

УДК 532.517.4

МЕТОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ: ЛОКАЛЬНО-РАВНОВЕСНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В БЕЗЫМПУЛЬСНОМ ПЛОСКОМ ТУРБУЛЕНТНОМ СЛЕДЕ

В. Н. Гребенев*, А. Г. Деменков**,***, Г. Г. Черных*

* Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, 630090 Новосибирск, Россия

** Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия

*** Новосибирский государственный технический университет, 630073 Новосибирск, Россия
E-mails: vngrebenev@gmail.com, demenkov@itp.nsc.ru, chernykh@ict.nsc.ru

Установлено, что локально-равновесное приближение (алгебраическая параметризация тройных корреляций турбулентных флуктуаций вертикальной компоненты скорости) в задаче о плоском безымпурсном турбулентном следе является дифференциальной связью для модели третьего порядка замыкания. Приведены результаты численных экспериментов, подтверждающие реализуемость используемой известной алгебраической параметризации этого корреляционного момента третьего порядка.

Ключевые слова: метод дифференциальных связей, полуэмпирические модели турбулентности, алгебраическое представление момента третьего порядка, численное моделирование.

DOI: 10.15372/PMTF20210304

Введение. Метод статистических моментов, используемый при исследовании турбулентных течений, хорошо известен [1, 2]. При изучении алгебраических параметризаций для высших моментов гидродинамических полей в полуэмпирической теории турбулентности применяется метод дифференциальных связей. Этот метод, используемый для выделения классов решений систем дифференциальных уравнений и позволяющий получать соотношения градиентного типа для искомых функций, совместных с исходной системой, был предложен Н. Н. Яненко [3]. Из результатов, полученных в работе [3], следует возможность применения данного подхода для проверки корректности процедуры замыкания моментных уравнений [1, 2] в теории турбулентности. Метод дифференциальных связей развит и применен для исследования задач газовой динамики в [4]. В этом методе выделение частных решений системы дифференциальных уравнений осуществляется путем присоединения к ней дополнительных дифференциальных соотношений. Метод дифференциальных связей позволяет не только находить конкретные классы решений, но и проводить аналитические исследования, основанные на понятии инвариантного многообра-

Работа выполнена в рамках государственного задания Федерального исследовательского центра информационных и вычислительных технологий по теме “Разработка и исследование вычислительных технологий решения фундаментальных и прикладных задач аэро-, гидро- и волновой динамики”. Численные эксперименты выполнены в Институте теплофизики СО РАН в рамках государственного задания № 121031100246-5.

© Гребенев В. Н., Деменков А. Г., Черных Г. Г., 2021

зия (см. [5]). Данное понятие является обобщением инвариантного множества, порожденного первыми интегралами системы обыкновенных дифференциальных уравнений, поэтому задача сводится к исследованию систем дифференциальных уравнений на поверхностях уровня, определяемых соответствующими уравнениями. Наличие дифференциальных связей, задающих инвариантное многообразие, позволяет уменьшить число уравнений и заменить операцию дифференцирования некоторой алгебраической процедурой. Впервые метод дифференциальных связей применен для обоснования корректности замыкания полуэмпирических моделей турбулентности в работах [6–8]. Применение этого подхода при исследовании параметрических моделей турбулентности позволило сформулировать концепцию для обоснования процедуры замыкания моментных уравнений в рамках метода дифференциальных связей: алгебраические параметризации высших моментов модели интерпретируются как уравнения инвариантных многообразий, порожденные соответствующими дифференциальными уравнениями модели [6–8]. Эта процедура дает возможность обосновать известные алгебраические модели Ханьялича — Лаундера [9], Земана — Ламли [10] и алгебраические параметризации высших моментов гидродинамических полей, проанализировать некоторые известные алгебраические модели и предложить более простые схемы численной реализации моделей турбулентных течений.

В настоящей работе, являющейся продолжением [6–8], на примере задачи о плоском безымпульсном турбулентном следе с использованием метода дифференциальных связей рассмотрены две математические модели турбулентности третьего порядка замыкания и их редукции на инвариантных многообразиях, порожденных алгебраической параметризацией тройных корреляций турбулентных флуктуаций вертикальной компоненты скорости (дифференциальная связь). Представлены результаты численных расчетов, подтверждающие реализуемость классической алгебраической параметризации указанной тройной корреляции [9].

1. Дифференциальные связи и алгебраические параметризации моментов гидродинамических полей. Метод статистических моментов, используемый при описании структуры турбулентных течений, основан на введенном О. Рейнольдсом [1, 2] представлении каждой исследуемой величины в виде суммы ее среднего значения и турбулентных пульсаций. С использованием уравнений Навье — Стокса и операции осреднения могут быть получены уравнения переноса для моментов произвольного порядка. В силу нелинейности уравнений гидродинамики любое из полученных уравнений включает неизвестные функции, для которых также могут быть записаны соответствующие уравнения переноса. Однако система останется незамкнутой, так как получение новых уравнений для моментов более высокого порядка приведет к тому, что число неизвестных функций будет увеличиваться быстрее числа уравнений. Таким образом, точная модель турбулентности включает бесконечную цепочку уравнений Фридмана — Келлера [1]. Основной проблемой, возникающей в статистической гидромеханике при переходе от бесконечной цепочки уравнений к конечной, является проблема замыкания. Замкнутые математические модели (полуэмпирические модели турбулентности) получаются путем аппроксимации неизвестных величин в уравнениях. Анализ такого рода моделей показывает, что в существующих процедурах замыкания бесконечной цепочки уравнений для моментов часто неявно используются предположения, что рассматриваемые системы дифференциальных уравнений допускают инвариантные множества (многообразия). Как правило, вывод замыкающих соотношений (алгебраических параметризаций высших моментов) основан на использовании эмпирических гипотез и необоснованных предположений (см. [11]). Например, в приближенно равновесных сдвиговых течениях доминирующими операторами в уравнении баланса кинетической энергии турбулентности считаются слагаемые, обусловленные порождением энергии турбулентности за счет градиентов осредненного движения и дисси-

пацией. В этом случае замкнутый вид соответствующей модели получается в результате установления алгебраической связи между градиентом средней скорости и касательным рейнольдсовым напряжением (анализ локально-равновесного приближения для касательного напряжения проведен на примере задачи о динамике дальнего турбулентного следа [8] за буксируемым телом). Такая параметризация [12] не объясняет и не описывает нелокальный механизм турбулентного переноса.

Для устранения недостатков данной параметризации необходимо перейти к модели, позволяющей адекватно описывать процессы турбулентного переноса и замыкать систему на уровне моментов более высокого порядка. Например, тройные корреляции поля скорости могут быть выражены через искомые моменты первого и второго порядков в алгебраической форме. Для этого применялись различные зависимости диффузионных членов моментных уравнений от градиентов гидродинамических величин [12]. Рассматриваемая алгебраическая параметризация (модель Ханьялича — Лаундера [9]) получается из точного уравнения для корреляций третьего порядка в пренебрежении слагаемыми, определяющими конвективный перенос, и членами, обусловленными наличием градиентов. Эффективным способом построения замкнутых математических моделей турбулентности является метод бескумулянтных приближений. В [13] выполнено замыкание моментной цепочки уравнений переноса кумулянтов четвертого порядка в предположении равенства нулю кумулянтов пятого порядка. Проверка корректности замены дифференциального уравнения соответствующим замыкающим соотношением состоит в исследовании полученной системы уравнений на совместность. Метод дифференциальных связей [3] позволяет исследовать переопределенные системы и может быть использован при обосновании алгебраических параметризаций, применяемых при вычислении моментов. Известные алгоритмы, разработанные Картаном, Спенсером, Яненко и др. для исследования на совместность переопределенных систем, являются достаточно сложными при их реализации.

Понятие инвариантного многообразия, введенное в [5] для произвольной системы эволюционных уравнений, является естественным обобщением инвариантного множества системы обыкновенных дифференциальных уравнений и позволяет находить определенные классы дифференциальных связей. На основе этого понятия О. В. Капцовым разработан эффективный метод (см. [5]), обобщающий классические определяющие уравнения для операторов Ли — Беклунда и позволяющий найти инвариантные многообразия, допускаемые широким классом уравнений и систем уравнений в частных производных, а затем построить их решения.

При выводе алгебраических параметризаций для высших моментов можно использовать понятие инвариантности множества (из некоторого конфигурационного пространства решений), определяемого алгебраическим выражением для статистических моментов относительно потока, порожденного соответствующим дифференциальным уравнением.

Приведем некоторые сведения, изложенные в [5]. Рассмотрим систему эволюционных уравнений E :

$$u_t^i = F^i(t, x, u^1, \dots, u^m, u_x^1, u_x^2, \dots), \quad i = 1, \dots, m.$$

Дополним систему дифференциальными связями H :

$$h_j(t, x, u^1, \dots, u^m, u_x^1, u_x^2, \dots) = 0, \quad j = 1, \dots, p, \quad (1)$$

где $p \geq m$. Далее запись $G|_M = 0$ означает, что равенство $G = 0$ выполняется на множестве M . Дифференциальные связи H задают инвариантное многообразие системы E , если имеют место равенства

$$D_t(h_j)|_{[E] \cup [H]} = 0, \quad j = 1, \dots, p,$$

где $[\cdot]$ — система уравнений и ее дифференциальные следствия относительно x . Справедлива следующая теорема [5].

Теорема 1. *Предположим, что система E допускает инвариантное многообразие H . Пусть уравнения (1) разрешимы относительно старших производных и заданы начальные условия $u_{n_i}^i(x_0, t_0) = c_{ik_i}$. Тогда в некоторой окрестности точки (x_0, t_0) существует единственное решение задачи Коши для уравнения (1).*

2. Анализ локально-равновесного приближения. Экспериментальное и расчетно-теоретическое изучение безимпульсных турбулентных следов за телами проведено в ряде работ (см. [14–17]). Показано (см., например, [16]), что поведение безимпульсных турбулентных следов существенно отличается от поведения турбулентных следов с ненулевым избыточным импульсом: на расстоянии от тела, равном нескольким десяткам его диаметров, течение становится практически бесдвиговым, касательные турбулентные напряжения в нем равны нулю и влиянием дефекта продольной компоненты скорости можно пренебречь.

Ниже проводится исследование применимости алгебраического представления тройных корреляций флуктуаций вертикальной компоненты скорости турбулентного потока $\langle v^3 \rangle$, рассматриваются замкнутые математические модели 1, 2.

2.1. *Инвариантное многообразие: дифференциальная связь модели 1.* С учетом указанных выше свойств плоского безимпульсного дальнего турбулентного следа в однородной жидкости используется модель третьего порядка замыкания (модель 1):

$$U_0 \frac{\partial \langle v^2 \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle v^3 \rangle}{\partial y} = -c_\varepsilon \frac{\langle v^2 \rangle}{\tau}; \quad (2)$$

$$U_0 \frac{\partial \langle v^3 \rangle}{\partial x} + 3 \langle v^2 \rangle \frac{\partial \langle v^2 \rangle}{\partial y} = -\frac{3}{2} (c_\varepsilon + c_{\Phi_1}) \frac{\langle v^3 \rangle}{\tau}; \quad (3)$$

$$U_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = c_d \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau \langle v^2 \rangle \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) - c_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon}{\tau}, \quad (4)$$

которая может быть получена в результате упрощения модели третьего порядка [12]. В (2)–(4) $\tau = e/\varepsilon$ — временной масштаб; $e = (3/2)\langle v^2 \rangle$ — кинетическая энергия турбулентности; $\langle v^2 \rangle$, $\langle v^3 \rangle$ — одноточечные корреляции вертикальной компоненты скорости второго и третьего порядков; ε — скорость диссипации. Слагаемые в уравнениях (2)–(4), содержащие молекулярную вязкость, отброшены в силу их малости. Начало координат находится на задней кромке тела, x — горизонтальная ось, y — вертикальная. Введем переменную $t = \theta(x) \equiv U_0^{-1}x$ и функцию $\hat{\tau} = \langle v^2 \rangle/\varepsilon \equiv (2/3)\tau$. С использованием новых координат y, t система (2)–(4) записывается в виде

$$\frac{\partial \langle \hat{v}^2 \rangle}{\partial t} = -\frac{\partial \langle \hat{v}^3 \rangle}{\partial y} - \frac{2}{3} c_\varepsilon \frac{\langle \hat{v}^2 \rangle}{\hat{\tau}}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial \langle \hat{v}^3 \rangle}{\partial t} = -3 \langle \hat{v}^2 \rangle \frac{\partial \langle \hat{v}^2 \rangle}{\partial y} - (c_\varepsilon + c_{\Phi_1}) \frac{\langle \hat{v}^3 \rangle}{\hat{\tau}}; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial t} = c_d \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{3}{2} \hat{\tau} \langle \hat{v}^2 \rangle \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} c_{\varepsilon_2} \frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{\tau}}, \quad (7)$$

где $c_d = C_s/\sigma_\varepsilon \approx 0,2$; $c_\varepsilon \approx 1$; $c_{\Phi_1} \approx 2$; $c_{\varepsilon_2} \approx 1,9$; $\langle \hat{v}^2 \rangle = \langle v^2 \rangle(\theta^{-1}(t), y)$; $\langle \hat{v}^3 \rangle = \langle v^3 \rangle(\theta^{-1}(t), y)$; $\hat{\varepsilon} = \varepsilon(\theta^{-1}(t), y)$. Уравнение для $\hat{\tau}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\tau}}{\partial t} = & -\frac{\hat{\tau}}{\langle \hat{v}^2 \rangle} \left[\frac{\partial \langle \hat{v}^3 \rangle}{\partial y} + \delta_1 \hat{\tau} \langle \hat{v}^2 \rangle \frac{\partial^2 \langle \hat{v}^2 \rangle}{\partial z^2} + \delta_1 \hat{\tau} \left(\frac{\partial \langle \hat{v}^2 \rangle}{\partial y} \right)^2 \right] + \\ & + \delta_1 \langle \hat{v}^2 \rangle \hat{\tau} \frac{\partial^2 \hat{\tau}}{\partial y^2} + 2\delta_1 \hat{\tau} \frac{\partial \hat{\tau}}{\partial y} \frac{\partial \langle v^2 \rangle}{\partial y} - \delta_1 \left(\frac{\partial \hat{\tau}}{\partial y} \right)^2 \langle \hat{v}^2 \rangle + \frac{2}{3} (c_{\varepsilon_2} - c_\varepsilon), \end{aligned}$$

где $\delta_1 = (3/2)c_d \approx 0,3$. Следствием локально-равновесного усечения уравнения (6) является известное соотношение

$$\langle \hat{v}^3 \rangle = -C_s \hat{\tau} \langle \hat{v}^2 \rangle \frac{\partial \langle \hat{v}^2 \rangle}{\partial y}. \quad (8)$$

Вывод данного соотношения путем алгебраического усечения дифференциального уравнения переноса $\langle v^3 \rangle$ приведен в работе [9].

Проверим, является ли множество

$$O = \left\{ \langle \hat{v}^2 \rangle, \langle \hat{v}^3 \rangle, \hat{\tau}: H^1(\langle \hat{v}^2 \rangle, \langle \hat{v}^3 \rangle, \hat{\tau}) \equiv \langle \hat{v}^3 \rangle + C_s \hat{\tau} \langle \hat{v}^2 \rangle \frac{\partial \langle \hat{v}^2 \rangle}{\partial y} = 0 \right\}$$

инвариантным относительно потока, порожденного уравнением (6). Найдем условие инвариантности множества O , а затем класс решений системы (5)–(7), для которого это условие выполнено.

Теорема 2. Пусть $\{\langle \hat{v}^2 \rangle, \langle \hat{v}^3 \rangle, \varepsilon\}$ — достаточно гладкое решение (5)–(7). Тогда множество O является инвариантным многообразием системы (5)–(7), если и только если

$$\begin{aligned} C_s \frac{\partial \hat{\tau}}{\partial t} \frac{\partial \langle \hat{v}^2 \rangle}{\partial y} \langle \hat{v}^2 \rangle + C_s \hat{\tau} \frac{\partial \langle \hat{v}^2 \rangle}{\partial t} \frac{\partial \langle \hat{v}^2 \rangle}{\partial y} + C_s \hat{\tau} \langle \hat{v}^2 \rangle \frac{\partial^2 \langle \hat{v}^2 \rangle}{\partial t \partial y} = \\ = 3 \langle \hat{v}^2 \rangle \frac{\partial \langle \hat{v}^2 \rangle}{\partial y} + (c_{\varepsilon_2} + c_{\Phi_1}) \frac{\langle \hat{v}^3 \rangle}{\hat{\tau}}. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы следует из формулы

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} H^1 = -3 \langle \hat{v}^2 \rangle \frac{\partial \langle \hat{v}^2 \rangle}{\partial y} - (c_{\varepsilon_2} + c_{\Phi_1}) \frac{\langle \hat{v}^3 \rangle}{\hat{\tau}} + C_s \frac{\partial \hat{\tau}}{\partial t} \frac{\partial \langle \hat{v}^2 \rangle}{\partial y} \langle \hat{v}^2 \rangle + \\ + C_s \hat{\tau} \frac{\partial \langle \hat{v}^2 \rangle}{\partial t} \frac{\partial \langle \hat{v}^2 \rangle}{\partial y} + C_s \hat{\tau} \langle \hat{v}^2 \rangle \frac{\partial^2 \langle \hat{v}^2 \rangle}{\partial t \partial y}, \end{aligned}$$

получаемой в результате дифференцирования выражения для H^1 по переменной t и замены производной $\partial \langle v^3 \rangle / \partial t$ на правую часть уравнения (6).

2.2. Инвариантное многообразие модели 2. Из математической модели [13], замкнутой в предположении равенства нулю кумулянтов пятого порядка, с учетом свойств плоского безымпурсного турбулентного следа может быть получена следующая математическая модель третьего порядка замыкания (модель 2):

$$U_0 \frac{\partial \langle v^2 \rangle}{\partial x} = -\frac{\partial \langle v^3 \rangle}{\partial y} - \frac{2}{3} \varepsilon; \quad (9)$$

$$U_0 \frac{\partial \langle v^3 \rangle}{\partial x} = -\frac{\partial \langle C \rangle}{\partial y} - 3 \langle v^2 \rangle \frac{\partial \langle v^2 \rangle}{\partial y} - c_2 \langle v^3 \rangle \frac{\varepsilon}{e}; \quad (10)$$

$$U_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = c_d \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e}{\varepsilon} \langle v^2 \rangle \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) - c_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{e}. \quad (11)$$

Здесь $C = \langle v^4 \rangle - 3 \langle v^2 \rangle^2$ — кумулянт четвертого порядка турбулентных флуктуаций вертикальной компоненты скорости. В уравнениях (10), (11) эмпирические константы c_2 , c_d , c_{ε_2} принимают значения, приведенные в подп. 2.1. Система уравнений (9)–(11) дополняется следующим алгебраическим представлением для C [13, 18]:

$$C = c_1 \frac{e}{\varepsilon} \left[6 \langle v^3 \rangle \frac{\partial \langle v^2 \rangle}{\partial y} + \langle v^2 \rangle \frac{\partial \langle v^3 \rangle}{\partial y} \right]$$

(c_1 — эмпирическая постоянная). Как и в [7], в данной модели кумулянта C определяющим является второе слагаемое.

Таким образом, в переменных y, t , где $t = \theta(x) \equiv U_0^{-1}x$, система уравнений принимает вид

$$\frac{\partial \langle \bar{v}^2 \rangle}{\partial t} = -\frac{\partial \langle \bar{v}^3 \rangle}{\partial y} - \alpha \frac{\langle \bar{v}^2 \rangle}{\bar{\tau}}; \quad (12)$$

$$\frac{\partial \langle \bar{v}^3 \rangle}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\varkappa \bar{\tau} \langle \bar{v}^2 \rangle \frac{\partial \langle \bar{v}^3 \rangle}{\partial y} \right] - 3 \langle \bar{v}^2 \rangle \frac{\partial \langle \bar{v}^2 \rangle}{\partial y} - \gamma \frac{\langle \bar{v}^3 \rangle}{\bar{\tau}}; \quad (13)$$

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\delta \bar{\tau} \langle \bar{v}^2 \rangle \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial y} \right] - \rho \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\tau}}. \quad (14)$$

Здесь $\alpha = 2/3$; $\varkappa, \gamma, \delta, \rho$ — постоянные, значения которых определяются через эмпирические константы модели; $\langle \bar{v}^2 \rangle = \langle v^2 \rangle(\theta^{-1}(t), y)$; $\langle \bar{v}^3 \rangle = \langle v^3 \rangle(\theta^{-1}(t), y)$; $\bar{\varepsilon} = \varepsilon(\theta^{-1}(t), y)$.

Следует отметить, что стандартная модель турбулентности второго порядка замыкания получается с использованием локально-равновесного приближения, в результате чего уравнение (13) заменяется алгебраической параметризацией для $\langle \bar{v}^3 \rangle$, аналогичной (8):

$$\langle \bar{v}^3 \rangle = -\frac{3}{\gamma} \bar{\tau} \langle \bar{v}^2 \rangle \frac{\partial \langle \bar{v}^2 \rangle}{\partial y}.$$

Рассмотрим следующее множество:

$$O_L = \left\{ \langle \bar{v}^2 \rangle, \langle \bar{v}^3 \rangle, \bar{\tau}: H_L^1(\langle \bar{v}^2 \rangle, \langle \bar{v}^3 \rangle, \bar{\tau}) \equiv \langle \bar{v}^3 \rangle + \frac{3}{\gamma} \bar{\tau} \langle \bar{v}^2 \rangle \frac{\partial \langle \bar{v}^2 \rangle}{\partial y} = 0 \right\}. \quad (15)$$

Докажем, что система (12)–(14) допускает инвариантное многообразие, определяемое уравнением (15). Решения уравнения для $\bar{\tau}$ играют важную роль при доказательстве инвариантности множества O_L . Вычисляя производную $\bar{\tau}$ и используя уравнения (12), (14), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial t} = & -\frac{\bar{\tau}}{\langle \bar{v}^3 \rangle} \left[\frac{\partial \langle \bar{v}^3 \rangle}{\partial y} + \delta \bar{\tau} \langle \bar{v}^2 \rangle \frac{\partial^2 \langle \bar{v}^2 \rangle}{\partial y^2} + \delta \bar{\tau} \left(\frac{\partial \langle \bar{v}^2 \rangle}{\partial y} \right)^2 \right] + \\ & + \delta \langle \bar{v}^2 \rangle \bar{\tau} \frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial y^2} + 2\delta \bar{\tau} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial y} \frac{\partial \langle \bar{v}^2 \rangle}{\partial y} - \delta \left(\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial y} \right)^2 \langle \bar{v}^2 \rangle + \rho - \alpha. \end{aligned}$$

Справедлива

Теорема 3. Пусть $\{\langle \bar{v}^2 \rangle, \langle \bar{v}^3 \rangle, \bar{\varepsilon}\}$ — достаточно гладкое решение системы (12)–(14), $3/c_2 = \delta$. Предположим, что $3/\delta + 2\alpha - \gamma = \rho - \alpha$ и $\varkappa = \delta$. Тогда O_L является инвариантным многообразием системы (12)–(14), ее редукция на множестве O_L имеет вид

$$\langle \bar{v}^2 \rangle = \bar{\tau} \bar{\varepsilon}, \quad \langle \bar{v}^3 \rangle = -\delta \bar{\tau} \langle \bar{v}^2 \rangle \frac{\partial \langle \bar{v}^2 \rangle}{\partial y}, \quad \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\delta \bar{\tau} \langle \bar{v}^2 \rangle \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial y} \right] - \rho \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\tau}},$$

где функция $\bar{\tau}(y, t) \equiv \bar{\tau}(t)$ — решение обыкновенного дифференциального уравнения для $\bar{\tau}$ на множестве O_L :

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \rho - \alpha.$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2.

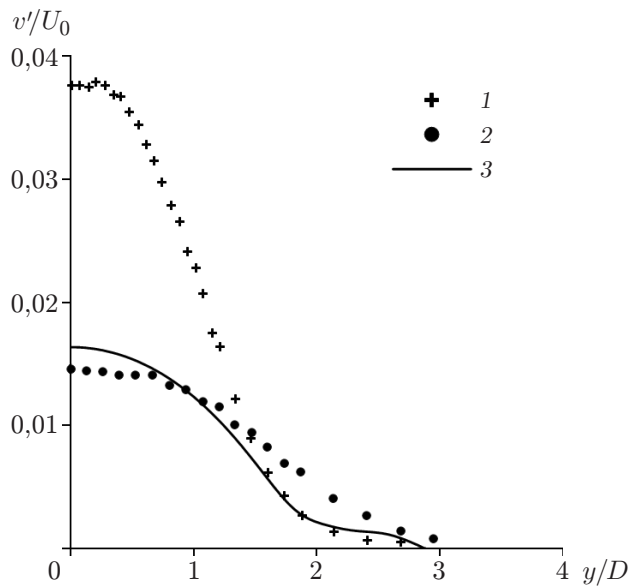


Рис. 1

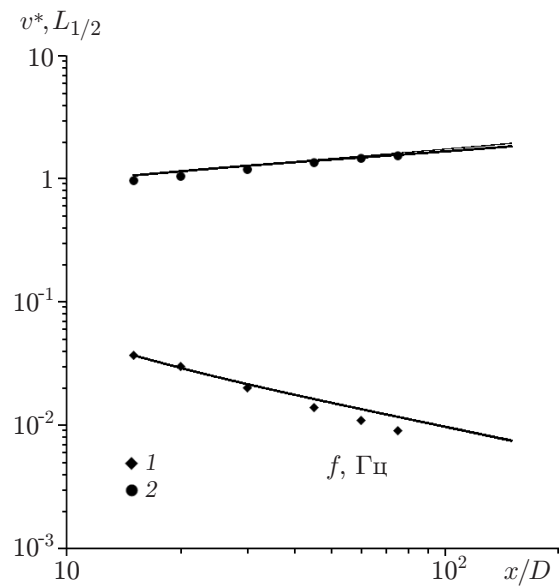


Рис. 2

Рис. 1. Экспериментальные (1, 2) и расчетное (3) распределения интенсивности турбулентных флуктуаций вертикальной компоненты скорости $v' = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ в поперечном направлении:

1 — начальное распределение при $x/D = 15$, 2 — экспериментально полученное распределение v' при $x/D = 45$, 3 — результаты расчетов по моделям 1–3 при $x/D = 45$

Рис. 2. Распределения в осевом направлении интенсивности турбулентных флуктуаций скорости v^* (1) и характерного размера следа $L_{1/2}/D$ (2):

точки — экспериментальные данные, линии — результаты расчетов по моделям 1–3

2.3. Результаты численных экспериментов. С целью анализа применимости алгебраического представления (8) выполнена серия численных экспериментов. В дополнение к приведенным выше моделям 1, 2 будем рассматривать модель 3, включающую уравнения (9), (11) и соотношение (8). Переменная x играет роль времени. Переменные задачи обезразмерены с помощью характерных масштабов скорости U_0 и длины D (U_0 — скорость невозмущенного потока, D — диаметр тела). При задании начальных условий при $x_0 = 15D$ использовались результаты лабораторных экспериментов [15]. Значение ε задавалось с использованием соотношения Колмогорова [2], начальное распределение $\langle v^3 \rangle$ — с использованием соотношения (8). При $y = 0$ с учетом физических представлений ставились условия симметрии для величин $\langle v^2 \rangle$, ε и антисимметрии для $\langle v^3 \rangle$. В качестве граничных условий при $y \rightarrow \infty$ задавались нулевые краевые условия. Значения эмпирических постоянных полагались стандартными [12, 13, 18].

Для решения начально-краевых задач применялись простейшие разностные схемы, имеющие первый порядок аппроксимации по переменной x и второй — по y [16]. Результаты расчетов приведены на рис. 1–4. На рис. 1 представлены начальное ($x/D = 15$) распределение интенсивности турбулентных флуктуаций вертикальной компоненты скорости $v' = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ (точки 1), экспериментально полученное распределение v' при $x/D = 45$ (точки 2) и результаты расчетов по моделям 1–3 при $x/D = 45$ (кривая 3). Результаты расчетов по моделям 1–3 практически совпадают и удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными.

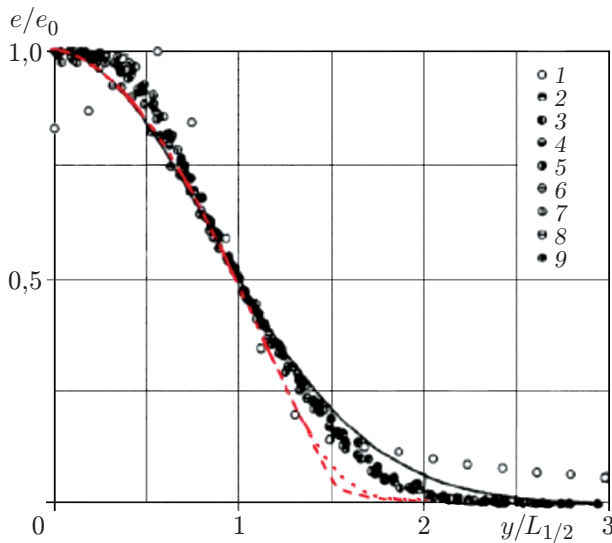


Рис. 3

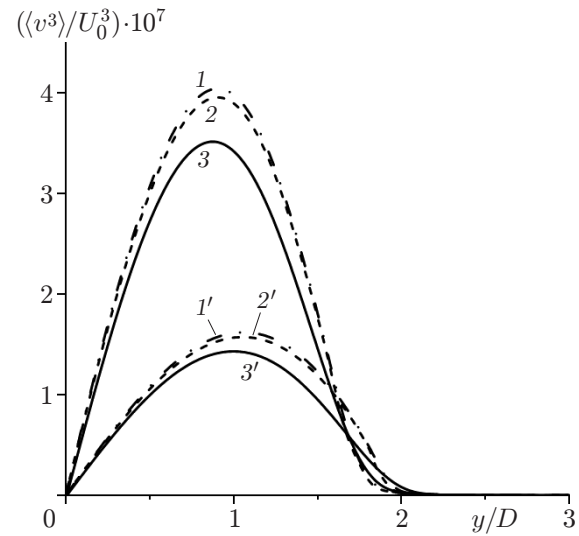


Рис. 4

Рис. 3. Экспериментальные (точки) и расчетные (линии) профили энергии турбулентности в плоском безымпульсном турбулентном следе:

1 — $x/D = 1$, 2 — $x/D = 5$, 3 — $x/D = 10$, 4 — $x/D = 15$, 5 — $x/D = 20$, 6 — $x/D = 30$, 7 — $x/D = 45$, 8 — $x/D = 60$, 9 — $x/D = 75$; сплошная линия — $e/e_0 = \exp[-0,693(y/L_{1/2})^2]$, штриховая — результаты расчета по модели 1 при $x/D = 75$, пунктирная — результаты расчетов по моделям 2, 3 при $x/D = 75$

Рис. 4. Профили корреляционного момента третьего порядка $\langle v^3 \rangle$, рассчитанные по моделям 1–3:

1–3 — $x/D = 45$, 1'–3' — $x/D = 75$; 1, 1' — модель 1, 2, 2' — модель 2, 3, 3' — модель 3

Распределение в осевом направлении интенсивности турбулентных флуктуаций вертикальной компоненты скорости $v^* = \sqrt{\langle v^2 \rangle(x, 0)}$ и характерного размера турбулентного следа $L_{1/2}/D$, определяемого из соотношения для $L_{1/2}(x)$:

$$\langle u^2 \rangle(x, L_{1/2}) = \langle u^2 \rangle(x, 0)/2,$$

показано на рис. 2. В моделях 1–3 принято равенство одноточечных корреляционных моментов второго порядка турбулентных флуктуаций горизонтальной $\langle u^2 \rangle$ и вертикальной $\langle v^2 \rangle$ компонент скорости: $\langle u^2 \rangle = \langle v^2 \rangle$; результаты расчетов по всем трем рассмотренным моделям практически совпадают и достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными.

На рис. 3 представлены экспериментальные [15] и расчетные профили энергии турбулентности $e = 1,5\langle v^2 \rangle/e(x, 0) = 1,5\langle v^2 \rangle/e_0$ в плоском безымпульсном турбулентном следе. Результаты расчетов по моделям 1–3 близки и согласуются с экспериментальными данными. На рис. 4 показаны рассчитанные по моделям 1–3 профили корреляционного момента третьего порядка $\langle v^3 \rangle$ на расстояниях от тела $x/D = 45$ (кривые 1–3) и $x/D = 75$ (кривые 1'–3'). В модели 3 величина $\langle v^3 \rangle$ определялась из алгебраического соотношения (8). Функции $\langle v^3 \rangle/U_0^3$, вычисленные по моделям 1, 2, хорошо согласуются. Корреляционная функция, полученная по модели 3, незначительно отличается от корреляционных функций, полученных по моделям 1, 2.

Как отмечено выше, расчеты проводились при стандартных эмпирических постоянных, что позволило провести сравнение расчетных и экспериментальных данных. Уста-

новлено, что они удовлетворительно согласуются. При проведении исследований корреляционного момента третьего порядка по моделям 1–3 в теоремах 2, 3 накладывались ограничения на эмпирические постоянные. Однако при использовании стандартного набора эмпирических постоянных результаты расчетов корреляционного момента второго порядка $\langle v^2 \rangle$ по моделям 1–3 также хорошо согласуются. Результаты численных экспериментов показывают, что алгебраическое представление (8) применимо при решении задачи о течении в плоском безымпурсном турбулентном следе.

Заключение. В работе при изучении течения в плоском безымпурсном турбулентном следе рассмотрены две математические модели турбулентности, включающие дифференциальное уравнение переноса тройного одноточечного корреляционного момента $\langle v^3 \rangle$ — тройной корреляции турбулентных флуктуаций вертикальной компоненты скорости. Результатом алгебраического локально-равновесного усечения уравнения переноса для $\langle v^3 \rangle$ в этих моделях является известная алгебраическая модель (8) этой величины. Показано, что алгебраическое соотношение (8) является дифференциальной связью моделей 1, 2 третьего порядка замыкания. Представлены результаты численных экспериментов, подтверждающих реализуемость алгебраической параметризации третьего корреляционного момента.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Монин А. С.** Статистическая гидромеханика / А. С. Монин, А. М. Яглом. СПб.: Гидрометеоиздат, 1992. Т. 1.
2. **Монин А. С.** Статистическая гидромеханика / А. С. Монин, А. М. Яглом. СПб.: Гидрометеоиздат, 1996. Т. 2.
3. **Яненко Н. Н.** Теория совместности и методы интегрирования систем нелинейных уравнений в частных производных // Тр. 4-го Всесоюз. мат. съезда, Ленинград, 3–12 июля 1961 г. Л.: Наука. Ленингр. отд-ние, 1964. Т. 2. С. 247–252.
4. **Сидоров А. Ф.** Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике / А. Ф. Сидоров, В. П. Шапеев, Н. Н. Яненко. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988.
5. **Андреев В. К.** Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике / В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1994.
6. **Гребенев В. Н., Илюшин Б. Б.** О применении дифференциальных связей для анализа моделей турбулентности // Докл. АН. 2000. Т. 374, № 6. С. 761–764.
7. **Гребенев В. Н., Илюшин Б. Б.** Метод дифференциальных связей в задаче о бесдвиговом стратифицированном слое смешения // Докл. АН. 2002. Т. 382, № 6. С. 764–768.
8. **Гребенев В. Н., Деменков А. Г., Черных Г. Г.** Анализ локально-равновесного приближения в задаче о дальнем плоском турбулентном следе // Докл. АН. 2002. Т. 385, № 1. С. 57–60.
9. **Hanjalic K., Launder B. E.** A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows // J. Fluid Mech. 1972. V. 52. P. 609–638.
10. **Zeman O., Lumley J. L.** Modeling buoyancy driven mixed layer // J. Atmospher. Sci. 1976. V. 33. P. 1974–1988.
11. **Chorin A.** Theories of turbulence // Lecture Notes Math. 1977. V. 615. P. 36–47.
12. **Курбацкий А. Ф.** Моделирование нелокального турбулентного переноса импульса и тепла. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988.
13. **Илюшин Б. Б.** Модель кумулянтов четвертого порядка для описания турбулентного переноса крупномасштабными вихревыми структурами // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 5. С. 106–112.

14. **Дмитренко Ю. М., Ковалев И. И., Лучко Н. Н., Черепанов П. Я.** Исследование плоского турбулентного следа с нулевым избыточным импульсом // Инж.-физ. журн. 1987. Т. 52, № 5. С. 743–750.
15. **Cimbala J. M., Park W. J.** An experimental investigation of the turbulent structure in a two-dimensional momentumless wake // J. Fluid Mech. 1990. V. 213. P. 479–509.
16. **Федорова Н. Н., Черных Г. Г.** О численном моделировании плоских турбулентных следов // Мат. моделирование. 1994. Т. 6, № 10. С. 24–34.
17. **Maderich V., Konstantinov S.** Asymptotic and numerical analysis of momentumless turbulent wakes // Fluid Dynamics Res. 2010. V. 42. 045503. DOI: 10.1088/0169-5983/42/4/045503.
18. **Воропаева О. Ф., Илюшин Б. Б., Черных Г. Г.** Численное моделирование дальнего безимпульсного турбулентного следа в линейно стратифицированной среде // Докл. АН. 2002. Т. 386, № 6. С. 756–760.

*Поступила в редакцию 5/III 2021 г.,
после доработки — 5/III 2021 г.
Принята к публикации 29/III 2021 г.*
