаз.

Последние же известны, так как известно решение кинетического уравнения (1.6).

Как в равновесном, так и в неравновесном состояниях [13] средняя относительная флюктуации числа частиц в единице объема равна

$$\left\langle\left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2\right\rangle = -\frac{\theta}{v^2\partial p/\partial v} \tag{5.2}$$

Здесь p — давление. Из результатов § 4 следует, что

$$p = n\theta\left(1 + \frac{2}{3}\pi\sigma^3 n\chi\right) - 1.002\mu_0\chi\left(\frac{2}{3}\pi\sigma^3 n\right)^2 \operatorname{div}\mathbf{w}, \quad \mu_0 = \frac{5}{16\sigma^2}\left(\frac{m\theta}{\pi}\right)^{1/2} \tag{5.3}$$

Подставляя (5.3) в (5.2), после несложных вычислений получим

$$\langle(\Delta\varepsilon)^2\rangle = \frac{v_0^2 n^2}{1 + {}^4/_3\pi\sigma^3 n\chi + {}^2/_3\pi\sigma^3 n^2\chi' - 1.002\,\mu_0\theta^{-1}\operatorname{div} w\,[{}^8/_9\,\pi^2\sigma^6 n\chi + {}^4/_9\pi^2\sigma^6 n^2\chi']} \tag{5.4}$$

Остановимся теперь более подробно на задании вида функции $\chi(n)$. Физический смысл $\chi(n)$ весьма прост — он показывает, во сколько раз изменяется число бинарных соударений частиц по сравнению с системой, образованной точечными частицами. Для твердых сферических частиц

$$\chi(n) = \frac{1 - {}^{11}/_{12}\pi\sigma^3 n}{1 - {}^4/_3\pi\sigma^3 n} = \frac{1 - {}^{11}/_{16}v_* n}{1 - v_* n} = \frac{1 - {}^{11}/_{16}z}{1 - z} \tag{5.5}$$

где v_* — объем, приходящийся на одну частицу при их наиплотнейшей упаковке в пространстве. Подставляя (5.5) в (5.4), получим

$$\langle(\Delta\varepsilon)^2\rangle = \frac{(v_0/v_*)^2 z^2 (1-z)^2}{1 - z - {}^{17}/_{32}z^2 + {}^{11}/_{16}z^3 - {}^1/_2\mu_0 v_*\theta^{-1}\operatorname{div} w\,(z - {}^{49}/_{32}z^2 + {}^{11}/_{16}z^3)} \tag{5.6}$$

Таким образом, для $B_{\alpha\beta}$ будем иметь

$$B_{\alpha\beta} = B_0(\varepsilon)\,\delta_{\alpha\beta} + B\,(q_\alpha - w_\alpha)\,(q_\beta - B_\beta) \tag{5.7}$$

$$B = D\left(\frac{v_0}{v_*}\right)^2 \times$$
$$\times\, \Phi\left\{\frac{1}{\varepsilon} - \frac{\partial \ln\Phi}{\partial\varepsilon}\right\}^2 \frac{z^2(1-z)^2}{1 - z - {}^{17}/_{32}z^2 + {}^{11}/_{16}z^3 - {}^1/_2\mu_0 v_*\theta^{-1}\operatorname{div} w\,(z - {}^{49}/_{32}z^2 + {}^{11}/_{16}\,z^3)} \tag{5.8}$$

В неравновесных состояниях при $\operatorname{div}\mathbf{w} \neq 0$ величина $\langle(\Delta n)^2\rangle$ может неограниченно возрастать, если

$$2\theta = \mu_0 v_* \frac{z - {}^{49}/_{32}z^2 + {}^{11}/_{16}z^3}{1 - z - {}^{17}/_{32}z^2 + {}^{11}/_{16}z^3}\operatorname{div}\mathbf{w} \tag{5.9}$$

Заметим, что это возможно только при $(dn / dt) < 0$, т. е., например, при резком увеличении скорости несущего потока.

В общем случае $B_0(\varepsilon)$ определяется величинами более высокого порядка малости, чем B и $B_0 \ll B$. Поэтому в задачах, где $q_\alpha - w_\alpha$ отличны от нуля, величиной $B_0(\varepsilon)$ можно пренебречь.

В случае стационарного состояния системы можно определить эффективную «температуру» псевдогаза. Действительно, из (3.11) и (3.8) получим

$$\theta = \frac{mD}{3}\left(\frac{v_0}{v_*}\right)^2\left\{\frac{1}{\varepsilon} - \frac{\partial \ln \Phi}{\partial \varepsilon}\right\}^2 \frac{z^2(1-z)^2|\mathbf{q}-\mathbf{w}|^2}{1 - z - {}^{17}/_{32}\, z^2 + {}^{11}/_{16}\, z^3} \qquad (5.10)$$

Постоянная D должна быть определена на основе экспериментальных данных. Зависимость θ от z представлена на фигуре.

§ 6. Полные динамические уравнения движения системы. Результаты, полученные в §§ 4, 5, позволяют получить полную систему динамических уравнений движения псевдогаза. Для этого нужно подставить в (4.2) выражения для Q_α и $P_{\alpha\beta}$ через кинематические характеристики движения

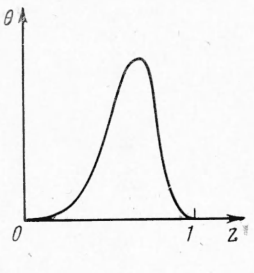
$$Q_\alpha = \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha}, \qquad P_{\alpha\beta} = -p\delta_{\alpha\beta} + 2\mu e_{\alpha\beta} - 2\mu_0 S_{\alpha\beta} \qquad (6.1)$$

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial w_\beta}{\partial x_\alpha}\right) - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\operatorname{div}\mathbf{w} \qquad (6.2)$$

$$S_{\alpha\beta} = -\frac{m}{\theta\chi} B\left[(q_\alpha - w_\alpha)(q_\beta - w_\beta) - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}|\mathbf{q}-\mathbf{w}|^2\right] \qquad (6.3)$$

Здесь λ и μ обычным для плотных газов образом [11] выражаются через n, χ и θ.

Существенным отличием уравнений переноса для псевдогаза будет появление своеобразного добавочного члена в выражениях для компонент тензора напряжений, обусловленного эффектами дальнодействующего взаимодействия между частицами и приводящего к анизотропии свойств рассматриваемой системы. Действительно, в случае стационарного состояния тензор напряжений не является шаровым



$$P_{11} = -n\theta\left(1 + \frac{2}{3}\pi\sigma^3 n\chi\right) - \frac{4m\mu_0}{3\chi\theta} B|\mathbf{q}-\mathbf{w}|^2 \qquad (6.4)$$

$$P_{11} - P_{22} = P_{11} - P_{33} = -\frac{2m\mu_0}{\theta\chi} B|\mathbf{q}-\mathbf{w}|^2$$

Для получения замкнутой системы уравнений, описывающей поведение двухкомпонентной системы, необходимо рассмотреть динамические условия движения несущего потока.

Поскольку интерес представляют только средние характеристики несущего потока, то для определения их можно использовать представления о двухкомпонентных сплошных средах, хорошо в настоящее время разработанные. Например, для движения взвеси тяжелых частиц в турбулентном потоке, когда объемная концентрация взвеси мала, такой подход был осуществлен в [14]. Для плотных взвесей этот подход использовался также в [2,3]. Подробный общий анализ вопроса о построении таких моделей дан в [15].

Аналогичные соображения могут быть применены и в рассматриваемом случае.

Введем следующие обозначения: ρ_0 — плотность несущего потока, P — давление в несущем потоке, τ_{ij} — тензор напряжений в несущем потоке. Тогда уравнения движения будут иметь следующий вид:

$$\frac{\partial \rho_0 \varepsilon}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \rho_0 \varepsilon q_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\rho_0 \varepsilon \frac{\partial q_i}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{3} \rho_0 \varepsilon q_\alpha \frac{\partial q_i}{\partial x_\alpha} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho_0 \varepsilon g_i - \rho \Phi (q_i - w_i) \tag{6.5}$$

Величиной τ_{ij} можно пренебречь практически для всех интересных случаев движения. Действительно, поскольку построенная модель применима для анализа движений с масштабами, много большими, чем среднее расстояние между частицами, то вязкость несущего потока будет давать только малый вклад в суммарное касательное напряжение, действующее на произвольной площадке в смеси.

Автор благодарит В. Г. Левича за ценные дискуссии и постоянный интерес к работе.

Поступила 10 IX 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Левич В. Г., Мясников В. П. Кинетическая модель кипящего слоя. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
2. Murray J. D. On the mathematics of fluidization. Part 1. Fundamental equations and wave propagathion. J. Fluid Mech., 1965, vol. 21, part 3.
3. Буевич Ю. А. Двухжидкостная гидродинамика взвешенного слоя. Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, 1966, № 4.
4. Jeans J. H. Dynamical Theory of Gases. 4-ed. Cambridge Univ. Press. 1924, p. 24.
5. Скороход В. А. Случайные процессы с независимыми приращениями. Изд-во «Наука», 1964.
6. Левич В. Г., Мясников В. П. Кинетическая теория псевдоожиженного состояния. Химическая пром-сть, № 6, 1966.
7. Гупало Ю. П. О некоторых закономерностях псевдоожиженного слоя и стесненного падения. Инж.-физ. ж., 1962, № 1.
8. Власов А. А. Статистические функции распределения. Физматгиз. Изд-во «Наука», 1966.
9. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидродинамика, ч. 1. Изд-во «Наука», 1964.
10. Забродский С. С. Гидродинамика и теплообмен в псевдоожиженном слое. Госэнергоиздат, 1963.
11. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. Изд. иностр. лит., 1960.
12. Зоммерфельд А. Термодинамика и статистическая физика. Изд. иностр. лит., 1955.
13. Леонтович А. М. Статистическая физика. Гостехиздат, 1944.
14. Баренблатт Г. И. О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке. ПММ, 1953, т. 17, вып. 3.
15. Green A. E., Naghdi P. M. A dinamical theory of interacting continuaa Intern. J. Engng. Sci. 1965, vol. 3, No. 2.