

УДК 535.385

**ДВИЖЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ СОСТАВНОГО
ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ
ОТСЛОЕНИИ ВДОЛЬ ВНУТРЕННЕЙ ГРАНИЦЫ**

В. А. Сарайкин

*Институт горного дела СО РАН,
630091 Новосибирск*

В [1] рассмотрена плоская задача о трещине сдвига, растущей в безграничной среде. Движение поверхности полупространства при распространении подобного разрыва под углом к поверхности изучалось в [2]. Были получены выражения для ускорений и перемещений точек на свободной поверхности полупространства при падении прямых волн, излученных трещиной.

В настоящей работе изучаются динамические явления в полупространстве, состоящем уже из двух частей: абсолютно жесткой и упругой. Сцепление между ними вначале полное. Границей раздела является полуплоскость, наклоненная под произвольным углом α к свободной поверхности данного составного полупространства. Движение поверхности полупространства обусловлено внутренним динамическим источником — отслоением сдвига, которое возникает и проходит затем в плоскости раздела.

Подобная идеализация позволяет описать процессы, связанные с разрушением, протекающим в условиях круто падающих пластов, при большом перепаде жесткостных характеристик контактирующих друг с другом материалов. Цель работы — оценить перегрузки на поверхности полупространства при падении волн, пришедших от динамического отслоения.

Выберем начало декартовой системы координат на границе раздела в точке на глубине h . Оси направим, как показано на рис. 1. Считаем, что ось z лежит в плоскости раздела, параллельна поверхности полупространства и что в направлении z деформации отсутствуют, а значит, искомое решение является функцией переменных x , y и t — рассматривается плоская деформация. В упругой части полупространства задано начальное статическое напряженное состояние, в котором учитываются как весовость среды, так и возможное дополнительное поджатие в бесконечно удаленных точках. Перемещения в плоскости контакта равны нулю.

Пусть в момент времени $t = 0$ на линии $x = 0$, $y = 0$ ($-\infty < z < \infty$) произошло нарушение жесткого контакта и напряжения сдвига достаточны для того, чтобы вдоль границы

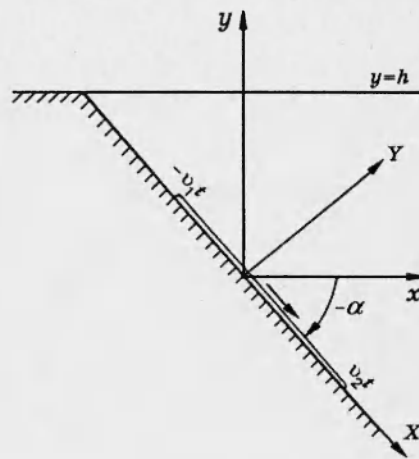


Рис. 1

пошло отслоение. Если X, Y — декартовы координаты, связанные с плоскостью раздела (см. рис. 1), то текущее положение дефекта задается неравенствами $-v_1 t < X < v_2 t$, $Y = 0$ ($-\infty < z < \infty$). Постоянные v_1, v_2 — дозвуковые скорости движения вершин отслоения. В осях X, Y известное начальное состояние обозначим так:

$$\sigma_{YX}^0 = \sigma_0(X, Y) < 0, \quad \sigma_{XY}^0 = \tau_0(X, Y) > 0. \quad (1)$$

Считается, что на отслоении при сомкнутых берегах (нижний неподвижен, а верхний скользит по нему) происходит динамический сброс касательного напряжения, пропорциональный нормальному напряжению:

$$\sigma_{XY}(t, X, 0) = -k\sigma_{YX}(t, X, 0) \quad (k = \text{const}, \quad k > 0)$$

($\sigma_{ij}(t, X, 0)$ — напряжения на подвижке). Поле напряжений $\sigma_{ij}(t, X, Y)$, изменившееся из-за подвижки, складывается из начального статического (1) и динамического $p_{ij}(t, X, Y)$:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{\text{ст}} + p_{ij}.$$

Для искомого динамического состояния на отслоении и на границе контакта при $t < h/(v_1 \sin \alpha)$, пока вершина отслоения не достигла поверхности полупространства, должны быть выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} p_{XY}(t, X, 0) &= -\tau_0(X, 0) - k\sigma_0(X, 0) - kp_{YX}(t, X, 0) \quad (-v_1 t < X < v_2 t), \\ U(t, X, 0) &= 0 \quad (X < -v_1 t, X > v_2 t), \\ V(t, X, 0) &= 0 \quad (-h/\sin \alpha < X < \infty). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь U, V — компоненты вектора перемещений.

Отметим, что в условии сухого трения на отслоении два искомого напряжения не заданы явно, а лишь связаны друг с другом. Если $k = 0$, условия (2) описывают отслоение сдвига без трения на поверхности. Величина полностью сбрасываемого при этом касательного напряжения равна $-\tau_0$. Итак, условия (2) определяют источник возмущений неявным образом. Источник станет известен и его можно задать в перемещениях, если будет найдена подвижка $U(t, X, 0)$ на отслоении.

На поверхности $y = h$ отсутствует нагрузка — в осях x, y там равны нулю напряжения:

$$\sigma_{yy}(t, x, h) = \sigma_{xy}(t, x, h) = 0. \quad (3)$$

Краевую задачу (2), (3) замыкают нулевые начальные условия. Отсчет перемещений ведется от достигнутых в статическом состоянии, что не сказывается на граничных условиях (2).

Рассмотрим краевую задачу (2) для моментов времени, пока продольная волна, излученная дефектом и отразившаяся от поверхности полупространства, не достигла поверхности отслоения. В этом интервале времени источник возмущений — величину подвижки при отслоении — можно найти, решив задачу о динамическом отслоении, распространяющемся вдоль границы контакта упругого и недеформируемого полупространств, т. е. без учета взаимодействия волн, отраженных от поверхности упругого полупространства, с дефектом. Для больших моментов времени неучет таких волн в (2) может быть отчасти оправдан, если расстояние от отслоения до поверхности велико, а потому влияние возвратных волн на дефект и тем более на движение поверхности полупространства при последующих отражениях не столь существенно из-за убывания амплитуды с пройденным волной путем.

Применив интегральные преобразования Лапласа L по времени и Фурье F по координате X (параметры преобразований s, q), получим связь

между изображениями перемещений и компонент вектора напряжений на границе [3]:

$$\begin{aligned} \mu U^{LF}(s, q, 0) &= S_{11} p_{XY}^{LF}(s, q, 0) + S_{12} p_{YY}^{LF}(s, q, 0), \\ \mu V^{LF}(s, q, 0) &= -S_{12} p_{XY}^{LF}(s, q, 0) + S_{22} p_{YY}^{LF}(s, q, 0), \quad (4) \\ S_{11} &= -\frac{a_2^2 s^2 n_2}{R}, \quad S_{22} = -\frac{a_1^2 s^2 n_1}{R}, \quad S_{12} = -\frac{iq(n_2^2 + q^2 - 2n_1 n_2)}{R}, \\ R &= (n_2^2 + q^2)^2 - 4q^2 n_1 n_2, \quad n_i = \sqrt{q^2 + a_i^2 s^2} \quad (i = 1, 2). \end{aligned}$$

Здесь μ — модуль сдвига; a_1, a_2 — величины, обратные скоростям продольной и поперечной волн в деформируемой части полупространства.

Будем искать касательные напряжения в виде суммы:

$$p_{XY}(t, X, Y) = -k p_{YY}(t, X, Y) + f(t, X, Y). \quad (5)$$

При таком выборе p_{XY} граничное значение новой искомой функции f на отслоении известно, как следует из (2), оно имеет вид (третий аргумент у функций в граничных точках далее всюду опускаем)

$$f(t, X) = -\tau_0(X) - k\sigma_0(X) \quad (-v_1 t < X < v_2 t). \quad (6)$$

После замены (5) с учетом условия $V = 0$, которое выполняется на всей границе контакта полупространства, соотношения (4) преобразуются в следующие:

$$\begin{aligned} \mu s U^{LF}(s, q) &= \frac{s}{iq} W\left(\frac{s}{iq}\right) f^{LF}(s, q), \quad (7) \\ W\left(\frac{s}{iq}\right) &= \frac{iq(q^2 - n_1 n_2)}{D}, \quad D = ikq(n_2^2 + q^2 - 2n_1 n_2) + a_2^2 s^2 n_1. \end{aligned}$$

В выражениях (7) на границе контакта удовлетворено пока лишь одному граничному условию $V = 0$. Условия на продолжении отслоения относительно перемещения U и на отслоении для функции f следует учесть в первом выражении (7), в котором связаны изображения указанных функций и которое, таким образом, является уравнением для определения двух функций U, f в тех точках, где они неизвестны.

В рассматриваемом промежутке времени в задаче будут отсутствовать характерные единицы измерения длины и времени, если на линии контакта вектор напряжений начального статического состояния приблизить суммами вида

$$\sigma_0(X) = \sum_{n=0}^N \sigma_n^0 X^n, \quad \tau_0(X) = \sum_{n=0}^N \tau_n^0 X^n \quad (\sigma_n^0 = \text{const}, \tau_n^0 = \text{const}). \quad (8)$$

Предположим, что такая аппроксимация имеет место и что коэффициенты σ_n^0, τ_n^0 известны. Тогда неизвестное на контакте решение динамической задачи представляется в виде суммы решений автомодельных задач

$$p_{yy} = \sum_{n=0}^N p_{n yy}(X/t) t^n, \quad p_{xy} = \sum_{n=0}^N p_{n xy}(X/t) t^n, \quad f = \sum_{n=0}^N f_n(X/t) t^n,$$

степень однородности которых n связана с номером соответствующего в (8) граничного значения, так как, например,

$$\sigma_0(X) = \sum_{n=0}^N \sigma_n^0 \left(\frac{X}{i}\right)^n t^n.$$

Таким образом, для каждого n решение сводится к решению уравнения (7) с условиями, определяемыми из (2), (8) (в дальнейшем индекс n у функций для краткости опускаем):

$$\begin{aligned} f(t, X) &= -(\tau_n^0 + k\sigma_n^0) X^n & (-v_1 t < X < v_2 t), \\ U(t, X) &= 0 & (X < -v_1 t, X > v_2 t). \end{aligned} \quad (9)$$

Зависимость f от t, X такова: $f(t, X) = t^n Q(X/t)$.

Решение автомодельных задач (7), (9) будем отыскивать, следуя [3, 4].

Изображение Лапласа и Фурье функций вида $t^n Q(X/t)$ — однородная функция параметров преобразований

$$f^{LF} = s^{-n-2} Q_0(s/iq).$$

Обращение однородных изображений осуществляется по формуле (см. [3, 5])

$$f(t, X) = \hat{f}_+(t, X) - \hat{f}_-(t, X). \quad (10)$$

$$\hat{f}(t, z) = -\frac{1}{2\pi i z n!} \int_0^{\pm} (t - \tau)^n Q_0(z/\tau) d\tau \quad (z = X + i\xi).$$

Здесь кусочно-аналитическая функция $\hat{f}(t, z)$ — аналитическое представление функции $f(t, X)$ [6], индексы \pm относятся к предельным значениям этой функции при $z \rightarrow X \pm i0$, скачок которых, как следует из (10), равен $f(t, X)$.

Обращая изображения (7) по формуле (10), получаем уравнение относительно аналитических представлений функций U и f :

$$k\hat{U}^{(n+2)}(t, z) = \frac{z}{t} W(z/t) \hat{f}^{(n+1)}(t, z),$$

$$W(z/t) = \frac{1 + n_1 n_2}{k[2 + 2n_1 n_2 - (a_2 z/t)^2] - (a_2 z/t)^2 n_1}, \quad (11)$$

$$n_i = \sqrt{(a_i z/t)^2 - 1}, \quad n_i > 0 \quad (X/t > a_i^{-1}, \xi = 0, i = 1, 2)$$

(индексы в круглых скобках указывают порядок производной по времени). Однозначные ветви радикалов n_i на плоскости z/t выделены разрезами на вещественной оси $(-a_i^{-1}, a_i^{-1})$, при этом значения радикалов на вещественной оси определяются так:

$$n_i = \begin{cases} \operatorname{sgn}(X) \sqrt{(a_i X/t)^2 - 1} & (|X/t| > a_i^{-1}, \xi = 0), \\ \pm i \sqrt{1 - (a_i X/t)^2} & (|X/t| < a_i^{-1}, \xi = \pm 0). \end{cases}$$

Решение уравнения (7) относительно изображений сведено к решению уравнения (11) относительно двух кусочно-аналитических функций, причем из (9) известны скачки их производных по времени:

$$\begin{aligned} U^{(n+2)} &= \hat{U}_+^{(n+2)} - \hat{U}_-^{(n+2)} = 0 & (X < -v_1 t, X > v_2 t), \\ f^{(n+1)} &= \hat{f}_+^{(n+1)} - \hat{f}_-^{(n+1)} = 0 & (-v_1 t < X < v_2 t). \end{aligned} \quad (12)$$

Решение уравнения (11) с условиями (12) находится при помощи вспомогательной функции

$$w(z/t) = (z/t + v_1) \exp \left[-\frac{1}{\pi} \int_{-v_1}^{v_2} \operatorname{arctg} \varphi(\eta) \frac{d\eta}{\eta - z/t} \right],$$

$$\varphi(\eta) = \frac{a_2^2 \eta^2 \sqrt{1 - a_1^2 \eta^2}}{k \left[2 - 2\sqrt{1 - a_1^2 \eta^2} \sqrt{1 - \frac{a_2^2}{a_1^2} \eta^2} - a_2^2 \eta^2 \right]}, \quad (13)$$

построенной так, чтобы был известен скачок функции

$$\Omega(t, z) = \frac{t}{z} w\left(\frac{z}{t}\right) \widehat{U}^{(n+2)} = w\left(\frac{z}{t}\right) W\left(\frac{z}{t}\right) \widehat{f}^{(n+1)}$$

на всей вещественной оси [7].

Как следует из (9), скачок функции Ω всюду на оси, кроме точек смены граничных условий, равен нулю, поэтому она имеет вид [3]

$$\Omega(t, z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^n \left[\frac{t^j A_j}{(z + v_1 t)^{j+1}} + \frac{t^j B_j}{(z - v_2 t)^{j+1}} \right],$$

т. е. скачок Ω — сосредоточенная в точках $X = v_2 t$ и $X = -v_1 t$ функция.

Учитывая (13), имеем решение функционального уравнения (11):

$$\mu \widehat{U}^{(n+2)}(t, z) = \frac{z \Omega(t, z)}{t w(z/t)}, \quad \widehat{f}^{(n+1)}(t, z) = \frac{\Omega(t, z)}{w(z/t)W(z/t)}.$$

Постоянные A_j, B_j находятся из граничного условия (9) относительно f . Интегрируя в решении \widehat{f} по времени, получим

$$\begin{aligned} f(t, X) &= T_0 H(v_1 t + X) + \frac{1}{n!} \int_0^{-X/v_1} (t - \tau)^n \Phi_1\left(\frac{X}{\tau}\right) \frac{d\tau}{\tau} \quad (-v_1 t < X < 0), \\ f(t, X) &= T_0 H(v_2 t - X) + \frac{1}{n!} \int_0^{X/v_2} (t - \tau)^n \Phi_2\left(\frac{X}{\tau}\right) \frac{d\tau}{\tau} \quad (0 < X < v_2 t), \end{aligned} \quad (14)$$

$$T_0 = -(\tau_n^0 + k\sigma_n^0)X^n,$$

где $H(\dots)$ — функции Хевисайда; Φ_1, Φ_2 — скачки функции $\Phi(z/t) = t\Omega(t, z)/[w(z/t)W(z/t)]$ на интервалах $(-v_1 t < X < 0)$ и $(0 < X < v_2 t)$.

Очевидно, чтобы выполнялось граничное условие (9) относительно f , необходимо в (14) приравнять нулю интегралы, которые после замены переменной интегрирования принимают вид

$$\int_0^{1/v_1} \Phi_1\left(-\frac{1}{\eta}\right) \eta^{-m-1} d\eta = 0, \quad \int_0^{1/v_2} \Phi_2\left(\frac{1}{\eta}\right) \eta^{-m-1} d\eta = 0 \quad (m = 0, 1, \dots, n).$$

Данные равенства позволяют найти все постоянные A_j, B_j .

Для простоты выкладок ограничимся в разложении напряжений только первыми членами, т. е. полагаем далее $n = 0$. Постоянные A, B для этого случая вычислены в [7]:

$$\begin{aligned} \Omega(t, z) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{A}{z + v_1 t} + \frac{B}{z - v_2 t} \right), \\ Av_2 - Bv_1 &= 0, \quad A + B = \pi(\tau_0 + k\sigma_0)/J, \\ J &= \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(v_1 + \gamma + i\xi)(v_2 - \gamma - i\xi)w(\gamma + i\xi)W(\gamma + i\xi)}, \quad \gamma = \frac{v_2 - v_1}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, источник возмущений при отслоении найден. Решив задачу о полупространстве $Y > 0$ при заданных на поверхности $Y = 0$ условиях

$$U(t, X, 0) = tu_0(X/t), \quad V(t, Y, 0) = 0,$$

определим перемещения в волнах, идущих к границе $y = h$. Чтобы можно было это осуществить, необходимо знать LF -изображение функции U на границе. Заметим, что функция U при $n = 0$ — однородная функция степени -3

$$U^{LF} = s^{-3}U_0(s/iq),$$

а с другой стороны, как следует из (10), ей соответствует аналитическое представление

$$\hat{U}(t, z) = -\frac{1}{2\pi z} \int_0^t (t - \tau) U_0(z/\tau) d\tau,$$

$$U_0(z/\tau) = -\frac{\pi Cz/\tau}{(1 + v_1\tau/z)(1 - v_2\tau/z)w(z/\tau)}, \quad C = \frac{A + B}{\pi\mu} = \frac{\tau_0 + k\sigma_0}{\mu J}.$$

Сравнив полученные выражения, имеем

$$U_0(s/q) = \pi i C \frac{s/q}{(1 + iv_1q/s)(1 - iv_2q/s)w(s/iq)}.$$

После этого легко находятся изображения перемещений в волне, распространяющейся в полупространстве $Y > 0$:

$$\begin{aligned} s^3 U^{LF}(s, q, Y) &= \frac{U_0(s/iq)}{q^2 - n_1 n_2} (q^2 e^{-n_1 Y} - n_1 n_2 e^{-n_2 Y}), \\ s^3 V^{LF}(s, q, Y) &= -\frac{im_1 U_0(s/iq)}{q^2 - n_1 n_2} (e^{-n_1 \bar{r}} - e^{-n_2 \bar{r}}), \end{aligned} \quad (15)$$

$$n_i = \sqrt{a_i^2 s^2 + q^2}.$$

Остается учесть взаимодействие полученных волн с границей $y = h$, решив задачу об отражении их от свободной границы полупространства. Для этого следует вначале перейти из системы координат X, Y в систему x, y , пересчитать перемещения (15) по формуле $u + iv = (U + iV)e^{i\alpha}$ и провести преобразование Фурье \mathcal{F} вдоль x (параметр преобразования p), связав его с преобразованием Фурье F по X в выражениях (15), как это было сделано в [2]. После такого пересчета, удовлетворив условиям (3), получим LF -изображения перемещений в волне с учетом отражения продольной и поперечной волн от границы. На границе $y = h$ изображения перемещений имеют вид

$$\begin{aligned} s^3 u^{LF}(s, p, h) &= 4 ipm_2 F_1(p/s) e^{-m_1 h} + 2(a^2 s^2 + 2p^2) F_2(p/s) e^{-m_2 h}, \\ s^3 v^{LF}(s, q, h) &= 2(a_2^2 s^2 + 2p^2) F_1(p/s) e^{-m_1 h} - 4 ipm_1 F_2(p/s) e^{-m_2 h}, \end{aligned}$$

$$F_1(\bar{r}/s) = \frac{a_2^2 s^4 q_1 (p \sin \alpha + im_1 \cos \alpha)}{[n_1(q_1)n_2(q_1) - q_1^2]R} U_0(s/iq_1),$$

$$F_2(p/s) = -\frac{ia_2^2 s^4 n_1(q_2)(p \sin \alpha + im_2 \cos \alpha)}{[n_1(q_2)n_2(q_2) - q_2^2]R} U_0(s/iq_2),$$

$$R = (m_2^2 + p^2)^2 - 4p^2 m_1 m_2,$$

$$m_j = \sqrt{a_j^2 s^2 + p^2}, \quad n_j(q_j) = \sqrt{a_j^2 s^2 + q_j^2}, \quad iq_j = p \cos \alpha - im_j \sin \alpha.$$

Обращение данных изображений с однородными функциями-множителями при экспонентах было осуществлено при помощи аналитических представлений [3, 5]. Вертикальная составляющая ускорения на поверхности, полученная после обращения, вычисляется по формулам

$$\ddot{v}(t, x, h) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ (a_1^2 + 2\xi_1^2) F_1(\xi_1) \frac{\partial \xi_1}{\partial t} H(t - a_1 h) - \right. \\ \left. - 4i\xi_2 m_1(\xi_2) F_2(\xi_2) \frac{\partial \xi_2}{\partial t} H(t - a_2 h) \right\}, \quad m_j(\xi_j) = \sqrt{a_j^2 + \xi_j^2}.$$

Здесь ξ_j — корни уравнения $h\sqrt{a_j^2 + \xi^2} - iz\xi = t$ ($z = x + i0$):

$$\xi_j = -\frac{itx}{h^2 + x^2} + \frac{h}{h^2 + x^2} \begin{cases} \sqrt{t^2 - a_j^2(h^2 + x^2)}, & t^2 > a_j^2(h^2 + x^2), \\ i \operatorname{sgn}(x) \sqrt{a_j^2(h^2 + x^2) - t^2}, & t^2 < a_j^2(h^2 + x^2). \end{cases}$$

При вычислении комплексных радикалов знаки действительной и мнимой частей удовлетворяют неравенствам

$$\operatorname{Re} m_j(\xi_j) \geq 0, \quad x \operatorname{Im} m_j(\xi_j) \leq 0.$$

Расчеты, представленные на рис. 2–4, проведены для $k = 0$. Единица измерения служат глубина h , на которой начинается подвижка, и скорость волны сдвига a_2^{-1} . Коэффициент Пуассона полагался равным 0,25.

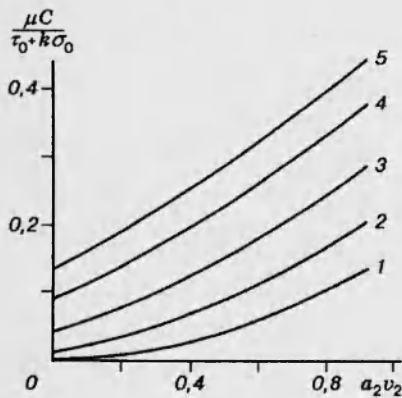


Рис. 2

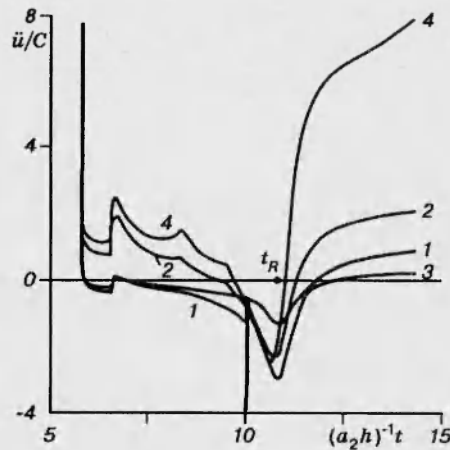


Рис. 3

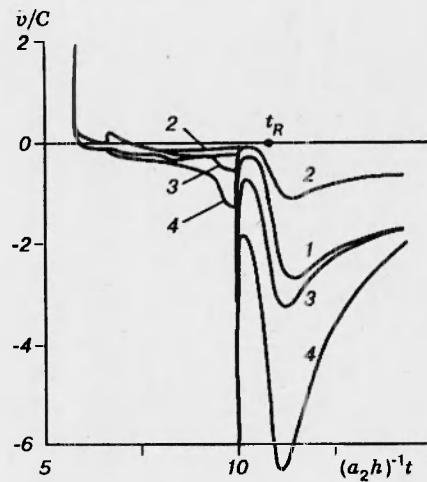


Рис. 4

На рис. 2 показана зависимость C от v_2 при $a_2 v_1 = 0; 0,25; 0,5; 0,75; 0,9$ (кривые 1–5 соответственно). На рис. 3, 4 представлены горизонтальные \ddot{u} и вертикальные \ddot{v} составляющие ускорения частицы на поверхности полупространства в точке с координатами (10,1) при $\alpha = 0$ (кривая 1 — $v_1 = 0,25, v_2 = 0$, 2 — $v_1 = 0, v_2 = 0,25$) и при $\alpha = -\pi/6$ (кривая 3 — $v_1 = 0,25, v_2 = 0$, 4 — $v_1 = 0, v_2 = 0,25$). Точка t_R отвечает времени прихода рэлеевской волны из эпицентра в точку наблюдения. Видно, что направление вспарывания может в 1,5–2 раза изменить амплитуды ускорений на фронте рэлеевской волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Костров Б. В. Автомодельные задачи о распространении трещины касательного разрыва // Прикл. математика и механика. 1967. Т. 28, вып. 5. С. 889–898.
2. Сарайкин В. А. Движение свободной границы полупространства при распространении наклонной прямолинейной трещины // ПМТФ. 1990. № 1. С. 130–136.
3. Слепян Л. И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1990.
4. Сарайкин В. А., Слепян Л. И. Плоская задача о динамике трещины в упругом теле // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 4. С. 53–73.
5. Слепян Л. И. Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972.
6. Бремерман Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. М.: Мир, 1968.
7. Сарайкин В. А. Влияние сухого трения на поверхности растущего отслоения сдвига на величину концентрации напряжений // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 2. С. 166–172.

Поступила в редакцию 27/VII 1994 г.