*Прикладная механика и техническая физика, 1997, т. 38, № 3*

УДК 539.37

# ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ

**И. Ю. Цвелодуб**

**Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск**

Рассматриваются два класса обратных задач о нахождении в заданном интервале времени $[0, t_*]$ силовых и кинематических внешних воздействий, обеспечивающих при $t = t_*$ требуемые остаточные перемещения точек поверхности физически нелинейного вязкоупругого тела при нулевых внешних нагрузках в этот момент времени. Показана корректность соответствующих постановок, обоснованы итерационные методы решения, даны оценки скорости сходимости последовательных приближений к точному решению. Оцениваются уровень остаточных напряжений в теле в момент $t = t_*$, а также изменение уровня остаточных перемещений тела при $t > t_*$ в отсутствие внешних сил за счет релаксации остаточных напряжений.

**1. Постановка обратных задач.** Пусть равномерно прогретое тело занимает область $V$ с границей $S$, удовлетворяющей необходимым условиям гладкости [1]. Уравнения, определяющие процесс его деформирования, имеют вид

$$\varepsilon_{kl} = a_{klmn}\sigma_{mn} + \varepsilon^c_{kl}, \tag{1.1}$$

где $\varepsilon_{kl}$, $\varepsilon^c_{kl}$, $\sigma_{kl}$ — компоненты тензоров полных и вязких деформаций и напряжений; $a_{klmn}$ — компоненты тензора упругих податливостей, обладающие известными свойствами симметрии и положительной определенности [1], т. е.

$$a_{klmn}\sigma_{kl}\sigma_{mn} \geqslant a\sigma_{kl}\sigma_{kl}, \qquad a > 0. \tag{1.2}$$

Здесь и ниже принято обычное правило суммирования по повторяющимся индексам; $k$, $l$ = 1, 2, 3. Деформации $\varepsilon_{kl}$ являются малыми и выражаются через компоненты вектора перемещений $u_k$ соотношениями Коши:

$$\varepsilon_{kl} = (1/2)(u_{k,l} + u_{l,k}) \tag{1.3}$$

(индекс после запятой означает производную по соответствующей координате).

Компоненты скоростей вязких деформаций $\dot{\varepsilon}^c_{kl} = \eta_{kl}$ — непрерывные функции напряжений:

$$\eta_{kl} = \eta_{kl}(\sigma_{mn}). \tag{1.4}$$

Соотношения (1.1), (1.4) вполне удовлетворительно описывают изотермический процесс ползучести неупрочняющихся материалов, у которых отсутствует первая стадия ползучести. К последним относятся, например, металлические материалы при невысоких уровнях напряжений (т. е. при достаточно длительных процессах деформирования) и при кратковременной ползучести в условиях очень высокой температуры и высоких уровней напряжений [2].

Предполагаем, что функции (1.4) удовлетворяют следующему условию, обобщающему постулат устойчивости [3]:

$$\begin{gathered}\Delta\eta_{kl}\Delta\sigma_{kl} \geqslant \lambda a_{klmn}\Delta\sigma_{kl}\Delta\sigma_{mn}, \qquad \lambda = \text{const}, \qquad \lambda > 0\\ (\Delta\sigma_{kl} = \sigma^{(1)}_{kl} - \sigma^{(2)}_{kl}, \qquad \Delta\eta_{kl} = \eta_{kl}(\sigma^{(1)}_{mn}) - \eta_{kl}(\sigma^{(2)}_{mn})).\end{gathered} \tag{1.5}$$

Легко видеть, что в силу (1.2), (1.5) зависимости (1.4) обратимы, т. е. по известным компонентам скоростей $\eta_{kl}$ однозначно определяются напряжения $\sigma_{kl} = \sigma_{kl}(\eta_{mn})$. (Действительно, при $\Delta\eta_{kl} = 0$ из (1.2) и (1.5) следует $\Delta\sigma_{kl}\Delta\sigma_{kl} \leqslant 0$, что возможно только при $\Delta\sigma_{kl} = 0$.) Считаем, что эти функции удовлетворяют условию, аналогичному (1.5):

$$\Delta\eta_{kl}\Delta\sigma_{kl} \geqslant \lambda_1 b_{klmn}\Delta\eta_{kl}\Delta\eta_{mn}, \qquad \lambda_1 = \text{const}, \qquad \lambda_1 > 0. \tag{1.6}$$

Здесь $b_{klmn}$ — компоненты тензора упругих модулей, который является обратным $a_{klmn}$, так что

$$a_{klmn}b_{klij} = \delta_{im}\delta_{jn} \tag{1.7}$$

($\delta_{kl}$ — компоненты единичного тензора).

Заметим, что зависимости (1.4) можно обобщить, введя в правую часть время $t$: $\eta_{kl} = \eta_{kl}(\sigma_{mn}, t)$, что отвечает так называемым теориям старения [2], которые, несмотря на известные недостатки, хорошо описывают процесс ползучести при постоянных или медленно меняющихся напряжениях. В этом случае в формулах (1.5) и (1.6) должно быть $\lambda = \lambda(t) > 0$ и $\lambda_1 = \lambda_1(t) > 0$ соответственно, причем на рассматриваемом в дальнейшем интервале $[0, t_*]$ эти функции можно считать постоянными, для чего достаточно положить $\lambda = \min\limits_{0\leqslant t\leqslant t_*} \lambda(t)$ и $\lambda_1 = \min\limits_{0\leqslant t\leqslant t_*} \lambda_1(t)$.

Необходимые и достаточные условия выполнимости неравенств (1.5) и (1.6) для самых общих зависимостей вида (1.4) в изотропных средах можно получить, используя результаты [3, гл. 3] и учитывая, что (1.5) и (1.6) соответственно эквивалентны условиям неотрицательности квадратичных форм:

$$\Bigl(\frac{\partial\eta_{kl}}{\partial\sigma_{mn}} - \lambda a_{klmn}\Bigr)\xi_{kl}\xi_{mn}, \qquad \Bigl(\frac{\partial\sigma_{kl}}{\partial\eta_{mn}} - \lambda_1 b_{klmn}\Bigr)\xi_{kl}\xi_{mn}.$$

Для анизотропных сред в качестве примера укажем потенциальные зависимости $\eta_{kl} = \partial\Phi/\partial\sigma_{kl} = \eta\partial s/\partial\sigma_{kl}$, $\Phi = \Phi(s)$, $\eta(s) = \Phi'(s)$, $s^2 = a_{klmn}\sigma_{kl}\sigma_{mn}$, для которых (1.5), (1.6) имеют место, если [4] $\lambda \leqslant (\eta/s, \eta') \leqslant \lambda_1^{-1}$.

Последним неравенствам удовлетворяют, например, следующие известные функции: $\eta = B[\exp(\lambda s/B) - 1]$, $\eta = B\,\mathrm{sh}(\lambda s/B)$, $\eta = Bs/(B/\lambda - s)$ $\quad (B = \text{const})$, если положить $\lambda_1^{-1} = \eta'(s_*)$; $s_*$ — наибольшее возможное значение $s$, например, $s_* = \sigma_{\text{т}}$ ($\sigma_{\text{т}}$ — предел текучести), поскольку пластические деформации отсутствуют, т. е. $s < \sigma_{\text{т}}$.

Обратную задачу о деформировании тела, находящегося при $t < 0$ в естественном состоянии, в заданное остаточное состояние можно сформулировать следующим образом: каким внешним воздействиям нужно подвергать поверхность $S$ (массовые силы отсутствуют) в интервале времени $[0, t_*]$, чтобы в момент $t = t_*$ внешние силы отсутствовали, а остаточные перемещения $\tilde{u}_k$ точек поверхности $S$ принимали заданные значения $\tilde{u}_{k*}$?

Выделим конкретные классы силовых и кинематических внешних воздействий, когда в интервале времени $[0, t_0]$ нагрузки или перемещения на поверхности $S$ изменяются по заданному во времени закону, но с неизвестными значениями при $t = t_0$, а затем в интервале $[t_0, t_*]$ внешние силы снимаются, т. е. происходит медленная разгрузка так, что при $t = t_*$ остаточные перемещения $\tilde{u}_k = \tilde{u}_{k*}$ на $S$. Итак, рассмотрим следующие задачи.

**Задача 1.** *Требуется определить величины $p_{k0}$ такие, чтобы при внешних нагрузках $p_k = f(t)p_{k0}$, приложенных к поверхности $S$, где $f(t)$ — заданная неотрицательная функция ($f(0) = 0$, $\dot{f}(0) > 0$, $\dot{f}(t) \geqslant 0$ $(0 < t \leqslant t_0)$, $f(t_0) = 1$, $\dot{f}(t) \leqslant 0$ $(t_0 < t < t_*)$, $f(t_*) = 0$), выполнялось следующее условие: остаточные перемещения $\tilde{u}_k = \tilde{u}_{k*}$ на $S$ при $t = t_*$.*

**Задача 2.** *Требуется определить величины $u_{k0}$ такие, чтобы при перемещениях $u_k = \varphi(t)u_{k0}$ $(0 \leqslant t \leqslant t_0)$ на $S$ и последующей разгрузке, когда внешние нагрузки $p_k = f(t)p_{k0}$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_*)$, выполнялось следующее условие: остаточные перемеще-*

*ния* $\tilde{u}_k = \tilde{u}_{k*}$ *на* $S$ *при* $t = t_*$. *Здесь* $\varphi(t)$ *и* $f(t)$ *— заданные функции* ($\varphi(0) = 0$, $\varphi(t_0) = f(t_0) = 1$, $\dot{f}(t) \leqslant 0$ $(t_0 < t < t_*)$, $f(t_*) = 0$).

В обеих задачах считается, что при $t < 0$ тело находилось в недеформированном состоянии, поэтому, согласно (1.1) и (1.4), для вязких деформаций $\varepsilon^c_{kl}$ всюду в $V$

$$\varepsilon^c_{kl}\Big|_{t=0} = 0. \tag{1.8}$$

Сформулированные задачи рассматриваются в рамках обычной квазистатической постановки, общепринятой в теории ползучести металлических материалов [2–4], когда динамические члены в уравнениях равновесия не учитываются. При этом считается, что массовые силы отсутствуют, следовательно, упомянутые уравнения имеют вид [4]

$$\sigma_{kl,l} = 0. \tag{1.9}$$

Таким образом, система уравнений для обеих задач включает определяющие уравнения (1.1) и (1.4), соотношения Коши (1.3) и уравнения равновесия (1.9). Начальные условия имеют вид (1.8), а искомые граничные условия фигурируют в формулировках задач 1 и 2. Заметим, что последние при $t_0 = t_*$ совпадают с задачами 1 и 2 из [4] и отвечают случаю мгновенной упругой разгрузки в момент $t = t_*$.

**2. Вспомогательные предложения.** Через $\tilde{u}_k$ обозначим текущие остаточные перемещения, которые остались бы в области $V$ в рассматриваемый момент времени $t$ после мгновенного снятия текущих внешних нагрузок $p_k$ на $S$ и упругой разгрузки. Этим перемещениям соответствуют согласно (1.3) остаточные деформации $\tilde{\varepsilon}_{kl}$, причем

$$\tilde{\varepsilon}_{kl} = a_{klmn}\rho_{mn} + \varepsilon^c_{kl}, \tag{2.1}$$

где $\rho_{kl}$ — остаточные напряжения, возникающие в теле в момент $t$ после указанной разгрузки. При этом [3, 4]

$$\sigma_{kl} = \sigma^e_{kl} + \rho_{kl}. \tag{2.2}$$

Здесь $\sigma^e_{kl}$ — компоненты напряжений, отвечающих решению чисто упругой задачи с теми же нагрузками $p_k$ на $S$ и в тот же момент $t$, так что напряжениям $\rho_{kl}$ соответствуют нулевые нагрузки на $S$.

Введем следующие обозначения для часто используемых в дальнейшем величин:

$$I_1(\sigma_{kl}) = \Big(\int_V \frac{1}{2} a_{klmn}\sigma_{kl}\sigma_{mn}\,dV\Big)^{1/2}, \quad I_2(\varepsilon_{kl}) = \Big(\int_V \frac{1}{2} b_{klmn}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{mn}\,dV\Big)^{1/2}, \quad I_3(t) = \int_V \Delta\eta_{kl}\Delta\sigma_{kl}\,dV,$$

$$I_4(t) = \Big(\int_0^t I_2^2(\Delta\eta_{kl})\,dt\Big)^{1/2}, \quad I_5(t) = \Big(\int_0^t I_1^2(\Delta\sigma^e_{kl})\,dt\Big)^{1/2} = \Big(\int_0^t \|\Delta \mathrm{u}^e\|^2 dt\Big)^{1/2}, \quad g(t) = \int_0^t f^2\,dt,$$

$$g_1(t) = \int_0^t f\,dt, \qquad \beta(t) = \exp(-\lambda t)\int_0^t |\dot{\varphi}|\exp(\lambda t)\,dt, \qquad \beta_0 = \beta(t_0),$$

$$\gamma = \lambda^{-1}\lambda_1^{-1}, \quad c_1 = \lambda[g_1(t_0) - (t_* - t_0)^{1/2}[\gamma^2 g(t_*) - g(t_0)]^{1/2}], \quad c_2 = \lambda_1^{-1}\sqrt{t_* g(t_*)},$$

$$c_3 = 1 - \beta_0 - [(t_* - t_0)(c_4 - \lambda^2 c_5)]^{1/2}, \quad c_4 = \lambda_1^{-2}(c_5 + c_6), \quad c_5 = \int_0^{t_0} \beta^2\,dt, \quad c_6 = \beta_1^2 \int_{t_0}^{t_*} f^2\,dt,$$

$$c_7 = \int\limits_0^{t_0} \beta\, dt, \quad c_8 = \frac{1-\beta_0^2}{2\lambda}, \quad c_9 = \gamma^{-2}\beta_0^{-2}\Big[\frac{(1-\beta_0)^2}{\lambda^2(t_*-t_0)} - (\gamma^2-1)c_8\Big],$$

$$c_{10} = \lambda(\gamma-1)(c_8+c_6)\{1-\beta_0-\lambda(t_*-t_0)^{1/2}[(\gamma^2-1)c_8+\gamma^2 c_6]^{1/2}\}^{-2}.$$

Пусть $\bar\sigma^e_{kl}$ — поле напряжений, а $\bar\varepsilon^e_{kl} = a_{klmn}\bar\sigma^e_{kl}$ — поле деформаций, соответствующих решению упругой задачи при заданных на $S$ перемещениях $u_k$. Как известно [1], величина $\|\mathbf{u}\| = I_1(\bar\sigma^e_{kl}) = I_2(\bar\varepsilon^e_{kl})$ может служить нормой для поля перемещений, если из последних исключить смещение тела как жесткого целого. Иначе говоря, величина $\|\mathbf{u}\|$ является нормой для поля $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{\Pi u}$, где $\mathbf{\Pi}$ — оператор ортогонального проектирования (относительно скалярного произведения в $(L^2(V))^3$) на множество жестких смещений. В дальнейшем под $\mathbf{u}$ подразумевается множество перемещений за вычетом смещения тела как жесткого целого, т. е. поле $\mathbf{w}$. Поэтому если речь пойдет о единственности решения соответствующей задачи в перемещениях (задачи 2), то под этим будет пониматься единственность определения поля $\mathbf{w}$. Указанная выше норма порождается следующим скалярным произведением:

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \int\limits_V \frac{1}{2}\, a_{klmn}\bar\sigma^{e(1)}_{kl}\bar\sigma^{e(2)}_{mn}\, dV = \int\limits_V \frac{1}{2} b_{klmn}\bar\varepsilon^{e(1)}_{kl}\bar\varepsilon^{e(2)}_{mn}\, dV.$$

Заметим, что напряжениям $\sigma^e_{kl}$ из (2.2) отвечают упругие перемещения $u^e_k$ (решение упругой задачи при заданных на $S$ внешних нагрузках $p_k$), так что $\|\mathbf{u}^e\| = I_1(\sigma^e_{kl}) = I_2(\varepsilon^e_{kl})$, где $\varepsilon^e_{kl} = a_{klmn}\sigma^e_{mn}$.

Пусть на $S$ заданы компоненты вектора перемещений $u_k \in H^{1/2}(S)$ (используемые здесь и далее пространства определены в [1]). Тогда в области $V$ существует решение соответствующей упругой задачи, причем $u_k \in H^1(V)$. Получаемое при этом на $S$ распределение внешних нагрузок $p_k \in H^{-1/2}(S)$. (И наоборот, если на $S$ заданы $p_k \in H^{-1/2}(S)$, то существует решение $u_k \in H^1(V)$ упругой задачи.) Каждому вектору перемещений $\mathbf{u}$ на $S$ можно поставить в соответствие норму $\|\mathbf{u}\| = I_1(\bar\sigma^e_{kl}) = I_2(\bar\varepsilon^e_{kl})$. Как известно [1], при принятом предположении об отсутствии жестких смещений норма $\|\mathbf{u}\|_{H^1(V)}$ эквивалентна $\|\mathbf{u}\|$. В [1] установлено неравенство $\|\mathbf{u}\| \geqslant A\|\mathbf{w}\|_{H^1(V)}$, где $A > 0$;

$$\|\mathbf{w}\|^2_{H^1(V)} = \int\limits_V (w_k w_k + w_{k,l}w_{k,l})\, dV.$$

Ввиду положительной определенности матрицы, отвечающей тензору упругих модулей $b_{klmn}$, нетрудно показать, что имеет место и обратное неравенство $\|\mathbf{u}\| \leqslant A_1\|\mathbf{w}\|_{H^1(V)}$, $A_1 > 0$. Поэтому величины $u_k \in H^{1/2}(S)$ можно рассматривать как элементы гильбертова пространства $\mathbf{U}$ с нормой $\|\mathbf{u}\|$. Аналогичным образом вводится норма для вектора внешних нагрузок $\mathbf{p}$ на $S$: $\|\mathbf{p}\| = I_1(\sigma^e_{kl}) = I_2(\varepsilon^e_{kl}) = \|\mathbf{u}^e\|$, т. е. величины $p_k \in H^{-1/2}(S)$ можно рассматривать как элементы гильбертова пространства $\mathbf{P}$ с указанной нормой. Заметим, что подобные нормы применялись в [5].

В дальнейшем используется уравнение виртуальных работ, которое при отсутствии массовых сил имеет вид [3]

$$\int\limits_V \sigma_{kl}\varepsilon_{kl}\, dV = \int\limits_S p_k u_k\, dS, \tag{2.3}$$

где поле $\sigma_{kl}$ удовлетворяет уравнениям равновесия (1.9); $p_k = \sigma_{kl}n_l$ ($n_k$ — компоненты единичного вектора внешней к $S$ нормали); поля $\varepsilon_{kl}$ и $u_k$ удовлетворяют соотношениям (1.3); при этом величины $\sigma_{kl}$ и $\varepsilon_{kl}$ могут быть не связаны между собой.

В силу (2.3)

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{1}{2} \int\limits_S u_k^{(1)} \bar{p}_k^{(2)}\, dS = \frac{1}{2} \int\limits_S u_k^{(2)} \bar{p}_k^{(1)}\, dS.$$

Здесь $\bar{p}_k^{(i)} \in H^{-1/2}(S)$ — внешние нагрузки, соответствующие решению упругой задачи при перемещениях $u_k^{(i)} \in H^{1/2}(S)$, т. е. $\bar{p}_k^{(i)} = \bar{\sigma}_{kl}^{e(i)} n_l$ на $S$ $(i = 1, 2)$. С другой стороны, для произвольных $p_k^{(1)} \in H^{-1/2}(S)$ и $u_k^{(2)} \in H^{1/2}(S)$ имеем

$$\frac{1}{2} \int\limits_S u_k^{(2)} p_k^{(1)}\, dS = (\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1^e)$$

($\mathbf{u}_1^e$ — вектор упругих перемещений на $S$, отвечающий вектору внешних нагрузок $\mathbf{p}_1$).

Для обозначений приращений соответствующих величин будем, как и в п. **1**, использовать символ $\Delta$. Заметим, что из (2.2) и (2.3) следует

$$I_1^2(\Delta\sigma_{kl}) = I_1^2(\Delta\sigma_{kl}^e) + I_1^2(\Delta\rho_{kl}) = \|\Delta\mathbf{u}^e\|^2 + I_1^2(\Delta\rho_{kl}) \geqslant \|\Delta\mathbf{u}^e\|^2, \tag{2.4}$$

поскольку [3]

$$\int\limits_V a_{klmn} \Delta\sigma_{mn}^e \Delta\rho_{kl}\, dV = 0. \tag{2.5}$$

В силу (1.5), (1.6), (2.4) запишем

$$I_3 \geqslant 2\lambda I_1^2(\Delta\sigma_{kl}) \geqslant 2\lambda \|\Delta\mathbf{u}^e\|^2; \tag{2.6}$$

$$I_3 \geqslant 2\lambda_1 I_2^2(\Delta\eta_{kl}). \tag{2.7}$$

Получим далее оценки для $I_4(t)$ через $\|\Delta\mathbf{u}^e\|$. Из (2.1), (2.3) вытекает

$$\int\limits_S \Delta\dot{u}_k \Delta p_k\, dS = \int\limits_V \Delta\dot{\varepsilon}_{kl} \Delta\sigma_{kl}\, dV = \int\limits_V \Delta\dot{\varepsilon}_{kl} \Delta\sigma_{kl}^e\, dV.$$

Последнее равенство с учетом (2.1), (2.2) и (2.5) примет вид

$$\int\limits_V a_{klmn} \Delta\dot{\rho}_{mn} \Delta\rho_{kl}\, dV + I_3 = \int\limits_V \Delta\eta_{kl} \Delta\sigma_{kl}^e\, dV.$$

Отсюда, интегрируя по времени от нуля до текущего момента $t$ и учитывая, что $\Delta\rho_{kl} = 0$ при $t = 0$ всюду в $V$, находим

$$\int\limits_0^t I_3\, dt = \int\limits_0^t \int\limits_V \Delta\eta_{kl} \Delta\sigma_{kl}^e\, dV\, dt - I_1^2\big(\Delta\rho_{kl}(t)\big) \leqslant \int\limits_0^t \int\limits_V a_{klmn} \Delta\sigma_{mn}^e (b_{klij} \Delta\eta_{ij})\, dV\, dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\Big(\int\limits_0^t I_1^2(\Delta\sigma_{kl}^e)\, dt\Big)^{1/2} \Big(\int\limits_0^t I_1^2(b_{klmn}\Delta\eta_{mn})\, dt\Big)^{1/2} = 2I_5(t) I_4(t), \tag{2.8}$$

где использовались равенства (1.7) и известное неравенство

$$\int\limits_0^t \int\limits_V a_{klmn} x_{kl} y_{mn}\, dV\, dt \leqslant \Big(\int\limits_0^t I_1^2(x_{kl})\, dt\Big)^{1/2} \Big(\int\limits_0^t I_1^2(y_{kl})\, dt\Big)^{1/2}$$

при $x_{kl} = \Delta\sigma_{kl}^e$ и $y_{kl} = b_{klmn} \Delta\eta_{mn}$.

С другой стороны, из (2.6) и (2.7) имеем

$$\int_0^t I_3\,dt \geqslant 2\lambda I_5^2(t), \qquad \int_0^t I_3\,dt \geqslant 2\lambda_1 I_4^2(t),$$

откуда с учетом (2.8) получим

$$\lambda I_5(t) \leqslant I_4(t) \leqslant \lambda_1^{-1} I_5(t). \tag{2.9}$$

Кроме того, в дальнейшем будет необходима оценка для приращений остаточных перемещений на $S$, т. е. для величины $\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}\|$ через $\|\Delta\mathbf{u}^e\|$. Обозначим через $\Delta\tilde{\sigma}_{kl}^e$ и $\Delta\tilde{p}_k = \Delta\tilde{\sigma}_{kl}^e n_l$ упругие напряжения и отвечающие им внешние нагрузки, соответствующие перемещениям $\Delta\tilde{u}_k$ на $S$. Тогда с учетом (2.1), (2.3) по аналогии с (2.8) запишем

$$\frac{d}{dt}\left(\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}\|^2\right) = \int_V a_{klmn}\Delta\dot{\tilde{\sigma}}_{mn}^e \Delta\tilde{\sigma}_{kl}^e\,dV = \int_S \Delta\dot{\tilde{u}}_k \Delta\tilde{p}_k\,dS =$$

$$= \int_V (a_{klmn}\Delta\dot{\rho}_{mn} + \Delta\eta_{kl})\Delta\tilde{\sigma}_{kl}^e\,dV = \int_V \Delta\eta_{kl}\Delta\tilde{\sigma}_{kl}^e\,dV \leqslant 2I_2(\Delta\eta_{kl})\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}\|,$$

откуда следует неравенство $\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}\|^{\cdot} \leqslant I_2(\Delta\eta_{kl})$, интегрируя которое по времени от нуля до $t$ и учитывая, что $\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}\| = 0$ при $t = 0$, находим

$$\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}\| \leqslant \int_0^t I_2(\Delta\eta_{kl})\,dt \leqslant \sqrt{t}I_4(t) \leqslant \lambda_1^{-1}\sqrt{t}I_5(t), \tag{2.10}$$

где использовались неравенство Коши — Буняковского и (2.9).

**3. Корректность обратных задач.** Исследование корректности задач 1 и 2 будет базироваться на неравенствах (2.6), (2.7), (2.9), (2.10) и на нижних оценках для величин $(\Delta\tilde{\mathbf{u}}_*, \Delta\mathbf{u}_0^e)$ и $(\Delta\tilde{\mathbf{u}}_*, \Delta\mathbf{u}_0)$ соответственно (индексы $*$ и 0 относятся к моментам времени $t = t_*$ и $t = t_0$).

**Лемма 1.** *Пусть даны два набора действующих на $S$ нагрузок $p_k^{(i)} = f(t)p_{k0}^{(i)}$ ($i = 1, 2$), где функция $f(t)$ удовлетворяет условиям, указанным в формулировке задачи 1. Тогда для разностей соответствующих величин справедливо неравенство*

$$(\Delta\tilde{\mathbf{u}}_*, \Delta\mathbf{u}_0^e) \geqslant c_1\|\Delta\mathbf{u}_0^e\|^2. \tag{3.1}$$

Доказательство. Вследствие (2.1)–(2.3) и с учетом равенств $\Delta\tilde{u}_k\big|_{t=0} = 0$ имеем

$$2(\Delta\tilde{\mathbf{u}}_*, \Delta\mathbf{u}_0^e) = \int_0^{t_*}\!\!\int_S \Delta\dot{\tilde{u}}_k \Delta p_{k0}\,dSdt = \int_0^{t_0}\!\!\int_S \frac{\Delta\dot{\tilde{u}}_k \Delta p_k}{f}\,dSdt + \int_{t_0}^{t_*}\!\!\int_S \Delta\dot{\tilde{u}}_k \Delta p_{k0}\,dSdt = I_6 + I_7,$$

$$I_6 = \int_0^{t_0} \frac{[I_1^2(\Delta\rho_{kl})]^{\cdot} + I_3(t)}{f}\,dt, \quad I_7 = \int_{t_0}^{t_*}\!\!\int_V (a_{klmn}\Delta\dot{\rho}_{mn} + \Delta\eta_{kl})\Delta\sigma_{kl0}^e\,dVdt = \int_{t_0}^{t_*}\!\!\int_V \Delta\eta_{kl}\Delta\sigma_{kl0}^e\,dVdt. \tag{3.2}$$

Оценим величины $I_6$ и $I_7$ из (3.2). Для $I_6$ после интегрирования по частям первого слагаемого под знаком интеграла с учетом равенств

$$f(t_0) = 1, \qquad \lim_{t\to 0} \frac{I_1^2(\Delta\rho_{kl}(t))}{f(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{[I_1^2(\Delta\rho_{kl}(t))]^{\cdot}}{\dot{f}(t)} = 0$$

(поскольку $\dot{f}(0) > 0$, а $\Delta\rho_{kl}\big|_{t=0} = 0$) получим

$$I_6 = I_1^2(\Delta\rho_{kl0}) + \int\limits_0^{t_0} [(\dot{f}/f^2) I_1^2(\Delta\rho_{kl}(t)) + I_3(t)/f]\, dt \geqslant 2\lambda g_1(t_0)\|\Delta\mathbf{u}_0^e\|^2. \qquad (3.3)$$

Здесь неравенство имеет место, так как $\dot{f} \geqslant 0$ $(0 < t \leqslant t_0)$, а также в силу (2.6), где $\|\Delta\mathbf{u}^e\| = f\|\Delta\mathbf{u}_0^e\|$.

Для $I_7$ по аналогии с (2.8) и ввиду (2.9) запишем

$$|I_7| \leqslant 2\Big(\int\limits_{t_0}^{t_*} I_2^2(\Delta\eta_{kl})\, dt\Big)^{1/2} \Big(\int\limits_{t_0}^{t_*} \|\Delta\mathbf{u}_0^e\|^2\, dt\Big)^{1/2} = 2(t_* - t_0)^{1/2}\|\Delta\mathbf{u}_0^e\|\, [I_4^2(t_*) - I_4^2(t_0)]^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant 2(t_* - t_0)^{1/2}\|\Delta\mathbf{u}_0^e\|^2\, [\lambda_1^{-2} g(t_*) - \lambda^2 g(t_0)]^{1/2}. \qquad (3.4)$$

Из (3.2)–(3.4) следует (3.1).

**Теорема 1.** *Пусть* $\tilde{\mathbf{u}}_* \in \mathbf{U}$ *и функция* $f = f(t)$ *такова, что константа* $c_1$ *из* (3.1) *положительна. Тогда существует единственное решение* $\mathbf{p}_0 \in \mathbf{P}$ *задачи* 1, *причем оператор* $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_0(\tilde{\mathbf{u}}_*)$ *непрерывен.*

Доказательство. В силу леммы 1 имеем $c_1\|\Delta\mathbf{u}_0^e\|^2 \leqslant (\Delta\tilde{\mathbf{u}}_*, \Delta\mathbf{u}_0^e) \leqslant \|\Delta\tilde{\mathbf{u}}_*\|\,\|\Delta\mathbf{u}_0^e\|$, отсюда вытекает $\|\Delta\mathbf{u}_0^e\| \leqslant c_1^{-1}\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}_*\|$, что обеспечивает единственность и непрерывность решения.

Доказательство его существования аналогично приведенному в [4] для задачи 1 заключается в следующем. Рассмотрим последовательность $\{\mathbf{u}_{e0}^n\}$, где

$$\mathbf{u}_{e0}^{n+1} = \mathbf{u}_{e0}^n - \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_*^n - \tilde{\mathbf{u}}_*) \text{ на } S\ (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),\ \varepsilon = \text{const}; \qquad (3.5)$$

$\mathbf{u}_{e0}^0$ — произвольный элемент из $\mathbf{U}$. Из (2.10) получим, что $\|\tilde{\mathbf{u}}_*^0\| \leqslant c_2\|\mathbf{u}_{e0}^0\|$, т. е. $\tilde{\mathbf{u}}_*^0 \in \mathbf{U}$. Отсюда видно, что при любом $n$ элементы последовательности (3.5) будут принадлежать пространству $\mathbf{U}$.

Из (3.5) найдем $\mathbf{u}_{e0}^{m+1} - \mathbf{u}_{e0}^{n+1} = \mathbf{u}_{e0}^m - \mathbf{u}_{e0}^n - \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_*^m - \tilde{\mathbf{u}}_*^n)$, откуда с учетом (2.10) и (3.1) имеем $\|\mathbf{u}_{e0}^{m+1} - \mathbf{u}_{e0}^{n+1}\|^2 = \|\mathbf{u}_{e0}^m - \mathbf{u}_{e0}^n\|^2 - 2\varepsilon(\mathbf{u}_{e0}^m - \mathbf{u}_{e0}^n, \tilde{\mathbf{u}}_*^m - \tilde{\mathbf{u}}_*^n) + \varepsilon^2\|\tilde{\mathbf{u}}_*^m - \tilde{\mathbf{u}}_*^n\|^2 \leqslant \delta_1^2\|\mathbf{u}_{e0}^m - \mathbf{u}_{e0}^n\|^2$, $\delta_1^2 = 1 - 2\varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2^2$. Отсюда видно, что при $\delta_1 < 1$, т. е. при $0 < \varepsilon < 2c_1c_2^{-2}$, последовательность (3.5) является фундаментальной. Максимальная скорость сходимости соответствует значению $\varepsilon = c_1c_2^{-2}$, когда $\delta_1^2 = 1 - c_1^2c_2^{-2}$. В силу полноты пространства $\mathbf{U}$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{u}_{e0}^n = \mathbf{u}_{e0} \in \mathbf{U}$, при этом, согласно (3.5), $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{\mathbf{u}}_*^n = \tilde{\mathbf{u}}_*$. Как отмечалось в п. **2**, элемент $\mathbf{u}_{e0} \in \mathbf{U}$ однозначно определяет элемент $\mathbf{p}_0 \in \mathbf{P}$.

Итерационный процесс (3.5) может служить основой для построения приближенных решений данной задачи. Поскольку $\|\mathbf{u}_{e0}^{n+1} - \mathbf{u}_{e0}^n\| \leqslant \delta_1\|\mathbf{u}_{e0}^n - \mathbf{u}_{e0}^{n-1}\|$ $(\delta_1 < 1)$, то нетрудно показать [4], что скорость сходимости последовательных приближений к точному решению определяется неравенством $\|\mathbf{u}_{e0}^n - \mathbf{u}_{e0}\| \leqslant \delta_1^n(1 - \delta_1)^{-1}\|\mathbf{u}_{e0}^1 - \mathbf{u}_{e0}^0\|$.

Изложенное выше доказательство корректности задачи 1 существенным образом базировалось на условии $c_1 > 0$, что накладывает определенные ограничения на функцию $f = f(t)$. Для выяснения последних неравенство $c_1 > 0$ с учетом (3.1) запишем в виде

$$g_1^2(t_0) > (t_* - t_0)[\gamma^2 g(t_*) - g(t_0)], \qquad \gamma = \lambda^{-1}\lambda_1^{-1} \geqslant 1 \qquad (3.6)$$

(неравенство $\gamma \geqslant 1$ вытекает из (2.9), причем, как нетрудно видеть, случай $\gamma = 1$ соответствует линейным зависимостям (1.4), когда $\eta_{kl} = \lambda a_{klmn}\sigma_{mn}$ и, следовательно, $\sigma_{kl} = \lambda_1 b_{klmn}\eta_{mn}$, где $\lambda_1 = \lambda^{-1}$; при этом в (1.5) и (1.6) имеет место знак равенства).

Поскольку вследствие неравенства Коши — Буняковского $g_1^2(t_0) \leqslant t_0 g(t_0)$, имеем необходимое условие для выполнения (3.6): $g_0/g_* > \gamma^2(1 - t_0/t_*)$, что возможно только при

$$t_0/t_* > 1 - \gamma^{-2}, \tag{3.7}$$

так как $g_0 \leqslant g_*$. Неравенство (3.7) устанавливает нижнюю границу для момента начала разгрузки.

Приведем пример функции $f = f(t)$, для которой выполняется основное условие (3.6). Пусть

$$f(t) = \begin{cases} (t/t_0)^{\alpha_1} & (0 \leqslant t \leqslant t_0,\ 0 < \alpha_1 \leqslant 1), \\ [(t_* - t)/(t_* - t_0)]^{\alpha_2} & (t_0 < t \leqslant t_*,\ \alpha_2 > 0). \end{cases}$$

Тогда (3.6) будет эквивалентно неравенству $t_0/t_* > (1 + \xi)^{-1}$, где

$$\xi = æ\Big(\sqrt{1 + æ^{-2}(\alpha_1 + 1)^{-2}} - 1\Big) \quad \Big(æ = \frac{(\gamma^2 - 1)(2\alpha_2 + 1)}{[2\gamma^2(2\alpha_1 + 1)]}\Big),$$

что, естественно, повышает нижнюю границу для $t_0$ по сравнению с (3.7), поскольку $(1 + \xi)^{-1} > 1 - \gamma^{-2}$.

Рассмотрим задачу 2.

**Лемма 2.** *Пусть на $S$ даны два набора внешних воздействий:*

$$u_k^{(i)} = \varphi(t)u_{k0}^{(i)} \quad (0 \leqslant t \leqslant t_0), \quad p_k^{(i)} = f(t)p_{k0}^{(i)} \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_*) \quad (i = 1, 2),$$

*где функции $\varphi(t)$ и $f(t)$ удовлетворяют сформулированным в задаче 2 условиям. Тогда справедлива оценка*

$$(\Delta\tilde{\mathbf{u}}_*, \Delta\mathbf{u}_0) \geqslant c_3\|\Delta\mathbf{u}_0\|^2. \tag{3.8}$$

Доказательство. Поскольку $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^e$, то

$$(\Delta\tilde{\mathbf{u}}_*, \Delta\mathbf{u}_0) = (\Delta\mathbf{u}_0 - \Delta\mathbf{u}_0^e, \Delta\mathbf{u}_0) + \int\limits_{t_0}^{t^*}(\Delta\dot{\tilde{\mathbf{u}}}, \Delta\mathbf{u}_0)\,dt. \tag{3.9}$$

Оценим оба слагаемых в правой части равенства (3.9). В любой момент $t$ $(0 \leqslant t \leqslant t_0)$ в силу (1.1), (1.7) и равенства

$$\frac{1}{2}\int\limits_V a_{klmn}\Delta\dot{\sigma}_{mn}\Delta\sigma_{kl}\,dV = \dot{I}_1(\Delta\sigma_{kl})I_1(\Delta\sigma_{kl})$$

имеем

$$\dot{I}_1(\Delta\sigma_{kl})I_1(\Delta\sigma_{kl}) + \frac{1}{2}I_3(t) = \frac{1}{2}\int\limits_V \Delta\dot{\varepsilon}_{kl}\Delta\sigma_{kl}\,dV =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_V a_{klmn}\Delta\sigma_{mn}(b_{klij}\Delta\dot{\varepsilon}_{ij})\,dV \leqslant I_1(\Delta\sigma_{kl})I_2(\Delta\dot{\varepsilon}_{kl}).$$

Отсюда, учитывая (2.6) и равенство $I_2(\Delta\dot{\varepsilon}_{kl}) = \|\Delta\dot{\mathbf{u}}\| = |\dot{\varphi}|\,\|\Delta\mathbf{u}_0\|$, получим $\dot{I}_1(\Delta\sigma_{kl}) + \lambda I_1(\Delta\sigma_{kl}) \leqslant |\dot{\varphi}|\,\|\Delta\mathbf{u}_0\|$, или $\dfrac{d}{dt}[I_1(\Delta\sigma_{kl})\exp(\lambda t)] \leqslant \|\Delta\mathbf{u}_0\|\,|\dot{\varphi}|\exp(\lambda t)$.

Интегрируя это неравенство по времени от нуля до текущего момента $t$ и учитывая, что $\Delta\sigma_{kl}\big|_{t=0} = 0$, найдем $I_1(\Delta\sigma_{kl}) \leqslant \beta(t)\,\|\Delta\mathbf{u}_0\|$. Тогда из (2.4) вытекает

$$\|\Delta\mathbf{u}^e(t)\| \leqslant \beta(t)\,\|\Delta\mathbf{u}_0\| \qquad (0 \leqslant t \leqslant t_0). \tag{3.10}$$

В частности, $\|\Delta \mathbf{u}_0^e\| \leqslant \beta_0 \|\Delta \mathbf{u}_0\|$, поэтому $(\Delta \mathbf{u}_0 - \Delta \mathbf{u}_0^e, \Delta \mathbf{u}_0) \geqslant \|\Delta \mathbf{u}_0\|^2 - \|\Delta \mathbf{u}_0^e\| \, \|\Delta \mathbf{u}_0\| \geqslant (1-\beta_0)\|\Delta \mathbf{u}_0\|^2$.

По аналогии с величиной $I_7$ из (3.2) для интеграла в (3.9) с учетом (3.10) запишем

$$\Big|\int\limits_{t_0}^{t_*} (\Delta \dot{\tilde{\mathbf{u}}}, \Delta \mathbf{u}_0)\,dt\Big| \leqslant \Big(\int\limits_{t_0}^{t_*} I_2^2(\Delta\eta_{kl})\,dt\Big)^{1/2} \Big(\int\limits_{t_0}^{t_*} \|\Delta \mathbf{u}_0\|^2\,dt\Big)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \|\Delta \mathbf{u}_0\|(t_* - t_0)^{1/2}\big[\lambda_1^{-2} I_5^2(t_*) - \lambda^2 I_5^2(t_0)\big]^{1/2} \leqslant \|\Delta \mathbf{u}_0\|^2 (t_* - t_0)^{1/2}(c_4 - \lambda^2 c_5)^{1/2},$$

поскольку $\|\Delta \mathbf{u}^e(t)\| = f(t)\|\Delta \mathbf{u}_0^e\|$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_*)$. Из этих неравенств и (3.9) следует (3.8).

**Теорема 2.** *Пусть* $\tilde{\mathbf{u}}_* \in \mathbf{U}$ *и функции* $\varphi = \varphi(t)$ *и* $f = f(t)$ *таковы, что константа* $c_3$ *из* (3.8) *положительна. Тогда существует единственное решение* $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{U}$ *задачи* 2, *причем оператор* $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0(\tilde{\mathbf{u}}_*)$ *непрерывен.*

Доказательство. Единственность и непрерывность решения обеспечиваются неравенством, вытекающим из леммы 2: $\|\Delta \mathbf{u}_0\| \leqslant c_3^{-1}\|\Delta \tilde{\mathbf{u}}_*\|$. Для доказательства его существования заметим, что из (2.10) и (3.10) нетрудно получить

$$\|\Delta \tilde{\mathbf{u}}_*\| \leqslant \sqrt{c_4 t_*}\,\|\Delta \mathbf{u}_0\|. \tag{3.11}$$

Рассмотрим последовательность $\{\mathbf{u}_0^n\}$, аналогичную (3.5):

$$\mathbf{u}_0^{n+1} = \mathbf{u}_0^n - \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_*^n - \tilde{\mathbf{u}}_*) \text{ на } S \ (n = 0, 1, 2, \ldots), \quad \varepsilon = \text{const} \tag{3.12}$$

($\mathbf{u}_0^0$ — произвольный элемент из $\mathbf{U}$). Отсюда с учетом (3.8) и (3.11) имеем

$$\|\mathbf{u}_0^{m+1} - \mathbf{u}_0^{n+1}\| \leqslant \delta_2\|\mathbf{u}_0^m - \mathbf{u}_0^n\|, \quad \delta_2^2 = 1 - 2\varepsilon c_3 + \varepsilon^2 c_4 t_*.$$

Таким образом, при $0 < \varepsilon < 2c_3/(c_4 t_*)$ последовательность (3.12) фундаментальная и в силу полноты пространства $\mathbf{U}$ будет сходиться к элементу $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{U}$; при этом $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{\mathbf{u}}_*^n = \tilde{\mathbf{u}}_*$.

Итерационный процесс (3.12) может быть использован для нахождения приближенных решений данной задачи; при этом $\|\mathbf{u}_0^n - \mathbf{u}_0\| \leqslant \delta_2^n(1-\delta_2)^{-1}\|\mathbf{u}_0^1 - \mathbf{u}_0^0\|$ $(\delta_2 < 1)$.

Рассмотрим, какие ограничения на функции $\varphi = \varphi(t)$ и $f = f(t)$ накладывает условие $c_3 > 0$. Из последнего вытекает $\beta_0 < 1$, что, например, имеет место, если $\dot\varphi(t) \geqslant 0$. Действительно, в этом случае

$$\beta_0 = \exp(-\lambda t_0)\int\limits_0^{t_0} \dot\varphi \exp(\lambda t)\,dt = 1 - \lambda \exp(-\lambda t_0)\int\limits_0^{t_0} \varphi \exp(\lambda t)\,dt < 1,$$

поскольку $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t_0) = 1$, $0 < \varphi(t) < 1$ $(0 < t < t_0)$. Отсюда, в частности, следует, что минимальное значение $\beta_0$ соответствует релаксационному режиму деформирования в интервале $[0, t_0]$, когда $\varphi(0) = 0$, $\dot\varphi(t) > 0$ $(0 < t < t_1)$, $\varphi(t) = 1$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_0)$ при $t_1 \to 0$. Нетрудно видеть, что $\beta_{0\,\min} = \exp(-\lambda t_0)$, т. е. в этом случае

$$\int\limits_0^{t_0} |\dot\varphi| \exp(\lambda t)\,dt = 1,$$

в то время как для любого другого режима

$$\int\limits_0^{t_0} |\dot\varphi| \exp(\lambda t)\,dt \geqslant \int\limits_0^{t_0} |\dot\varphi|\,dt \geqslant \int\limits_0^{t_0} \dot\varphi\,dt = 1.$$

Неравенство $c_3 > 0$ с учетом (3.8) можно представить в виде

$$\int\limits_{t_0}^{t_*} f^2\,dt < \gamma^{-2}\beta_0^{-2}\Big[\frac{(1-\beta_0)^2}{\lambda^2(t_*-t_0)} - (\gamma^2-1)c_5\Big]. \tag{3.13}$$

Считая в дальнейшем, что $\dot\varphi \geqslant 0$, получим нижнюю и верхнюю оценки для константы $c_5$ из (3.13). Ввиду неравенства Коши — Буняковского имеем $c_5 \geqslant c_7^2 t_0^{-1}$,

$$c_7 = \int\limits_0^{t_0} \exp(-\lambda t)\Big(\int\limits_0^t \dot\varphi\exp(\lambda t)\,dt\Big)\,dt = -\lambda^{-1}\Big[\exp(-\lambda t)\int\limits_0^t \dot\varphi\exp(\lambda t)\,dt - \varphi(t)\Big]_0^{t_0} = \lambda^{-1}(1-\beta_0).$$

Здесь применялась процедура интегрирования по частям, с использованием которой можно также показать, что

$$c_5 = -\frac{(\beta-\varphi)^2}{2\lambda}\Big|_0^{t_0} + \int\limits_0^{t_0}\varphi\beta\,dt \leqslant -\frac{(1-\beta_0)^2}{2\lambda} + c_7 = c_8.$$

Таким образом,

$$(1-\beta_0)^2/(\lambda^2 t_0) \leqslant c_5 \leqslant c_8. \tag{3.14}$$

Из первого неравенства (3.14) получим необходимое условие выполнимости (3.13): $(t_*-t_0)^{-1} - (\gamma^2-1)t_0^{-1} > 0$, которое эквивалентно неравенству (3.7) и дает ту же нижнюю границу для момента $t_0$ начала разгрузки, что и в задаче 1.

Из второго неравенства (3.14) следует достаточное условие выполнимости (3.13):

$$\int\limits_{t_0}^{t_*} f^2\,dt < c_9. \tag{3.15}$$

Неравенство (3.15) возможно, если $c_9 > 0$, т. е. при $2(1-\beta_0)/[(\gamma^2-1)(1+\beta_0)] > \lambda(t_*-t_0)$.

При заданной функции $\varphi = \varphi(t)$ в интервале активного нагружения, т. е. при $0 \leqslant t \leqslant t_0$, условия (3.13) и (3.15) можно рассматривать как ограничения на функцию $f = f(t)$ при разгрузке $(t_0 \leqslant t \leqslant t_*)$. Так, если $f(t) = [(t_*-t)/(t_*-t_0)]^\alpha$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_*)$, то неравенство (3.15) будет выполняться при $\alpha > [c_9^{-1}(t_*-t_0)-1]/2$.

**4. Оценки уровня остаточных напряжений при $t = t_*$.** Используемые при доказательстве теорем 1, 2 неравенства позволяют получить в каждой из рассматриваемых задач верхние оценки для уровня остаточных напряжений в теле в момент $t = t_*$ после разгрузки. В качестве меры, характеризующей этот уровень, выберем величину

$$I_8 = \frac{1}{2}I_1^2(\rho_{kl*}) + \lambda\int\limits_0^{t_*} I_1^2(\rho_{kl}(t))\,dt.$$

Необходимо заметить, что полученные ранее формулы для разностей величин, характеризующих два состояния, остаются справедливыми и для величин основного состояния, поскольку его можно выбрать в качестве первого, а в качестве второго принять естественное состояние, соответствующее нулевым перемещениям, деформациям и напряжениям всюду в области $V$.

Введем обозначения:

$$I_9 = \int\limits_0^{t_*}\|\mathbf{u}^e\|^2\,dt, \qquad I_{10} = \Big(\int\limits_0^{t_*} I_2^2(\eta_{kl})\,dt\Big)^{1/2}.$$

Тогда из (2.3) с учетом (2.4), (2.6) и (2.9) по аналогии с (3.2) получим

$$I_8 + \lambda I_9 \leqslant \int\limits_0^{t_*} (\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{u}^e)\, dt = \frac{1}{2} \int\limits_0^{t_*}\int\limits_V \eta_{kl}\sigma_{kl}^e\, dV dt \leqslant I_9^{1/2} I_{10} \leqslant \lambda_1^{-1} I_9,$$

откуда

$$I_8 \leqslant (\lambda_1^{-1} - \lambda) I_9. \tag{4.1}$$

Поскольку в задаче 1 $\|\mathbf{u}^e\| = f\|\mathbf{u}_0^e\|$ и $\|\mathbf{u}_0^e\| \leqslant c_1^{-1}\|\tilde{\mathbf{u}}_*\|$, из (4.1) следует

$$I_8 \leqslant (\lambda_1^{-1} - \lambda) c_1^{-2} g_* \|\tilde{\mathbf{u}}_*\|^2. \tag{4.2}$$

Поскольку $f(t) \geqslant 0$ $(0 \leqslant t \leqslant t_*)$, то, как видно из (3.1), $c_1 \leqslant \lambda g_1(t_*)$, причем знак равенства имеет место только при $t_0 = t_*$. Поэтому из (4.2) вытекает, что минимальная оценка для $I_8$ получается в случае, когда функционал

$$\lambda^{-2} g(t_*)/g_1^2(t_*) = \lambda^{-2} \int\limits_0^{t_*} f^2\, dt \Big/ \Big( \int\limits_0^{t_*} f\, dt \Big)^2$$

достигает минимального значения на множестве функций $f = f(t)$, удовлетворяющих условиям, сформулированным в задаче 1. Поскольку $g_1^2(t_*) \leqslant t_* g(t_*)$, причем знак равенства возможен только при $f(t) = \mathrm{const}$ на $[0, t_*]$, то этот минимум равен $\lambda^{-2} t_*^{-1}$ и соответствует такому нагружению, при котором функция $f = f(t)$ в интервале $[0, t_1]$ $(t_1 \to 0)$ монотонно (мгновенно) возрастает от 0 до 1, затем $f(t) = 1$ при $t_1 < t < t_0$ и в интервале $[t_0, t_*]$ $(t_0 \to t_*)$ монотонно убывает от 1 до 0 (т. е. при $t = t_*$ происходит мгновенная разгрузка). В этом случае из (4.2) получим $I_8 \leqslant (\gamma - 1)\lambda^{-1} t_*^{-1} \|\tilde{\mathbf{u}}_*\|^2$.

В задаче 2 имеем $\|\mathbf{u}^e(t)\| \leqslant \beta(t)\|\mathbf{u}_0\|$ при $0 \leqslant t \leqslant t_0$ вследствие (3.10), $\|\mathbf{u}^e(t)\| = f(t)\|\mathbf{u}_0^e\|$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_*$ и $\|\mathbf{u}_0\| \leqslant c_3^{-1}\|\tilde{\mathbf{u}}_*\|$, поэтому из (4.1) находим $I_8 \leqslant (\lambda_1^{-1} - \lambda) \times \lambda_1^2 c_3^{-2} c_4 \|\tilde{\mathbf{u}}_*\|^2$. Отсюда с учетом (3.8) и (3.14) получим оценку, не зависящую от $c_5$:

$$I_8 \leqslant c_{10} \|\tilde{\mathbf{u}}_*\|^2. \tag{4.3}$$

Если момент $t = t_0$ начала разгрузки фиксирован, то, как видно из (4.3), для минимизации полученной оценки необходимо положить $f(t) = 0$ при $t_0 < t < t_*$, т. е. $c_6 = 0$, что соответствует мгновенной разгрузке при $t = t_0$ и выдержке поверхности $S$ рассматриваемого тела в интервале $(t_0, t_*)$ в ненагруженном состоянии. При $c_6 = 0$ функция $c_{10} = c_{10}(\beta_0)$ из (4.3) является возрастающей (при $c_3 > 0$, что и использовалось в п. **3**), поэтому $\min c_{10} = c_{10}(\beta_{0\,\min})$. Как отмечалось выше, $\beta_{0\,\min} = \exp(-\lambda t_0)$, что отвечает релаксационному режиму деформирования в интервале $[0, t_0]$.

Если же величина $t_0$ не фиксирована, то, как нетрудно видеть, минимум оценки (4.3) будет достигаться при $t_0 = t_*$ и $\beta_0 = \beta_* \equiv \exp(-\lambda t_*)$, что соответствует упомянутому режиму релаксации при $0 \leqslant t < t_*$ и мгновенной разгрузке при $t = t_*$. В этом случае $\min c_{10} = (1/2)(\gamma - 1)(1 + \beta_*)(1 - \beta_*)^{-1}$.

**5. Оценка уровня остаточных перемещений при $t > t_*$.** Предположим, что после разгрузки поверхность тела будет находиться в ненагруженном состоянии, т. е. $p_k = 0$ на $S$ при $t > t_*$. Однако, ввиду того что в момент $t = t_*$ в области $V$ существовали самоуравновешенные (в общем случае ненулевые) остаточные напряжения, за счет релаксации последних при $t > t_*$ будут изменяться остаточные деформации $\tilde{\varepsilon}_{kl}$ и перемещения $\tilde{u}_k$. Оценим уровень последних, выбрав в качестве меры для него величину $\|\tilde{\mathbf{u}}(t)\|$ $(t > t_*)$.

Рассуждения, применяемые при выводе (2.10), приводят к неравенству

$$\|\tilde{\mathbf{u}}\|^{\cdot} \leqslant I_2(\eta_{kl}). \tag{5.1}$$

Заметив, что

$$\int_V \sigma_{kl}\eta_{kl}\,dV = \int_V a_{klmn}\sigma_{mn}(b_{klij}\eta_{ij})\,dV \leqslant 2I_1(\sigma_{kl})I_2(\eta_{kl}),$$

и учитывая (2.7), где знак $\Delta$ опущен, получим $I_2(\eta_{kl}) \leqslant \lambda_1^{-1}I_1(\sigma_{kl})$, что совместно с (5.1) дает

$$\|\tilde{\mathbf{u}}\|^{\cdot} \leqslant \lambda_1^{-1}I_1(\sigma_{kl}). \tag{5.2}$$

Поскольку $\sigma^e_{kl} = 0$, т. е. $\sigma_{kl} = \rho_{kl}$ при $t > t_*$, из (2.1), (2.3) и (2.6) находим

$$0 = \int_V (a_{klmn}\dot{\rho}_{mn}\rho_{kl} + \eta_{kl}\rho_{kl})\,dV \geqslant \frac{d}{dt}[I_1^2(\rho_{kl})] + 2\lambda I_1^2(\rho_{kl}),$$

откуда $[I_1(\rho_{kl})\exp(\lambda t)]^{\cdot} \leqslant 0$.

Интегрируя это неравенство по времени от $t_*$ до текущего момента $t$, получим

$$I_1(\sigma_{kl}) = I_1(\rho_{kl}) \leqslant I_1(\rho_{kl*})\exp[\lambda(t_* - t)]. \tag{5.3}$$

Подставляя (5.3) в (5.2) и интегрируя по $t$, найдем $\|\tilde{\mathbf{u}}(t)\| \leqslant \|\tilde{\mathbf{u}}_*\| + \gamma I_1(\rho_{kl*})(1 - \exp[\lambda(t_* - t)]) \leqslant \|\tilde{\mathbf{u}}_*\| + \gamma I_1(\rho_{kl*})$, что и дает требуемую оценку.

Полученные здесь и в п. **4** неравенства позволяют подобрать такой режим деформирования, при котором тело будет иметь требуемые остаточные перемещения на $S$ в момент $t = t_*$ при уровне остаточных напряжений и при последующем уровне остаточных перемещений при $t > t_*$, не превосходящих заданных значений.

В заключение заметим, что многие из полученных выше результатов могут быть распространены на более общие среды вида (1.1), для которых скорости вязких деформаций (деформаций ползучести) зависят не только от напряжений, как в (1.4), но и от набора структурных параметров, скорости изменения которых описываются кинетическими уравнениями [2, 3]. При этом основные неравенства (1.5) и (1.6) должны быть заменены на

$$\int_0^t \Delta\eta_{kl}\Delta\sigma_{kl}\,dt \geqslant \lambda(t)\int_0^t a_{klmn}\Delta\sigma_{kl}\Delta\sigma_{mn}\,dt, \quad \lambda(t) > 0,$$

$$\int_0^t \Delta\eta_{kl}\Delta\sigma_{kl}\,dt \geqslant \lambda_1(t)\int_0^t b_{klmn}\Delta\eta_{kl}\Delta\eta_{mn}\,dt, \quad \lambda_1(t) > 0$$

при соответствующих начальных условиях в момент $t = 0$ [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 94-01-00896, 96-01-01645).

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Дюво Г., Лионс Ж.-Л.** Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
2. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
3. **Цвелодуб И. Ю.** Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов. Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1991.
4. **Цвелодуб И. Ю.** Обратные задачи неупругого деформирования // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 2. С. 81–92.
5. **Кузьменко В. И.** К обратным контактным задачам теории пластичности // ПММ. 1986. Т. 50, № 3. С. 475–482.

*Поступила в редакцию 3/V 1995 г.,*
*в окончательном варианте — 5/II 1996 г.*