вешенные в теле напряжения, которые будем называть наведенными и которые препятствуют раскрытию трещины, являясь своеобразной реакцией материала на разрушение.

Наличие наведенных напряжений, препятствующих раскрытию трещины, подтверждается также тем, что результаты, полученные выше, не были воспроизведены на образце с естественной амкротрещиной, который пролежал около года в комнатных условиях. При тех же условиях эксперимента трещина раскрывалась при деформациях, значительно меньших $0{,}39 \cdot 10^{-3}$. Этот факт объясняется, очевидно, релаксацией наведенных напряжений.

В заключение отметим, что при малых деформациях не происходит полного раскрытия естественной макротрещины, что раскрытию берегов препятствуют сжимающие наведенные напряжения и так как при образовании естественной трещины зона разрыхления появляется, очевидно, в любом материале, то результаты данной работы, по-видимому, справедливы и для более широкого класса материалов.

Поступила 13 I 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Панасюк В. В.** Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев: Наукова думка, 1968.
2. **Разрушение.** Математические основы теории разрушения/Под ред. Г. Либовица. Т. 2. М.: Мир, 1975.
3. **Волков С. Д., Ставров В. П.** Статистическая механика композитных материалов. Минск: изд. БГУ, 1978.
4. **Волков С. Д.** К теории макротрещин. Сообщение 2. Модели класса М.— Проблемы прочности, 1981, № 3.
5. **Островский Ю. И., Бутусов М. М., Островская Г. В.** Голографическая интерферометрия. М.: Наука, 1977.
6. **Голография.** Методы и аппаратура/Под ред. В. М. Гинзбург и Б. М. Степанова. М.: Сов. радио, 1974.
7. **Владимиров А. П.** Применение толстослойных фотоэмульсий в голографической интерферометрии естественных трещин.— ВИНИТИ, деп. № 3577—80, 1980.

УДК 539.214 + 539.374 + 517.9

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ОДНОМЕРНЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

А. М. Хлуднев

(*Новосибирск*)

Отличительной особенностью в формулировках упругопластических и жесткопластических задач является наличие неравенства, связывающего скорости пластического деформирования с величинами текущих напряжений. Это неравенство, называемое принципом максимума Мизеса, включает в себя r компонент скоростей пластических деформаций (r зависит от размерности задачи), причем оно устроено так, что фактически заменяет r уравнений и система определяющих соотношений при этом является замкнутой. Таким образом, оказывается, что при задании начальных и граничных условий скорости и напряжения определяются в каждой точке и притом единственным образом. Отметим, что часто при нахождении приближенных решений (численным или аналитическим методом) используют следствие из упомянутого неравенства, записывая пропорциональность компонент пластического деформирования компонентам градиента поверхности текучести. Как правило, это приводит к незамкнутости системы уравнений. В этом смысле использование принципа максимума в его первоначальном виде предпочтительнее, несмотря на то, что само неравенство является следствием более общего постулата Друккера. В частности, формулировка задачи с использованием неравенства рассматривалась в [1], что позволило установить разрешимость трехмерной динамической упругопластической задачи.

При постановке упругопластических и жесткопластических задач для тонкостенных конструкций типа оболочек, пластин и балок в формулировке участвуют обобщенные напряжения (усилия, моменты и т. д.) и скорости деформаций срединной поверхности. Они также связаны между собой с помощью неравенства [2, 3]. В исследовании задач такого рода достигнут определенный прогресс с точки зрения приближенного описания процессов деформирования. Особенно это касается случая одной пространственной переменной (см. обзор [4]). Однако, несмотря на большое число работ на эту тему, практически отсутствуют результаты, относящиеся к исследованию корректности в постановках подобных задач. В данной работе рассматриваются краевые задачи для одномерных упругопластических и жесткопластических конструкций и для них формулируются результаты о разрешимости.

Уравнения динамики балки с учетом сдвига и инерции вращения имеют вид [5]

$$(1)\qquad l_1 \equiv u_t - n_x - f_1 = 0,\ l_2 \equiv v_t - m_x + q - f_2 = 0,$$
$$l_3 \equiv w_t - q_x - f_3 = 0,$$

где m, n, q — изгибающий момент, усилие и поперечная сила соответственно; u — скорость точек средней линии балки вдоль оси Ox; w — скорость прогиба; v — скорость изменения угла поворота нормали к оси Ox; f_i, $i = 1, 2, 3$ — внешние нагрузки.

Рассмотрим сначала идеальную жесткопластическую задачу. Пусть условие текучести имеет вид $\Phi(n, m, q) = 1$. Предполагается, что Φ — выпуклая непрерывная функция. Скорость пластических деформаций определяется из ассоциированного с функцией Φ закона течения. Соответствующий принцип максимума имеет вид [2]

$$(2)\qquad u_x(\bar{n} - n) + v_x(\bar{m} - m) + (w_x + v)(\bar{q} - q) \leqslant 0$$

для любых $(\bar{n}, \bar{m}, \bar{q})$ таких, что $\Phi(\bar{n}, \bar{m}, \bar{q}) \leqslant 1$.

Оказывается, что система уравнений (1) и неравенство (2) представляют собой систему замкнутых соотношений в том смысле, что при задании начальных и граничных условий можно установить существование функций u, v, w, n, m, q. Для того чтобы сформулировать результат точно, необходимо ввести ряд обозначений. Прежде всего определим замкнутое выпуклое множество, связанное с условием текучести

$$K = \{(n, m, q) | n, m, q \in L^2(a, b),\ \Phi(n, m, q) \leqslant 1 \text{ почти всюду в } (a, b)\}.$$

Считаем, что $0 \in K$. Обозначим через $H_a^s(a, b)$ пространство функций С. Л. Соболева, имеющих суммируемые с квадратом обобщенные производные в промежутке (a, b) до порядка s включительно, равных нулю при $x = a$ до порядка $s - 1$. Аналогично определяется $H_b^s(a, b)$. Пусть также $Q = (a, b) \times (0, T)$, $T > 0$. Для краткости будем пользоваться обозначениями $P = (u, v, w)$, $R = (n, m, q)$.

Наиболее естественной является формулировка задачи в виде интегральных тождеств и неравенства, в которых производные по пространственной переменной сброшены на пробные функции. Последнее обстоятельство связано с тем, что не все первые производные по x существуют как функции из пространства $L^2(Q)$.

Справедлив следующий результат, относящийся к динамической жесткопластической задаче для балки на основе модели, учитывающей сдвиг и инерцию вращения.

Т е о р е м а 1. Пусть f_i, $f_{it} \in L^2(Q)$, $i = 1, 2, 3$. Тогда существуют и притом единственные функции $P = (u, v, w)$, $R = (n, m, q)$, удовлетворяющие следующим соотношениям:

$$(3)\qquad \int_a^b (u_t h + n h_x - f_1 h)\, dx = 0 \quad \forall h \in H_a^1(a, b);$$

$$(4)\qquad \int_a^b (v_t h + m h_x + q h - f_2 h)\, dx = 0 \quad \forall h \in H_a^1(a, b);$$

$$(5)\qquad \int_a^b (w_t h + q h_x - f_3 h)\, dx = 0 \quad \forall h \in H_a^1(a, b);$$

$$(6)\qquad \int_a^b \{u(\bar{n}_x - n_x) + v(\bar{m}_x - m_x) + w(\bar{q}_x - q_x) -$$
$$- v(\bar{q} - q)\}\,dx \geqslant 0 \quad \forall \bar{R} = (\bar{n}, \bar{m}, \bar{q}) \in K \cap H_b^1(a, b),$$

причем $P = 0$ при $t = 0$; $R(t) \in K$ почти всюду на $(0, T)$; $P, P_t \in L^\infty \times \times (0, T;\ L^2(a, b))$, $R \in L^\infty(0, T; H_b^1(a, b))$.

Включение $R(t) \in K$ означает, что обобщенные напряжения не превосходят предела текучести.

Ниже приводится схема доказательства этой теоремы. Обозначим через B оператор штрафа, связанный с множеством K и действующий из $[L^2(a, b)]^3$ в $[L^2(a, b)]^3$. Можно считать, что оператор B является непрерывным и монотонным. Пусть ε, $\delta > 0$ — фиксированные числа. Рассмотрим вспомогательную задачу со штрафом

$$(7)\qquad l_i = 0,\ i = 1, 2, 3,$$
$$(8)\qquad l_4 \equiv \varepsilon n_t - u_x + \delta^{-1} B(R)_1 = 0;$$
$$(9)\qquad l_5 \equiv \varepsilon m_t - v_x + \delta^{-1} B(R)_2 = 0;$$
$$(10)\qquad l_6 \equiv \varepsilon q_t - w_x - v + \delta^{-1} B(R)_3 = 0;$$
$$(11)\qquad P = 0,\ R = 0 \text{ при } t = 0;$$
$$(12)\qquad P = 0 \text{ при } x = a,\ R = 0 \text{ при } x = b.$$

Здесь через $B(R)_i$ обозначены компоненты оператора штрафа. Введение параметра ε фактически эквивалентно тому, что исходная жесткопластическая задача аппроксимируется упругопластической задачей (с модулем Юнга ε^{-1}). Последняя в свою очередь приближается задачей со штрафом (7)—(12). Прежде всего установим ее разрешимость. Это можно сделать с помощью метода Галеркина, выбирая базисы $\{\varphi_j\}$, $\{\psi_j\}$, $j = 1, 2, 3, \ldots$, в пространствах $H_a^1(a, b)$ и $H_b^1(a, b)$ соответственно. Приближенное решение следует искать в виде

$$P^s(t) = \sum_{i=1}^{s} a_i^s(t)\,\varphi_i, \qquad R^s(t) = \sum_{i=1}^{s} b_i^s(t)\,\psi_i,$$

где трехкомпонентные вектор-функции $a_i^s(t)$, $b_i^s(t)$ определяются из следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\int_a^b l_i^s \varphi_j\,dx = 0,\ i = 1, 2, 3; \qquad \int_a^b l_i^s \psi_j\,dx = 0,\ i = 4, 5, 6;\ j = 1, 2, \ldots, s.$$

Считаем, что при записи этих уравнений производные по пространственной переменной сброшены на базисные функции (так же как при записи тождеств (3)—(5)). Начальные данные для P^s, R^s — нулевые. Априорная оценка задачи (7)—(12) имеет следующий вид:

$$(13)\qquad \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \{\|P(t)\| + \|P_t(t)\| + \varepsilon^{1/2}\|R(t)\| + \varepsilon^{1/2}\|R_t(t)\|\} \leqslant c_1.$$

Постоянная c_1 зависит лишь от функции f_i ($i = 1, 2, 3$) и T, $\|\cdot\|$ — норма в $L^2(a, b)$. Оценка получается с помощью умножения уравнений (7)—(10) соответственно на u, v, w, n, m, q, последующего дифференцирования по t и умножения на u_t, v_t, w_t, n_t, m_t, q_t и учета монотонности оператора штрафа. Воспроизведение априорной оценки для приближений Галеркина осуществляется обычным образом. Так что можно считать оценку (13) справедливой для P^s, R^s с постоянной c_1, не зависящей от s. Это обстоятельство позволяет сделать заключение о разрешимости уравнений Галеркина на промежутке $(0, T)$ и осуществить предельный переход в них при $s \to \infty$. Подчеркнем, что, хотя предельные уравнения будут выполнены в смысле интегральных тождеств (аналогичных (3)—(5)), в которых производные по x сброшены на пробные функции, можно считать (в силу справедливости уравнений в смысле распределений), что $P \in L^\infty(0, T; H_a^1(a, b))$, $R \in L^\infty(0, T; H_b^1(a, b))$. Фактически P и R зависят от параметров ε, δ. В связи с этим отметим, что оценка функции P в пространстве $L^\infty(0, T; H_a^1(a, b))$ не является равномерной по ε, δ. Тот факт, что $B(R^\varepsilon)$ сходится слабо в $L^2(Q)$ к $B(R)$, проверяется с помощью монотонности оператора B.

Следующий этап рассуждений — переход к пределу при $\varepsilon \to 0$ в задаче (7)—(12). Решение будем снабжать символами ε, δ. Для этого решения имеют место такие оценки:

$$(14) \qquad \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \{\|P^{\varepsilon\delta}(t)\| + \|P_t^{\varepsilon\delta}(t)\|\} \leqslant c_2, \quad \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|R^{\varepsilon\delta}(t)\|_{H_b^1(a,b)} \leqslant c_3$$

с постоянными в правых частях, не зависящими от ε, δ. Первая из них получается, как и ранее, с помощью умножения уравнений (7)—(10) и уравнений, полученных дифференцированием по t, а вторая следует из уравнений (7) непосредственно с учетом первой. Поэтому можно считать, что при $\varepsilon \to 0$ $P^{\varepsilon\delta}$, $P_t^{\varepsilon\delta} \to P^\delta$, P_t^δ * — слабо в $L^\infty(0, T; L^2(a, b))$, $R^{\varepsilon\delta} \to R^\delta$ * — слабо в $L^\infty(0, T; H_b^1(a, b))$. После перехода к пределу при $\varepsilon \to 0$ получим ($\varepsilon R_t^{\varepsilon\delta} \to 0$ слабо в $L^2(Q)$)

$$(15) \qquad u_t^\delta - n_x^\delta = f_1, \quad v_t^\delta - m_x^\delta + q^\delta = f_2, \quad w_t^\delta - q_x^\delta = f_3;$$

$$(16) \qquad -u_x^\delta + \delta^{-1}B(R^\delta)_1 = 0, \quad -v_x^\delta + \delta^{-1}B(R^\delta)_2 = 0, \quad -w_x^\delta - v^\delta + \delta^{-1}B(R^\delta)_3 = 0.$$

С учетом имеющейся гладкости можно утверждать, что граничное условие $R^\delta = 0$ при $x = b$ выполнено в смысле L^2, а условие $P^\delta = 0$ при $x = a$ — в слабом смысле и содержится в соответствующих интегральных тождествах. Кроме того, выполнено в смысле L^2 начальное условие $P^\delta = 0$ при $t = 0$.

Заключительный этап рассуждений — переход к пределу в (15), (16) при $\delta \to 0$. Так как оценки (14) являются равномерными по δ, то можно считать

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \{\|P^\delta(t)\| + \|P_t^\delta(t)\| + \|R^\delta(t)\|_{H_b^1(a,b)}\} \leqslant c_4.$$

Постоянная c_4 от δ не зависит. Пусть подпоследовательность P^δ, R^δ, обозначаемая прежним образом, обладает тем свойством, что при $\delta \to 0$ имеет место сходимость P^δ, P_t^δ к функциям P, P_t * — слабо в пространстве $L^\infty(0, T; L^2(a, b))$ и R^δ к R * — слабо в $L^\infty(0, T; H_b^1(a, b))$. Переход к пределу в (15) осуществляется обычным образом, а в (16) поступим так. Возьмем любую функцию $\bar{R} \in L^2(0, T; K \cap H_b^1(a, b))$. Тогда из уравнений (16) следует (подчеркнем здесь, что уравнения выполнены в смысле интегральных тождеств, в которых подстановка пробных функций соответственно $\bar{n} - n^\delta$, $\bar{m} - m^\delta$, $\bar{q} - q^\delta$ является допустимой)

$$\int_a^b \{u^\delta(\bar{n}_x - n_x^\delta) + v^\delta(\bar{m}_x - m_x^\delta) + w^\delta(\bar{q}_x - q_x^\delta) - v^\delta(\bar{q} - q^\delta)\}\, dx \geqslant 0.$$

Подставим сюда n_x^δ, m_x^δ, q_x^δ из уравнений (15) и проинтегрируем по t от 0 до T. Получим

$$\int_0^T \int_a^b (u^\delta \bar{n}_x + v^\delta \bar{m}_x + w^\delta \bar{q}_x - v^\delta \bar{q})\, dxdt + \int_0^T \int_a^b (f_1 u^\delta + f_2 v^\delta + f_3 w^\delta)\, dxdt \geqslant \geqslant \frac{1}{2}(\|u^\delta(T)\|^2 + \|v^\delta(T)\|^2 + \|w^\delta(T)\|^2).$$

В силу указанной сходимости и неравенства $\underline{\lim}\, \|P^\delta(T)\| \geqslant \|P(T)\|$ здесь допустим переход к нижнему пределу. Поэтому

$$\int_0^T \int_a^b \{u(\bar{n}_x - n_x) + v(\bar{m}_x - m_x) + w(\bar{q}_x - q_x) - v(\bar{q} - q)\}\, dxdt \geqslant 0$$

$$\forall \bar{R} \in L^2(0, T;\ K \cap H_b^1(a, b)).$$

Отсюда легко получить неравенство (6) для почти всех $t \in (0, T)$. Из (16) можно установить также включение $R(t) \in K$ почти всюду, обоснование которого приводить не будем. Отметим лишь, что при этом используется монотонность оператора B.

Докажем теперь единственность решения в рассматриваемом классе функций. Для разности двух возможных решений $P = P_1 - P_2$, $R = R_1 - R_2$ выполнены уравнения

(17) $\qquad u_t - n_x = 0,\ v_t - m_x + q = 0,\ w_t - q_x = 0.$

Подставим в неравенство (6) для решения P_1, R_1 в качестве пробной функции $\bar{R} = \bar{R}(t) = R_2(t)$, а для решения P_2, $R_2 - \bar{R} = \bar{R}(t) = R_1(t)$. Складывая полученные соотношения, с учетом уравнений (17) получим

$$\frac{d}{dt} \int_a^b (u^2 + v^2 + w^2)\, dx \leqslant 0.$$

Отсюда следует $u = v = w = 0$. Тогда из уравнений (17) заключаем также $n = m = q = 0$.

Таким образом, установлено существование решения и его единственность в идеальной жесткопластической задаче для балки с учетом сдвига и инерции вращения.

Сделаем замечание, касающееся разрешимости идеальной упругопластической задачи для рассматриваемой модели балки. Существование решения будет установлено, если осуществить переход к пределу при $\delta \to 0$ в задаче (7)—(12) при $\varepsilon = 1$. Обоснование возможности такого перехода проводится примерно так же, как и в теореме 1 для случая жесткопластической задачи. Введем обозначение для билинейной формы

$$C(Q, R) = \int_a^b (zn + gm + hq)\, dx, \quad Q = (z, g, h), \quad R = (n, m, q)$$

и сформулируем соответствующий результат в виде теоремы.

Теорема 2. Пусть $f_i,\ f_{it} \in L^2(Q)$, $i = 1, 2, 3$,

$$P_0 = (u_0, v_0, w_0) \in H_a^1(a, b), \quad R_0 = (n_0, m_0, q_0) \in H_b^1(a, b) \cap K.$$

Тогда существуют и притом единственные функции $P = (u, v, w)$, $R = (n, m, q)$, удовлетворяющие соотношениям (3)—(5) и неравенству

$$C(R_t, \bar{R} - R) + \int_a^b \{u(\bar{n}_x - n_x) + v(\bar{m}_x - m_x) + w(\bar{q}_x - q_x) -$$

$$- v(\bar{q} - q)\}\, dx \geqslant 0 \qquad \forall \bar{R} = (\bar{n}, \bar{m}, \bar{q}) \in K \cap H_b^1(a, b),$$

причем

$$P = P_0,\ R = R_0 \text{ при } t = 0;\ R(t) \in K \text{ почти всюду на } (0, T);$$

$$P, P_t, R_t \in L^\infty(0, T;\ L^2(a, b)),\ R \in L^\infty(0, T;\ H_b^1(a, b)).$$

Рассмотрим теперь модель балки без учета сдвига и инерции вращения. Уравнения равновесия при этом имеют вид $u_t - n_x = f_1$, $w_t - m_{xx} = f_2$. Функции u, w, n, m имеют тот же смысл, что и ранее; f_1, f_2 — продольная н поперечная нагрузки. Предположим, что условие текучести имеет вид $\Phi_1(n, m) = 1$; Φ_1 — выпуклая и непрерывная функция двух переменных такая, что $\Phi_1(0, 0) \leqslant 1$. Считаем скорость пластического течения, определяемую вектором $(u_x - n_t,\ -w_{xx} - m_t)$, ассоциированной с функцией Φ_1. Как и ранее, введем множество

$$K_1 = \{(n, m) | n, m \in L^2(a, b), \Phi_1(n, m) \leqslant 1 \text{ почти всюду в } (a, b)\}.$$

Имеет место следующий результат, относящийся к динамике идеальной упругопластической балки без учета сдвига и инерции вращения.

Теорема 3. Предположим, что $f_i, f_{it} \in L^2(Q)$, $i = 1, 2, 3$;

$$u_0 \in H^1_a(a, b),\ w_0 \in H^2_a(a, b),\ n_0 \in H^1_b(a, b),\ m_0 \in H^2_b(a, b),\ (n_0, m_0) \in K_1.$$

Тогда существуют и притом единственные функции u, w, n, m, обладающие свойствами:

$$\int_a^b (u_t h + n h_x)\, dx = \int_a^b f_1 h dx \qquad \forall h \in H^1_a(a, b); \tag{18}$$

$$\int_a^b (w_t g - m g_{xx})\, dx = \int_a^b f_2 g dx \qquad \forall g \in H^2_a(a, b); \tag{19}$$

$$\int_a^b \{n_t(\bar{n} - n) + m_t(\bar{m} - m) + u(\bar{n}_x - n_x) + w(\bar{m}_{xx} - m_{xx})\}\, dx \geqslant 0 \tag{20}$$

$$\forall (\bar{n}, \bar{m}) \in K_1 \cap V_1,$$

$$u, u_t, w, w_t \in L^\infty(0, T; L^2(a, b)),$$

$$n \in L^\infty(0, T; H^1_b(a, b)),\ m, m_{xx} \in L^\infty(0, T; L^2(a, b)),$$

$$u = u_0,\ w = w_0,\ n = n_0,\ m = m_0 \text{ при } t = 0,$$

причем $(n(t), m(t)) \in K$ почти всюду на $(0, T)$. Здесь $V_1 = \{(n, m) | n \in H^1_b(a, b),\ m, m_{xx} \in L^2(a, b),\ m = m_x = 0$ при $x = b$ (в смысле $H^{-1}/^2$ и $H^{-3}/^2$ соответственно)$\}$.

При доказательстве этой теоремы исходная задача приближается задачей со штрафом. Граничные условия для функций u, w, n, m содержатся в тождествах (18), (19) и неравенстве (20).

И в заключение рассмотрим случай цилиндрической оболочки при осевой симметрии, уравнение равновесия которой можно записать в виде $w_t - m_{xx} - N = f$, где w — скорость прогиба; m — осевой изгибающий момент; N — окружная сила на единицу длины; f — поперечная нагрузка. Пусть условие текучести описывается функцией Φ_2, так что $\Phi_2(m, N) < 1$ соответствует упругому состоянию, а $\Phi_2(m, N) = 1$ — пластическому. Считаем, что $\Phi_2(0, 0) \leqslant 1$, Φ_2 непрерывна и выпукла по совокупности переменных. Вектор скорости пластического течения имеет компоненты $(-w_{xx} - m_t, -w - N_t)$ и ассоциирован с указанным условием текучести. Пусть $K_2 = \{(m, N) | m, N \in L^2(a, b), \Phi_2(m, N) \leqslant 1$ почти всюду в $(a, b)\}$, $V_2 = \{(m, N) | m, m_{xx} \in L^2(a, b), m = m_x = 0$ при $x = b$ (в смысле $H^{-1}/^2$ и $H^{-3}/^2$ соответственно), $N \in L^2(a, b)\}$.

Решение динамической идеальной упругопластической задачи для цилиндрической оболочки существует и единственно. Приведем формулировку соответствующего результата.

Теорема 4. Предположим, что $f, f_t \in L^2(Q)$, $w_0 \in H^2_a(a, b)$, $m_0 \in H^2_b(a, b)$, $N_0 \in L^2(a, b)$, $(m_0, N_0) \in K_2$. Тогда существуют и притом единственные функции w, m, N, удовлетворяющие соотношениям

$$w, w_t, m, m_t, N, N_t \in L^\infty(0, T; L^2(a, b)), \tag{21}$$

$$\int_a^b (w_t h - m h_{xx} - N h)\, dx = \int_a^b f h dx \qquad \forall h \in H^2_a(a, b);$$

$$\int_a^b \{m_t(\bar{m} - m) + N_t(\bar{N} - N) + w(\bar{m}_{xx} - m_{xx}) + w(\bar{N} - N)\}\, dx \geqslant 0 \tag{22}$$

$$\forall(\bar{m}, \bar{N}) \in K_2 \cap V_2;$$

(23) $$w = w_0,\ m = m_0,\ N = N_0 \text{ при } t = 0;$$

(24) $$(m(t),\ N(t)) \in K_2 \text{ почти всюду.}$$

При доказательстве этого результата задача (21)—(24) аппроксимируется следующей ($\delta > 0$ — параметр, который впоследствии устремляется к нулю):

$$w_t^\delta - m_{xx}^\delta - N^\delta = f, \quad m_t^\delta + w_{xx}^\delta + \delta^{-1}B(m^\delta, N^\delta)_1 = 0,$$

$$N_t^\delta + w^\delta + \delta^{-1}B(m^\delta, N^\delta)_2 = 0,$$

$$w^\delta = w_0,\ m^\delta = m_0,\ N^\delta = N_0 \text{ при } t = 0,$$

$$w^\delta = w_x^\delta = 0 \text{ при } x = a; \quad m^\delta = m_x^\delta = 0 \text{ при } x = b.$$

Через $B(m^\delta, N^\delta)_i$ обозначены компоненты оператора штрафа, связанного с множеством K_2 и действующего из $[L^2(a, b)]^2$ в $[L^2(a, b)]^2$.

Поступила 28 IV 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Дюво Г., Лионс Ж.-Л.** Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
2. **Ерхов М. И.** Теория идеально пластических тел и конструкций. М.: Наука, 1978.
3. **Мосолов П. П., Мясников В. П.** Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981.
4. **Мазалов В. И., Немировский Ю. В.** Динамика тонкостенных пластических конструкций.— В кн.: Проблемы динамики упругопластических сред/Под ред. Г. С. Шапиро. Сер. Механика. Новое в зарубежной науке. М.: Мир, 1975.
5. **Вольмир А. С.** Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.

ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ!

В № 1 за 1983 г. допущены следующие опечатки:

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
127	3-я снизу	$v = a(a/r)^2,$	$v = \dot{a}(a/r)^2,$