

чения, а с другой — через невозмущенный профиль скорости u , как показано в [3], через величину разрыва производной dU/dy при $y = 1$. Когда $\delta \rightarrow \infty$, течение во внешней среде становится однородным, невозмущенный профиль скорости не зависит от μ , а $dU/dy = 0$ при $\delta \rightarrow \infty$. Следовательно, в этом случае μ влияет на устойчивость течения только как параметр в уравнениях для возмущенного течения. При увеличении μ (фиг. 4, б, $\delta = \infty$) область неустойчивости расширяется в области малых Re и сужается в области больших Re , а скорость волн уменьшается.

Таким образом, при втекании пленки жидкости по вертикальной стенке в другую, неподвижную на бесконечности жидкость незатухающие волны на поверхности раздела существуют при любых Re . В области $Re \leq 30$ характеристики этих волн при данном Re определяются в основном параметром Fi и, в меньшей степени, μ и δ .

Авторы выражают благодарность В. Е. Накорякову за постановку задачи и внимание к работе.

Поступила 17 XI 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Graebel W. P. The stability of a stratified flow. — J. Fluid Mech., 1960, vol. 8, N 3.
2. Осипов В. З. Устойчивость движения двух несмешивающихся вязких жидкостей между параллельными стенками. — Тр. ВЦ АН СССР, 1970, т. 9, № 3.
3. Chia-Shun Yih. Instability due to viscosity stratification. — J. Fluid Mech., 1967, vol. 27, pt 2.
4. Hickox C. E. Instability due to viscosity and density stratification in axisymmetric flows. — Phys. Fluids, 1971, vol. 14, N 2.
5. Chia-Shun Yih. Stability of liquid flow down on inclined plane. — Phys. Fluids, 1963, vol. 6, N 3.
6. Бэтчов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Мир, 1971.
7. Бородин В. А., Ягодкин В. И. Устойчивость движения плоской границы раздела двух жидкостей. — ПМТФ, 1967, № 1.
8. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
9. Беседин С. М., Цвелодуб О. Ю. Устойчивость течения пленки жидкости — другая жидкость. — В кн.: Неравновесные процессы в одно- и двухфазных системах. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1981.
10. Кутателадзе С. С., Стырикович М. А. Гидродинамика газожидкостных систем. М.: Энергия, 1976.
11. Желтухин Н. А. Детерминантный метод решения задач гидродинамической теории устойчивости. — В кн.: Аэрогазодинамика. Новосибирск: Наука, 1973.

УДК 531.391 + 532.526 + 532.592

УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО ВРАЩЕНИЯ ЦИЛИНДРА, ЗАПОЛНЕННОГО СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Н. В. Дерендяев, В. А. Сеняткин

(Горький)

Вопрос об устойчивости стационарного вращения тела с полостью, частично заполненной однородной вязкой несжимаемой жидкостью, возникает при анализе моделей различных турбомашин (см., например, [1—3]). В [4] экспериментально исследовалось движение волчка с полостью, содержащей слоисто-неоднородную вязкую жидкость.

В данной работе способом [3] решена плоская задача об устойчивости в малом стационарного вращения кругового цилиндра, целиком заполненного двумя несмешивающимися вязкими несжимаемыми жидкостями, в случае осесимметричного вязкоупругого закрепления оси цилиндра при условии постоянства угловой скорости его вращения.

1. Постановка задачи. Пусть круговой цилиндр с внутренним радиусом a , целиком заполненный двумя несмешивающимися вязкими несжимаемыми жидкостями с плотностями ρ_1, ρ_2 и вязкостями μ_1, μ_2 , совершает стационарное вращение с угловой скоростью Ω вокруг оси O_1z . В режиме стационарного вращения ось цилиндра, находящаяся в вязкоупругом закреплении, совпадает с O_1z , заполняющие жидкости вращаются

вместе с цилиндром как твердое тело, причем границей их раздела является цилиндрическая поверхность радиуса b с осью O_1z , а менее плотная жидкость (с плотностью ρ_2) расположена в центральной части цилиндра.

Рассмотрим задачу об устойчивости стационарного вращения цилиндра с жидким заполнением в линейном приближении и в рамках плоской модели, т. е. предполагая, что в возмущенном движении цилиндр и заполняющие его жидкости совершают плоскопараллельные перемещения, перпендикулярные оси O_1z , причем поле скоростей, давление и плотность не зависят от координаты вдоль этой оси. Абсолютную угловую скорость вращения цилиндра в возмущенном движении будем считать постоянной и равной Ω .

Введем неподвижную прямоугольную систему координат $O_1x_1x_2z$ (O_1z — ось стационарного вращения цилиндра). Система линеаризованных уравнений плоской модели и граничных условий к ним содержит: 1) уравнения поступательного движения цилиндра параллельно плоскости $O_1x_1x_2$

$$(1.1) \quad M\ddot{x}_j^0 + H\dot{x}_j^0 + Kx_j^0 = F_j, \quad j = 1, 2,$$

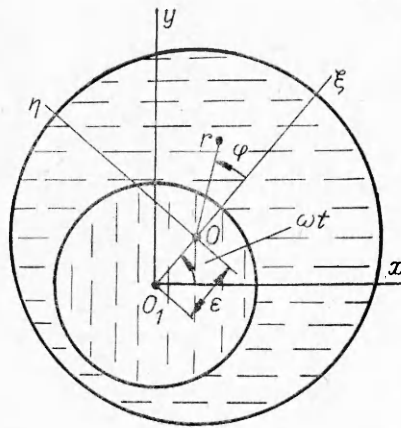
где x_j^0 — координаты точки пересечения оси цилиндра с плоскостью $O_1x_1x_2$; F_j — компоненты силы, с которой жидкое заполнение действует на единицу длины цилиндра; M — масса единицы длины цилиндра; H , K — соответственно коэффициенты демпфирования и жесткости закрепления оси цилиндра, деленные на его длину; 2) условие $\dot{\Omega} = \text{const}$; 3) уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости в плоскости $O_1x_1x_2$, линеаризованные вблизи стационарного квазитвердого вращения жидкости вокруг оси O_1z ; 4) условие прилипания жидкости к внутренней поверхности цилиндра, перенесенное в линейном приближении по отклонениям от состояния стационарного вращения на поверхность $x_1^2 + x_2^2 = a^2$; 5) условия непрерывности скоростей, напряжений, кинематическое условие на границе раздела жидкостей в линейном приближении по отклонениям от состояния стационарного квазитвердого вращения жидкостей; 6) выражения, определяющие компоненты силы, с которой жидкое заполнение действует на единицу длины цилиндра.

Перечисленные уравнения в отклонениях от состояния стационарного вращения и граничные условия к ним допускают частные решения, пропорциональные $e^{\lambda t}$, где λ — характеристическое число. Стационарное вращение цилиндра с жидким заполнением будем считать устойчивым в малом, если все λ имеют отрицательные действительные части, и неустойчивым, если хотя бы одно λ имеет положительную действительную часть.

2. Способ исследования устойчивости. В случае непрерывной зависимости характеристических чисел от параметров задачи изменение степени неустойчивости в системе происходит при появлении мнимого λ . Поскольку система 1—6 инвариантна относительно преобразования координат $x_1' = x_2$, $x_2' = -x_1$, можно показать так же, как и в [3], что все значения параметров, при которых существует мнимое характеристическое число $\lambda = i\omega$, могут быть найдены из условий осуществимости круговой прецессии цилиндра с жидким заполнением, т. е. такого движения, в котором точка пересечения оси цилиндра с плоскостью $O_1x_1x_2$ описывает окружность с частотой ω , а отклонения гидродинамических элементов от стационарных значений изменяются во времени пропорционально $e^{i\omega t}$.

Пусть вращающийся цилиндр, заполненный двумя несмешивающимися вязкими несжимаемыми жидкостями, совершает круговую прецессию с частотой ω . Введем неинерциальную систему отсчета $O\xi\eta$, связанную с линией центров O_1O (фиг. 1). Как показано в приложении, в случае круговой прецессии поле скоростей, давление и расположение границы раздела жидкостей в системе $O\xi\eta$ не зависят от времени.

Итак, решив задачу об установившемся движении жидкостей в системе $O\xi\eta$, вычислив силу, с которой жидкое заполнение действует на ци-



Ф и г. 1

(см. фиг. 1). На внутренней поверхности цилиндра расположен слой однородной несжимаемой жидкости с плотностью ρ_1 и вязкостью μ_1 , а в центральной его части — жидкость с плотностью ρ_2 и вязкостью μ_2 .

При $\epsilon = 0$ существует установившееся движение жидкостей, при котором они вращаются как твердое тело с угловой скоростью Ω вокруг оси цилиндра. В этом случае границей раздела жидкостей является цилиндрическая поверхность радиуса b , коаксиальная с вращающимся цилиндром.

В неинерциальной системе отсчета $O\xi\eta$, жестко связанной с линией центров O_1O , введем полярные координаты r, φ (см. фиг. 1). Рассмотрим установившиеся движения жидкостей в плоскости $O\xi\eta$, близкие к квазитвердому вращению, которое жидкости могут совершать при $\epsilon = 0$:

$$(3.1) \quad u' = 0, \quad v' = (\Omega - \omega)r,$$

где u', v' — радиальная и азимутальная компоненты скорости в системе отсчета $O\xi\eta$.

Уравнения Навье — Стокса для установившихся движений в плоскости $O\xi\eta$, линеаризованные вблизи (3.1), записываются в виде

$$(3.2) \quad (\Omega - \omega) \frac{\partial u_k}{\partial \varphi} = \Omega^2 r + \omega^2 \epsilon \cos \varphi + 2\Omega v_k - \frac{1}{\rho_k} \frac{\partial p_k}{\partial r} + v_k \left(\Delta u_k - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_k}{\partial \varphi} - \frac{u_k}{r^2} \right),$$

$$(\Omega - \omega) \frac{\partial v_k}{\partial \varphi} = -2\Omega u_k - \omega^2 \epsilon \sin \varphi - \frac{1}{\rho_k r} \frac{\partial p_k}{\partial \varphi} + v_k \left(\Delta v_k + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_k}{\partial \varphi} - \frac{v_k}{r^2} \right),$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial r} + \frac{u_k}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_k}{\partial \varphi} = 0,$$

где u_k, v_k — отклонения радиальной и азимутальной компонент поля скоростей жидкости от соответствующих компонент поля (3.1); p_k — давление; v_k — кинематическая вязкость жидкости; $k = 1, 2$.

Граничное условие прилипания жидкости к поверхности цилиндра имеет вид

$$(3.3) \quad u_1 = v_1 = 0, \quad r = a.$$

Условия непрерывности скоростей, напряжений, кинематическое условие на границе раздела жидкостей $r = b + \eta(\varphi)$ в линейном приближении по ϵ записываются в виде

$$(3.4) \quad p_2 - p_1 + \Omega^2 b \eta (\rho_2 - \rho_1) + 2 \left(\mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} - \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial r} \right) = 0,$$

цилиндр в случае круговой прецессии, можно из уравнений поступательного движения цилиндра (1.1) найти условия на параметры задачи, при которых возможна круговая прецессия цилиндра с жидким заполнением. Эти условия определяют границы областей с различной степенью неустойчивости в пространстве параметров задачи, в частности границу области устойчивости.

3. Гидродинамическая задача. Пусть бесконечный цилиндр с внутренним радиусом a , целиком заполненный двумя несмешивающимися жидкостями, вращается с абсолютной угловой скоростью Ω вокруг своей оси и прецессирует по окружности малого радиуса ϵ с частотой ω

$$\mu_1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_1}{\partial r} - \frac{v_1}{r} \right) = \mu_2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_2}{\partial r} - \frac{v_2}{r} \right),$$

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \quad (\Omega - \omega) \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} = u_1, \quad r = b.$$

К (3.3), (3.4) следует добавить также условие ограниченности решения системы (3.2) при $r = 0$.

4. Точное решение. Краевая задача (3.2)–(3.4) допускает точное решение. Вводя потенциалы Ламба θ_k, ψ_k по формулам

$$(4.1) \quad u_k = \frac{\partial \theta_k}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_k}{\partial \varphi}, \quad v_k = \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_k}{\partial \varphi} - \frac{\partial \psi_k}{\partial r}, \quad k = 1, 2,$$

получим, используя те же приемы, что и в [3]:

$$(4.2) \quad \theta_1 = 2 \operatorname{Re} \left[\left(c_{11} r + \frac{c_2}{r} \right) e^{i\varphi} \right], \quad \theta_2 = 2 \operatorname{Re} (c_{21} r e^{i\varphi}),$$

$$\psi_1 = 2 \operatorname{Re} \left[\left[-\frac{2\Omega}{\Omega - \omega} i \left(c_{11} r + \frac{c_2}{r} \right) + c_{13} L_1(\lambda_1 r) + c_4 M_1(\lambda_1 r) \right] e^{i\varphi} \right],$$

$$\psi_2 = 2 \operatorname{Re} \left[\left[-\frac{2\Omega}{\Omega - \omega} i c_{21} r + c_{23} R_1(\lambda_2 r) \right] e^{i\varphi} \right],$$

$$p_k = \rho_k \left[-(\Omega - \omega) \frac{\partial \theta_k}{\partial \varphi} + \frac{\Omega^2}{2} (r^2 - b^2) + \omega^2 \varepsilon r \cos \varphi - 2\Omega \psi_k \right],$$

$$\eta(\varphi) = 2 \operatorname{Re} (\eta_* e^{i\varphi}),$$

где $L_n(\lambda_1 r) = e^{-\kappa_1 a} H_n^{(2)}(\lambda_1 r)$; $M_n(\lambda_1 r) = e^{\kappa_1 b} H_n^{(1)}(\lambda_1 r)$; $R_n(\lambda_2 r) = 2e^{-\kappa_2 b} J_n(\lambda_2 r)$; $\lambda_k = \kappa_k \left(-\frac{\Omega - \omega}{|\Omega - \omega|} + i \right)$; $\kappa_k = (|\Omega - \omega|/2v_k)^{1/2}$; $H_n^{(1),(2)}$, J_n — соответственно функции Ганкеля и функция Бесселя. Константы $c_{11}, c_{21}, c_2, c_{13}, c_4, \eta_*, c_{23}$ в решении (4.2) удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений:

$$(4.3) \quad \frac{3 - \tau}{1 - \tau} c_{11} + \frac{1 + \tau}{1 - \tau} \frac{c_2}{a^2} + \frac{i}{a} Z_1(\lambda_1 a) = 0,$$

$$\frac{3 - \tau}{1 - \tau} i c_{11} + \frac{1 + \tau}{1 - \tau} i \frac{c_2}{a^2} - \lambda_1 Z_0(\lambda_1 a) + \frac{1}{a} Z_1(\lambda_1 a) = 0,$$

$$\frac{3 - \tau}{1 - \tau} (c_{11} - c_{21}) + \frac{1 + \tau}{1 - \tau} \frac{c_2}{b^2} + \frac{i}{b} [Z_1(\lambda_1 b) - c_{23} R_1(\lambda_2 b)] = 0,$$

$$\frac{3 - \tau}{1 - \tau} i (c_{11} - c_{21}) - \frac{1 + \tau}{1 - \tau} i \frac{c_2}{b^2} - \lambda_1 Z_0(\lambda_1 b) + \frac{1}{b} Z_1(\lambda_1 b) +$$

$$+ \left[-\frac{R_1(\lambda_2 b)}{b} + \lambda_2 R_0(\lambda_2 b) \right] c_{23} = 0,$$

$$\mu_1 \left[\frac{1 + \tau}{1 - \tau} 4i \frac{c_2}{b^3} + \left(\lambda_1^2 - \frac{4}{b^2} \right) Z_1(\lambda_1 b) + 2 \frac{\lambda_1}{b} Z_0(\lambda_1 b) \right] -$$

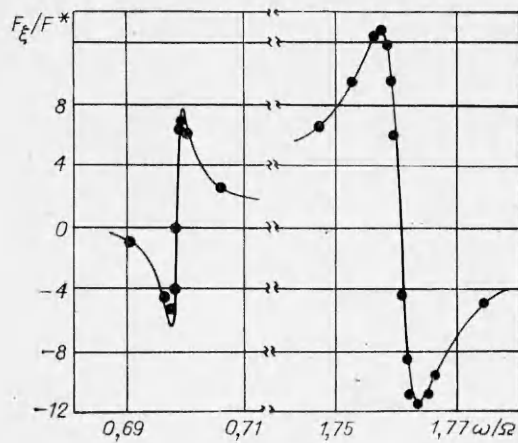
$$- \mu_2 \left[\left(\lambda_2^2 - \frac{4}{b^2} \right) R_1(\lambda_2 b) + \frac{2\lambda_2}{b} R_0(\lambda_2 b) \right] c_{23} = 0,$$

$$ib \frac{3 - \tau}{(1 - \tau)^2} \tau^2 (\rho_1 c_{11} - \rho_2 c_{21}) + \rho_1 \left[\frac{i}{b} (1 + \tau) \left(\frac{4}{\lambda_1^2 b^2} - \frac{2 - 4\tau + \tau^2}{(1 - \tau)^2} \right) c_2 + \right.$$

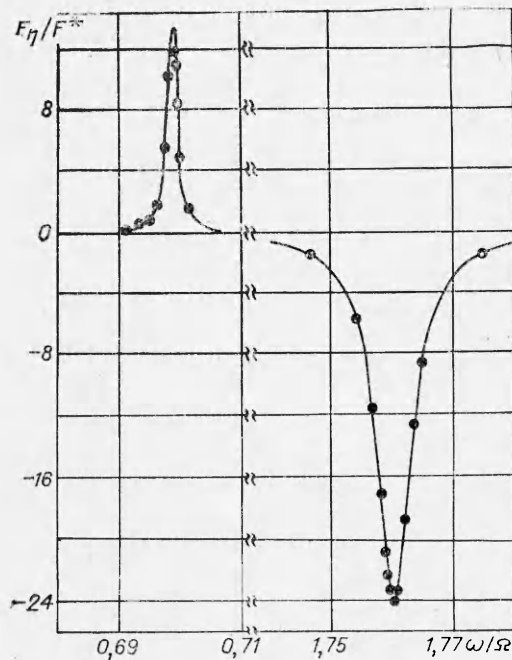
$$+ \left. \left(\frac{1 - 2\tau}{1 - \tau} - 4 \frac{1 - \tau}{\lambda_1^2 b^2} \right) Z_1(\lambda_1 b) + 2 \frac{1 - \tau}{\lambda_1 b} Z_0(\lambda_1 b) \right] - \rho_2 \left[\left(\frac{1 - 2\tau}{1 - \tau} - 4 \frac{1 - \tau}{\lambda_2^2 b^2} \right) \times \right.$$

$$\times \left. R_1(\lambda_2 b) + 2 \frac{1 - \tau}{\lambda_2 b} R_0(\lambda_2 b) \right] c_{23} = (\rho_1 - \rho_2) \tau^2 \frac{\Omega \varepsilon b}{2},$$

$$i(1 - \tau) \eta_* = \frac{3 - \tau}{1 - \tau} \frac{c_{21}}{\Omega} + \frac{i}{\Omega b} R_1(\lambda_2 b) c_{23}, \quad Z_n = c_{13} L_n + c_4 M_n, \quad \tau = \omega/\Omega.$$



Ф и г. 2



Ф и г. 3

Используя решение (4.1)—(4.3) задачи (3.2) — (3.4), можно получить выражения для напряжений на внутренней поверхности цилиндра, а также для компонент гидродинамической силы, с которой жидкое заполнение действует на единицу длины вращающегося и прецессирующего цилиндра:

$$(4.4) \quad F_z = 2\pi a \rho_1 \operatorname{Re} \left[\left(\frac{1}{2} \right) \omega^2 a \varepsilon + 2i(\omega + \Omega) c_2 / a \right],$$

$$F_\eta = -4\pi \rho_1 (\Omega + \omega) \operatorname{Re} c_2.$$

На фиг. 2, 3 сплошной линией показана зависимость компонент силы (4.4) от ω/Ω при $b/a = 0,5$, $\nu_2/\nu_1 = 0,5$, $\rho_2/\rho_1 = 0,5$, $\nu_1/\Omega a^2 = 10^{-5}$ и масштабе силы $F^* = \pi a^2 \rho_1 \omega^2 \varepsilon$. Характер этой зависимости обусловлен резонансным возбуждением внутренних волн во вращающемся слоисто-неоднородном жидком заполнении цилиндра.

Отметим, что вычисление гидродинамической силы в рамках модели невязкой жидкости ($\mu_1 = \mu_2 = 0$) дает тождественно равную нулю компоненту F_η и бесконечно большие значения F_z при резонансных значениях ω/Ω . В случае вязкой жидкости, как видно на фиг. 2, 3, в окрестностях резонансов обе компоненты силы одного порядка.

Приведем также выражения для компонент гидродинамической силы в окрестности

резонанса $\omega = \Omega$, полученные из (4.3), (4.4) с использованием асимптотических разложений для цилиндрических функций при малых значениях аргумента [5]:

$$(4.5) \quad F_z = \pi \rho_1 \Omega^2 a^2 \varepsilon + O(\Omega - \omega),$$

$$F_\eta = 4\pi \varepsilon (\Omega - \omega) \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \left(\mu_2 \left(1 - \frac{b^4}{a^4} \right) + \mu_1 \left(1 + \frac{b^4}{a^4} \right) \right) \frac{1}{\Delta} + O((\Omega - \omega)^2 \ln |\lambda_1 a|),$$

$$\Delta = \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{a^2} + 1 \right) + 2 \frac{\mu_2}{\mu_1} \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \left(1 - \frac{\nu_1^2}{\Omega^2 a^2 b^2} \right) - \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \right) \right) + \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \left(\left(1 + \frac{b^4}{a^4} \right) + \frac{\mu_2}{\mu_1} \left(1 - \frac{b^4}{a^4} \right) \right) \ln \frac{a}{b}.$$

При $\rho_2 = 0$, $\mu_2 = 0$ выражения (4.5) переходят в соответствующие формулы [3]. Из приведенных выражений следует, что при проходе через резонанс $\omega = \Omega$ компонента F_η меняет знак. Это согласуется с концеп-

цией «вращающегося трения», широко распространенной в исследованиях по устойчивости вращения роторов с внутренним трением [6].

5. Приближенный метод решения гидродинамической задачи. В случае, когда числа Экмана $E_k = \nu_k / |\Omega - \omega| a^2$ ($k = 1, 2$) малы и a, b , ($a - b$) одного порядка, решение гидродинамической задачи, сформулированной в п. 3, можно представить в виде суммы двух компонент:

$$(5.1) \quad u_k = u_k^{(1)} + u_k^{(2)}, \quad v_k = v_k^{(1)} + v_k^{(2)}, \quad p_k = p_k^{(1)} + p_k^{(2)}.$$

Первая из них — $u_k^{(1)}, v_k^{(1)}, p_k^{(1)}$, крупномасштабная, имеет пространственный масштаб порядка a и приближенно описывает движение жидкости в основном объеме; вторая — $u_k^{(2)}, v_k^{(2)}, p_k^{(2)}$, мелкомасштабная, формирует пограничные слои на внутренней поверхности цилиндра и на границе раздела жидкостей. Характерный пространственный масштаб второй компоненты, как следует из соображений размерности, порядка $(\nu_k / |\Omega - \omega|)^{1/2}$.

Крупномасштабная компонента решения удовлетворяет системе уравнений, которая получается из (3.2) при подстановке $\nu_k = 0$:

$$(5.2) \quad (\Omega - \omega) \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial \varphi} = \Omega^2 r + \omega^2 \varepsilon \cos \varphi + 2\Omega v_k^{(1)} - \frac{1}{\rho_k} \frac{\partial p_k^{(1)}}{\partial r},$$

$$(\Omega - \omega) \frac{\partial v_k^{(1)}}{\partial \varphi} = -2\Omega u_k^{(1)} - \omega^2 \varepsilon \sin \varphi - \frac{1}{\rho_k r} \frac{\partial p_k^{(1)}}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial}{\partial r} r u_k^{(1)} + \frac{\partial}{\partial \varphi} v_k^{(1)} = 0.$$

Получим приближенные уравнения для мелкомасштабной компоненты решения в пограничных слоях на внутренней поверхности цилиндра и на границе раздела жидкостей. Подставим в (3.2) решение в форме (5.1), где $u_k^{(1)}, v_k^{(1)}, p_k^{(1)}$ удовлетворяют (5.2), а $u_k^{(2)} = E_k^{-1/2} \bar{u}_k^{(2)}, v_k^{(2)} = \bar{v}_k^{(2)}, p_k^{(2)} = \bar{p}_k^{(2)}$. Сделаем замену $r_0 - r = E_k^{1/2} \bar{r}$, $\varphi = \bar{\varphi}$, $r_0 = a, b$ и, устремив E_k к нулю, оставим в уравнениях (3.2) старшие члены, полагая, что $\bar{u}_k^{(2)}, \bar{v}_k^{(2)}, \bar{p}_k^{(2)}$ и их производные по $\bar{r}, \bar{\varphi}$ нулевого порядка по E_k . В результате имеем

$$(5.3) \quad \frac{\partial p_k^{(2)}}{\partial r} = 0, \quad (\Omega - \omega) \frac{\partial v_k^{(2)}}{\partial \varphi} = -\frac{1}{r_0 \rho_k} \frac{\partial p_k^{(2)}}{\partial \varphi} + \nu_k \frac{\partial^2 v_k^{(2)}}{\partial r^2},$$

$$\frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial r} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial v_k^{(2)}}{\partial \varphi} = 0.$$

Применение стандартной процедуры теории пограничного слоя предполагает вначале отыскание крупномасштабной компоненты решения исходя из уравнений (5.2) с граничным условием непроницаемости внутренней поверхности цилиндра

$$(5.4) \quad u_1^{(1)} = 0, \quad r = a,$$

условиями непрерывности нормальных компонент скорости, давления и кинематическим условием на границе раздела жидкостей

$$(5.5) \quad u_1^{(1)} = u_2^{(1)};$$

$$(5.6) \quad p_2^{(1)} - p_1^{(1)} + \Omega^2 b \eta (\rho_2 - \rho_1) = 0;$$

$$(5.7) \quad (\Omega - \omega) \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} = u_1^{(1)} \quad \text{при} \quad r = b,$$

а затем решение собственно уравнений пограничного слоя (или отыскание мелкомасштабной компоненты решения). При этом уже найденная крупномасштабная компонента решения задачи используется при формулировании краевых условий к уравнениям пограничного слоя. Такая процедура, однако, не позволяет найти решение в окрестности волновых резонансов, так как при резонансных значениях ω/Ω решение невязкой задачи для крупномасштабной компоненты обращается в бесконечность. Природа

этого затруднения состоит в том, что в окрестности волновых резонансов нельзя пренебрегать реакцией пограничного слоя на крупномасштабную компоненту решения. Ниже предлагается модификация стандартной процедуры теории пограничного слоя, позволяющая преодолеть указанное затруднение.

Будем приближенно считать, что пограничные слои на внутренней поверхности цилиндра и на границе раздела жидкостей имеют конечную толщину, а вне пограничных слоев мелкомасштабная компонента решения пренебрежимо мала.

Из третьего уравнения системы (5.3) при $r_0 = a$ имеем

$$(5.8) \quad u_1^{(2)} = -\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_{a-\delta}^r v_1^{(2)} dr, \quad a - \delta \leq r \leq a,$$

где δ — толщина пограничного слоя на поверхности цилиндра. Подставляя (5.8) в граничное условие для нормальной компоненты скорости на поверхности цилиндра $u_1^{(1)} + u_1^{(2)} = 0$, $r = a$ и вводя толщину δ_a^* , определяемую выражением

$$(5.9) \quad \int_{a-\delta}^a v_1^{(2)} dr = -\delta_a^* v_1^{(1)}(a, \varphi - \varphi^*), \quad \varphi^* = \frac{\pi}{4} \frac{\Omega - \omega}{|\Omega - \omega|},$$

получим

$$(5.10) \quad u_1^{(1)}(a, \varphi) = -\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} \delta_a^* v_1^{(1)}(a, \varphi - \varphi^*).$$

Примем (5.10) в качестве граничного условия для крупномасштабной компоненты решения при $r = a$ вместо условия (5.4).

Аналогично из третьего уравнения системы (5.3) при $r_0 = b$ имеем

$$(5.11) \quad u_1^{(2)} = \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_r^{b+\delta_1} v_1^{(2)} dr, \quad b \leq r \leq b + \delta_1,$$

$$u_2^{(2)} = -\frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_{b-\delta_2}^r v_2^{(2)} dr, \quad b - \delta_2 \leq r \leq b,$$

где δ_1 , δ_2 — толщины пограничных слоев на границе раздела жидкостей. Подставляя (5.11) в условие непрерывности нормальной компоненты скорости на границе раздела жидкостей $u_1^{(1)} + u_1^{(2)} = u_2^{(1)} + u_2^{(2)}$, $r = b$ и вводя толщину δ_b^* , определяемую выражением

$$(5.12) \quad \int_b^{b+\delta_1} v_1^{(2)} dr + \int_{b-\delta_2}^b v_2^{(2)} dr = \delta_b^* (v_1^{(1)}(b, \varphi - \varphi^*) - v_2^{(1)}(b, \varphi - \varphi^*)),$$

получим

$$(5.13) \quad u_1^{(1)}(b, \varphi) - u_2^{(1)}(b, \varphi) = -\frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial \varphi} \delta_b^* (v_1^{(1)}(b, \varphi - \varphi^*) - v_2^{(1)}(b, \varphi - \varphi^*)).$$

Примем (5.13) в качестве граничного условия для крупномасштабной компоненты решения при $r = b$ вместо (5.5).

Кинематическое условие на границе раздела жидкостей с учетом (5.4), (5.11) записывается в виде

$$(\Omega - \omega) \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} = u_1^{(1)} + \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_b^{b+\delta_1} v_1^{(2)} dr, \quad r = b.$$

Введем толщину δ_1^* , определяемую выражением

$$(5.14) \quad \int_b^{b+\delta_1} v_1^{(2)} dr = -\delta_1^* (v_1^{(1)}(b, \varphi - \varphi^*) - v_2^{(1)}(b, \varphi - \varphi^*)),$$

получим

$$(5.15) \quad (\Omega - \omega) \frac{\partial v_1^{(2)}(\varphi)}{\partial \varphi} = u_1^{(1)}(b, \varphi) - \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial \varphi} \delta_1^* (v_1^{(1)}(b, \varphi - \varphi^*) - v_2^{(1)}(b, \varphi - \varphi^*)).$$

Примем (5.15) в качестве обобщения кинематического условия (5.7) задачи для крупномасштабной компоненты решения. Условие (5.6) для крупномасштабной компоненты при $r = b$ возьмем без изменения.

Толщины δ_a^* , δ_b^* , δ_1^* , входящие в (5.10), (5.13), (5.15), можно найти, воспользовавшись решением краевой задачи для мелкомасштабной компоненты с уравнениями (5.3), граничными условиями

$$(5.16) \quad v_1^{(2)} = -v_1^{(1)}, \quad r = a, \quad v_1^{(2)} - v_2^{(2)} = v_2^{(1)} - v_1^{(1)}, \\ \mu_1 \frac{\partial}{\partial r} v_1^{(2)} = \mu_2 \frac{\partial}{\partial r} v_2^{(2)}, \quad r = b$$

и условием пренебрежимой малости мелкомасштабной компоненты вне пограничных слоев. Третье условие (5.16) получено при $E_k \rightarrow 0$ из условия непрерывности касательного напряжения на границе раздела жидкостей при дополнительном предположении, что вблизи границы раздела $v_k^{(1)}$ и $v_k^{(2)}$ одного порядка. Условие пренебрежимой малости мелкомасштабной компоненты решения вне пограничных слоев совместно с первым уравнением системы (5.3) дает $p_k^{(2)} = 0$. Следовательно, краевая задача для мелкомасштабной компоненты сводится к интегрированию уравнений

$$(5.17) \quad (\Omega - \omega) \frac{\partial v_k^{(2)}}{\partial \varphi} = v_k \frac{\partial^2 v_k^{(2)}}{\partial r^2} \quad (k = 1, 2)$$

с граничными условиями (5.16), условием пренебрежимой малости $v_k^{(2)}$ вне пограничных слоев и вычислению затем $u_k^{(2)}$ по формулам (5.8), (5.11).

Итак, предлагаемая модификация стандартной процедуры теории пограничного слоя состоит в том, что краевая задача для крупномасштабной компоненты решения ставится с уравнениями (5.2) и граничными условиями (5.6), (5.10), (5.13), (5.15). Эта задача при $\delta_a^* = \delta_b^* = \delta_1^* = 0$ переходит в невязкую задачу (5.2), (5.4)–(5.7), которая обычно предшествует рассмотрению движения жидкости в пограничных слоях.

Обратимся к фактическому построению приближенного решения краевой задачи, сформулированной в п. 3, в случае, когда числа Экмана E_1 , E_2 малы, a , b , $(a - b)$ одного порядка. Будем искать его в виде (5.1), полагая

$$u_k^{(1),(2)} = 2 \operatorname{Re} u_k^{*(1),(2)}(r) e^{i\varphi}, \quad v_k^{(1),(2)} = 2 \operatorname{Re} v_k^{*(1),(2)}(r) e^{i\varphi}, \\ \frac{p_k^{(1)}}{\rho_k} = 2 \operatorname{Re} p_k^{*(1)}(r) e^{i\varphi} + \frac{\Omega^2 r^2}{2} + \text{const}, \quad k = 1, 2.$$

Из уравнений (5.17) с граничными условиями (5.16) получим с использованием условия пренебрежимой малости мелкомасштабной компоненты решения вне пограничных слоев:

$$(5.18) \quad v_1^{(2)} = -2 \operatorname{Re} (v_1^{*(1)}(a) e^{i\lambda_1(a-r)+i\varphi}), \quad a - \delta < r \leq a, \\ v_1^{(2)} = -\frac{2}{1+d} \operatorname{Re} [(v_1^{*(1)}(b) - v_2^{*(1)}(b)) e^{i\lambda_1(r-b)+i\varphi}], \quad b \leq r \leq b + \delta_1, \\ v_2^{(2)} = \frac{2d}{1+a} \operatorname{Re} [(v_1^{*(1)}(b) - v_2^{*(1)}(b)) e^{i\lambda_2(b-r)+i\varphi}], \quad b - \delta_2 \leq r \leq b, \\ d = (\mu_1 \rho_1 / \mu_2 \rho_2)^{1/2}, \quad k = 1, 2.$$

Выражения для $u_1^{(2)}$, $u_2^{(2)}$ получим из (5.8), (5.11) с использованием (5.18). Условие пренебрежимой малости мелкомасштабной компоненты решения вне пограничных слоев будет выполнено, если условные толщины пограничных слоев выбрать удовлетворяющими неравенствам:

$$\delta_1, \delta \gg (2\nu_1/|\Omega - \omega|)^{1/2}, \quad \delta_2 \gg (2\nu_2/|\Omega - \omega|)^{1/2}.$$

Располагая выражениями (5.18), из (5.9), (5.12), (5.14) находим

$$\delta_a^* = (\nu_1/|\Omega - \omega|)^{1/2}, \quad \delta_b^* = \frac{1}{1+d} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right) \delta_a^*, \quad \delta_1^* = \delta_2^*/(1+d).$$

Интегрируя (5.2) с граничными условиями (5.6), (5.10), (5.13), (5.15), получим

$$u_k^{*(1)} = A_k + B_k/r^2, \quad v_k^{*(1)} = i(A_k - B_k/r^2), \\ p_k^{*(1)} = i[(\Omega + \omega)A_k + (3\Omega - \omega)B_k/r^2]r, \quad k = 1, 2,$$

где константы A_k , B_k удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$(5.19) \quad (1 - g_a)A_1 + (1 + g_a)\frac{B_1}{a^2} = 0, \quad g_a = \frac{\delta_a^*}{a} e^{-i\varphi^*}, \\ (1 - g_b)A_1 + (1 + g_b)\frac{B_1}{b^2} - (1 - g_b)A_2 = 0, \quad g_b = \frac{\delta_b^*}{b} e^{-i\varphi^*}, \\ [-i(\Omega + \omega) + q(1 + g_1)]A_1 + [-i(3\Omega - \omega) + q(1 - g_1)]\frac{B_1}{b^2} + \\ + \left[i(\Omega + \omega)\frac{\rho_2}{\rho_1} - qg_1 \right]A_2 = \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \frac{\omega^2 \varepsilon}{2}, \\ q = i \frac{\Omega^2}{\Omega - \omega} \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right), \quad g_1 = \frac{\delta_1^*}{b} e^{-i\varphi^*}, \quad B_2 = 0.$$

Используя приближенные выражения для гидродинамических элементов, можно вычислить напряжения на поверхности цилиндра и силу, с которой жидкое заполнение действует на единицу длины вращающегося и прецессирующего цилиндра:

$$(5.20) \quad F_\xi = 2\pi a^2 \rho_1 \operatorname{Re}(\omega^2 \varepsilon / 2 + iD), \quad F_\eta = -2\pi a^2 \rho_1 \operatorname{Re} D, \\ D = 2[\Omega A_1 + (2\Omega - \omega)B_1/a^2].$$

На фиг. 2, 3 точками нанесена зависимость компонент гидродинамической силы F_ξ/F^* , F_η/F^* от ω/Ω , полученная в соответствии с (5.19), (5.20) при значениях параметров, указанных в примере, приведенном в п. 4. Видно хорошее совпадение приближенных результатов с точными.

Предлагаемая модификация стандартной процедуры теории пограничного слоя упрощает вычисление компонент гидродинамической силы F_ξ , F_η при малых E_1 , E_2 и особенно эффективна в случае, когда цилиндр заполнен более чем двумя несмешивающимися жидкостями.

Следует заметить, что при $\omega = \Omega$ толщины пограничных слоев обращаются в бесконечность и приближенные построения, изложенные выше, не применимы. Однако сравнение с точным решением показывает, что в окрестности резонанса $\omega = \Omega$ зависимость компонент силы F_ξ , F_η от ω/Ω можно получить с достаточной точностью интерполированием крайних значений, учитывая, что при $\omega/\Omega = 1$ F_ξ имеет минимум, а F_η проходит через нуль.

6. Границы областей с различной степенью неустойчивости в пространстве параметров задачи, как уже отмечалось в п. 2, можно найти из условий осуществимости круговой прецессии вращающегося цилиндра с жидким заполнением. Эти условия получим, подставив в правые части (1.1) $F_1 = F_\xi \cos \omega t - F_\eta \sin \omega t$, $F_2 = F_\xi \sin \omega t + F_\eta \cos \omega t$, а в левые

части тех же уравнений $x_1^0 = \varepsilon \cos \omega t$, $x_2^0 = \varepsilon \sin \omega t$. В результате будем иметь

$$(6.1) \quad \frac{F_{\xi}}{F^*} \left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^2 = K_* - \frac{M}{m} \left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^2,$$

$$\frac{F_{\eta}}{F^*} \left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^2 = H_* \frac{\omega}{\Omega},$$

$$K_* = K/m\Omega^2, \quad H_* = H/m\Omega,$$

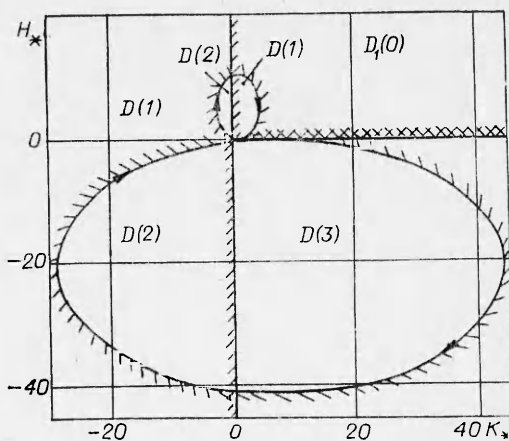
$$m = \pi a^2 \rho_1.$$

При фиксированных $v_1/\Omega a^2$, $(a-b)/a$, ρ_2/ρ_1 , μ_2/μ_1 , M/m условия (6.1) параметрически определяют кривую (с параметром ω/Ω вдоль кривой), которая разбивает плоскость параметров закрепления оси цилиндра H_* , K_* на области $D(n)$ со степенью неустойчивости n . Эта кривая (D -кривая) совершенно аналогична построенной в [3]. На фиг. 4, 5 приведено разбиение, осуществляемое D -кривой при $b/a = 0,5$, $v_1/\Omega a^2 = 10^{-5}$, $\mu_2/\mu_1 = 0,25$, $\rho_2/\rho_1 = 0,5$, $M/m = 1,68$. Области устойчивости обозначены $D_1(0)$, $D_2(0)$.

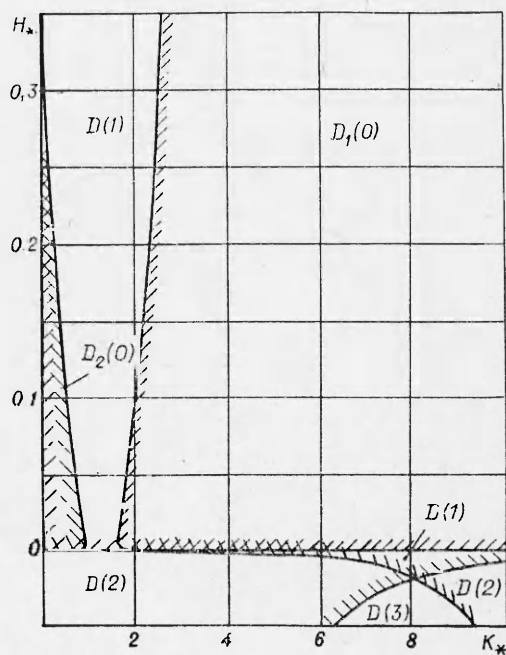
Приложение. В случае круговой прецессии малого радиуса точка пересечения оси цилиндра с плоскостью $O_1x_1x_2$ описывает окружность с некоторой частотой ω , а гидродинамические поля изменяются во времени с той же частотой в системе $O_1x_1x_2z$. Система $O\xi\eta$ совершает периодическое движение с частотой ω относительно Ox_1x_2 . Следовательно, в случае круговой прецессии малого радиуса движение жидкостей в системе $O\xi\eta$ должно удовлетворять условию периодичности во времени с частотой ω . Этому условию удовлетворяет не зависящее от времени движение жидкостей в $O\xi\eta$ (назовем его A), рассмотренное в п. 4. Допустим, что наряду с ним в случае круговой прецессии малого радиуса возможно другое движение жидкостей в системе $O\xi\eta$ (назовем его A'), периодически зависящее от времени с частотой ω . Разности гидродинамических полей движений A и A' удовлетворяют системе однородных уравнений Навье — Стокса в плоскости $O\xi\eta$, линеаризованных вблизи квазитвердого вращения жидкостей (3.1), из которых с использованием граничных условий получим

$$(П.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \int_{\tau_k} \rho_k w^2 d\tau_k + (\rho_1 - \rho_2) \frac{\Omega^2 b^2}{2} \int_0^{2\pi} \zeta^2 d\varphi \right) =$$

$$= - \sum_{k=1}^2 \mu_k \int_{\tau_k} \left[2 \left(\frac{\partial w_{\xi}}{\partial \xi} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w_{\eta}}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_{\xi}}{\partial \eta} + \frac{\partial w_{\eta}}{\partial \xi} \right)^2 \right] d\tau_k,$$



Ф и г. 4



Ф и г. 5

где $\mathbf{w} = \mathbf{e}_z w_z + \mathbf{e}_r w_r$ — разность полей скоростей движений A и A' ; $\xi(\varphi, t)$ — расстояние по радиусу, проведенному из точки O , между границами раздела жидкостей в движениях A и A' ; τ_1 — кольцо $a \geq r \geq b$, τ_2 — круг $0 \leq r \leq b$ в плоскости $O\xi\eta$. Из (П. 1) видно, что разности гидродинамических полей движений A и A' не могут периодически зависеть от времени, что противоречит периодичности самих движений A, A' . Остается принять, что в случае круговой прецессии вращающегося цилиндра с жидким заполнением по окружности малого радиуса движение заполняющих жидкостей относительно системы $O\xi\eta$ не зависит от времени.

Поступила 28 X 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В. В. Об устойчивости установившихся движений твердых тел с полостями, наполненными жидкостью. — ПММ, 1962, т. 26, вып. 6.
2. Saito S., Someya T. Self-excited vibration of a rotating hollow shaft partially filled with liquid. — Trans. ASME. Journal of Mechanical Design, 1980, vol. 102, N 1.
3. Дерендяев Н. В., Сандалов В. М. Об устойчивости стационарного вращения цилиндра, частично заполненного вязкой несжимаемой жидкостью. — ПММ, 1982, т. 46, вып. 4.
4. Малащенко С. В. Некоторые экспериментальные исследования, относящиеся к вращению тел. — ПМТФ, 1960, № 3.
5. Справочник по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979.
6. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961.

УДК 532.135

НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ ТЕЧЕНИЯ ВСЛЕДСТВИЕ ТЕПЛОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

В. В. Грачев, Э. Н. Руманов

(Черноголовка)

Для течений сильновязкой жидкости неустойчивость ламинарного режима, связанная с возникновением турбулентности, обычно незначительна, так как числа Рейнольдса малы. Для таких течений на первый план выступает тепловая неустойчивость, обнаруженная и исследованная в [1, 2] и др. В [2] было показано, что тепловая неустойчивость имеет место при фиксации перепада давления Δp и приводит к скачкам расхода при определенных критических значениях Δp (гидродинамическое воспламенение и потухание).

Вместе с тем в электрических системах тепловая неустойчивость имеет место также и при фиксированном токе (аналог расхода в гидродинамике), причем развитие неустойчивости приводит к неоднородным [3] или несимметричным [4] режимам.

В данной работе рассмотрено нарушение симметрии течения через пару трубок (соединенных параллельно) при фиксированном полном расходе. Показано, что в отличие от аналогичной электрической системы [4] в рассматриваемом случае нарушенная симметрия восстанавливается по мере увеличения расхода. Восстановление симметрии обусловлено конвективным характером неустойчивости.

1. Рассматривается течение сильновязкой несжимаемой жидкости через две параллельно соединенные цилиндрические трубки с заданным полным расходом. При движении жидкости вследствие диссипации выделяется тепло, которое отводится в стенки трубок.

При параллельном соединении трубок имеют место равенства

$$\frac{\pi r^4}{8} \Delta p = Q_1 \int_0^l \mu(T_1) dz = Q_2 \int_0^l \mu(T_2) dz, \quad Q = Q_1 + Q_2,$$

где Δp — перепад давлений между входом и выходом из трубок; r — радиус трубок; l — длина трубок; z — координата вдоль осей трубок; μ — динамическая вязкость; T_1 и T_2 — температура жидкости; Q_1 и Q_2 — расходы; индексы 1 и 2 относятся соответственно к первой и второй трубке;