ПМТФ, № 2, 1966

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ СТРУЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Г. Н. Пыхтеев

(Новосибирск)

В работе [1] получено нелинейное интегро-дифференциальное уравнение

$$u'(\xi) = \lambda\gamma(\xi) U(u(\xi) + \alpha(\xi)) V(-T(u \mid \xi) + \beta(\xi)) + \delta(\xi), \quad \xi \text{ на } [-1,1] \tag{A}$$

в котором $\alpha(\xi)$, $\beta(\xi)$, $\gamma(\xi)$, $\delta(\xi)$, $U(u+\alpha)$, $V(-T+\beta)$ — заданные функции своих аргументов, λ — заданный параметр, а $T(u \mid \xi)$ — сингулярный интеграл вида

$$T(u \mid \xi) = \frac{\omega(\xi)}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{u(t)}{t-\xi} \frac{dt}{\omega(t)}, \qquad \xi \text{ на } [-1, 1] \tag{0.1}$$

Здесь $\omega(\xi)$ — заданная функция. Обозначением $T(u \mid \xi)$ подчеркивается, что данный интеграл является не только функцией точки ξ, но и оператором от $u(\xi)$. К уравнению (A) редуцируется большой класс задач для струйных плоских установившихся течений идеальной несжимаемой жидкости. В настоящей работе разрабатываются некоторые методы решения уравнения (A). Предложенные методы прилагаются к струйным течениям с криволинейной стенкой и к струйным течениям тяжелой жидкости с прямолинейными границами. Для оператора $T(u \mid \xi)$ в случае, когда нужно подчеркнуть его зависимость от $u(\xi)$ или отметить зависимость от $\omega(\xi)$, в работе употребляются обозначения $T(u)$ и $T(u, \omega \mid \xi)$. Аналогичные обозначения используются и для других, встречаемых в работе операторов. В случаях, когда $\omega(\xi) \equiv 1$ и $\omega(\xi) = \sqrt{1-\xi^2}$, $T(u \mid \xi)$ обозначается через (0.2)

$$J(u \mid \xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{u(t)}{t-\xi} dt, \quad I(u \mid \xi) = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{u(t)}{t-\xi} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad \xi \text{ на } [-1, 1]$$

Часть результатов данной статьи была сообщена на II Съезде по теоретической и прикладной механике [2].

§ 1. Методы малого параметра. Метод линеаризации 1.1. *Приведение уравнения (A) к функциональному уравнению в банаховом пространстве.* Введем оператор (ξ, ξ_0 на $[-1, 1]$) (1.1)

$$S(u) = S(u \mid \xi) \equiv \lambda \int_{\xi_0}^{\xi} \gamma(t) U(u(t) + \alpha(t)) V(-T(u \mid t) + \beta(t)) dt + \int_{\xi_0}^{\xi} \delta(t) dt$$

Если искомое решение уравнения (A) удовлетворяет условию

$$u(\xi_0) = 0, \qquad \xi_0 \text{ на } [-1, 1] \tag{1.2}$$

то уравнение (A) можно записать в виде

$$u = S(u) = S(u \mid \xi) \tag{1.3}$$

В дальнейшем всегда будет предполагаться, что условие (1.2) выполняется. В случае, когда оператор $S(u)$ определен в некотором банаховом пространстве, то уравнение (1.3) будет представлять собой функциональное уравнение в этом пространстве. В функциональном анализе для решения таких уравнений разработаны различные методы последовательных приближений, и поэтому естественно применить эти методы к уравнению (A), записанному в форме (1.3). Так как применение указанных методов зависит от того, в каком пространстве определен оператор $S(u)$, то прежде всего необходимо рассмотреть вопрос о классе искомых функций.

1.2. *Класс искомых функций. Некоторые оценки.* Пусть $\rho(\xi)$ — заданная на отрезке $[-1, 1]$ положительная непрерывная функция такая, что функция $1/\rho(\xi)$ интегрируема на отрезке $[-1, 1]$. Обозначим через C_ρ класс функций, определенных на отрезке $[-1, 1]$ и удовлетворяющих условию, что произведение любой функции этого класса $u(\xi)$ на $\rho(\xi)$ непрерывно на данном отрезке. Очевидно, если ввести норму

$$|u|_\rho = \max |\rho(\xi) u(\xi)| \qquad (1 \leqslant \xi \leqslant 1)$$

то класс C_ρ будет банаховым пространством. Обозначим через C_ρ^1 класс функций, определенных на отрезке $[-1, 1]$ и удовлетворяющих условиям: (1) любая функция этого класса $u(\xi)$ удовлетворяет условию (1.2); (2) произведение $u'(\xi)$ на $\rho(\xi)$ непрерывно на отрезке $[-1, 1]$. Нетрудно показать, что класс C_ρ^1 будет банаховым пространством, если ввести норму

$$\|u\|_\rho = \max |\rho(\xi) u'(\xi)| \qquad (1 \leqslant \xi \leqslant 1)$$

Когда $\rho(\xi) \equiv 1$, то класс C_ρ совпадает с известным классом C непрерывных функций, а класс C_ρ^1 будет замкнутым множеством известного класса C^1 непрерывно-дифференцируемых функций; в этом частном случае для норм $|u|_\rho$ и $\|u\|_\rho$ будут употребляться обозначения

$$|u|_1 = \max |u(\xi)|, \qquad \|u\|_1 = \max |u'(\xi)| \qquad (1 \leqslant \xi \leqslant 1)$$

Введение пространств C_ρ и C_ρ^1 дает возможность получить некоторые оценки, позволяющие обосновать излагаемые ниже методы. Наложим на $\rho(\xi)$ и функцию $\omega(\xi)$, входящую в $T(u \mid \xi)$, условие:

$$T(u \mid \xi) = \int_{-1}^{1} H(\omega \mid \xi, t)\, u'(t)\, dt$$

Здесь $H(\omega \mid \xi, t)$ — ядро типа Фредгольма такое, что функция $H(\omega \mid \xi, t) / \rho(t)$ абсолютно интегрируема по t, причем интеграл от модуля этой функции непрерывен по ξ. Затем введем величины

$$a = a(\rho) = \max \left| \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{dt}{\rho(t)} \right|, \qquad b = b(\rho, \omega) = \max \int_{-1}^{1} \left| \frac{H(\omega \mid \xi, t)}{\rho(t)} \right| dt \quad (-1 \leqslant \xi_0 \leqslant 1)$$

Пусть $u(\xi) \in C_\rho^1$ и выполнены условия, наложенные выше на $\rho(\xi)$ и $\omega(\xi)$; тогда нетрудно показать, что имеют место неравенства

$$|u|_1 \leqslant a(\rho) \|u\|_\rho, \qquad |T(u)|_1 \leqslant b(\rho, \omega) \|u\|_\rho \tag{1.5}$$

Если рассматривать интегралы от произведений $p(\xi) u(\xi)$ и $p(\xi) T(u \mid \xi)$, где $p(\xi) \in C_\rho$, то, используя неравенства (1.5), легко получить оценки

$$\left\| \int_{\xi_0}^{\xi} pu\, dt \right\|_\rho \leqslant a(\rho) |p|_\rho \|u\|_\rho, \qquad \left\| \int_{\xi_0}^{\xi} pT(u)\, dt \right\|_\rho \leqslant b(\rho, \omega) |p|_\rho \|u\|_\rho \tag{1.6}$$

Величину $a(\rho)$ для данного класса C_ρ, очевидно, всегда можно вычислить с заданной точностью. Приводим значения $a(\rho)$ для различных классов C_ρ^1

$\rho(\xi) \equiv 1$	$\rho(\xi) = \sqrt{1 - \xi^2}$	$\rho(\xi) = \sqrt{1 \pm \xi}$
$a(\rho) = 2$	π	$2\sqrt{2}$

Для этих же классов приводим выражения для величин $b(\rho, \omega)$

$\omega(\xi) = \sqrt{1 - \xi^2}$,	$\omega(\xi) \equiv 1$	
$b(\rho, \omega) = 1$,	$\frac{2}{\pi}(1 + 2\ln 2)$	при $\rho(\xi) = 1$
$b(\rho, \omega) = 4G/\pi$,	$3\ln 2$	при $\rho(\xi) = \sqrt{1 - \xi^2}$
$b(\rho, \omega) = \frac{4}{\pi}\sqrt{2(H^2 - 1)}$,	$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}(2 + \ln 2)$	при $\rho(\xi) = \sqrt{1 \pm \xi}$

При вычислении $b(\rho, \omega)$ в случае $\omega(\xi) \equiv 1$ предполагалось, что $u(\xi)$ удовлетворяет дополнительному условию $u(1) = u(-1) = 0$.

Здесь G — постоянная Каталана, $G = 0.915965594...$, H — корень уравнения $t - \mathrm{Arth}(1/t) = 0$, $H = 1.199678402...$ Следует заметить, что величина $b(\rho, \omega)$ в случае $\rho(\xi) = \omega(\xi) = \sqrt{1-\xi^2}$ с точностью до четырех знаков была вычислена Я. И. Секерж-Зеньковичем [3]. Следует заметить также, что если величину $a(\rho)$ ввести как максимум входящего в (1.4) интеграла при заданном значении ξ_0, то эту величину можно уменьшить. Относительно коэффициентов уравнения (А) далее будет предполагаться, что $\gamma(\xi)$ и $\delta(\xi)$ принадлежат классу C_ρ, а $\alpha(\xi)$ и $\beta(\xi)$ — непрерывные функции. Решение уравнения (А) будет искаться в классе C_ρ^1, в котором функция $\rho(\xi)$ — та же самая, что и в классе C_ρ.

1.3. *Основные параметры. Мажоранты.* Введем некоторые постоянные параметры, характеризующие уравнение (А). Это прежде всего — параметр λ; всюду будет предполагаться, что $\lambda > 0$ (последнее не является каким-либо ограничением на λ, так как λ всегда можно сделать положительной величиной за счет выбора функции $\gamma(\xi)$). Для того чтобы ввести остальные параметры, дадим понятие мажорант уравнения (А).

Пусть функции $U(u + \alpha(\xi))$ и $V(u + \beta(\xi))$ определены на отрезке $-t' \leqslant u \leqslant t'$ при любом ξ на $[-1, 1]$ и дважды непрерывно-дифференцируемы на этом отрезке. Пусть, далее, положительные монотонно-неубывающие дифференцируемые функции $U_\nu(t)$, $V_\nu(t)$ $(\nu = 0, 1, 2)$, заданные на отрезке $0 \leqslant t < \infty$, мажорируют функции $U(u + \alpha(\xi))$ и $V(u + \beta(\xi))$ и их производные на отрезке $0 \leqslant t \leqslant t'$ следующим образом:

$$|U^\nu(u + \alpha(\xi))| \leqslant U_\nu(|u|), \quad |V^\nu(-u + \beta(\xi))| \leqslant V_\nu(|u|) \qquad (\nu = 0,1,2; \quad 0 \leqslant |u| \leqslant t') \tag{1.7}$$

Тогда функции переменного τ на $[0, \infty)$

$$M(\tau) = \frac{|\gamma|_\rho}{\eta}[aU_1(a\sigma\tau)V_0(b\sigma\tau) + bU_0(a\sigma\tau)V_1(b\sigma\tau)] \tag{1.8}$$

$$N(\tau) = \sigma' \frac{|\gamma|_\rho}{\eta'}[a^2U_2(a\sigma'\tau)V_0(b\sigma'\tau) + 2abU_1(a\sigma'\tau)V_1(b\sigma'\tau) + b^2U_0(a\sigma'\tau)V_2(b\sigma'\tau)] \tag{1.9}$$

где a, b — постоянные (1.4), а η, η', σ, σ' — параметры, выбираемые таким образом, чтобы выполнялись условия

$$M(0) = M'(0) = N(0) = N'(0) = 1 \tag{1.10}$$

будут далее называться мажорантами уравнения (А). При этом, по определению, будет предполагаться, что производная $M'(\tau)$ будет положительной и монотонно-неубывающей функцией.

Соотношения (1.10) представляют четыре уравнения, легко разрешимые относительно параметров η, η', σ, σ'. Образуем из них еще два параметра $\varkappa$ и $\varkappa'$, определяемые равенствами

$$\varkappa^2 = \frac{|\lambda U(\alpha)V(\beta) + \delta|_\rho}{\lambda\sigma\eta}, \qquad \varkappa'^2 = \frac{|\lambda U(\alpha)V(\beta) + \delta|_\rho}{\lambda\sigma'\eta'} \tag{1.11}$$

Легко видеть, что из всех введенных параметров только пять являются независимыми, которые можно взять в качестве основных. В дальнейшем в качестве основных принимаются λ, η, $\varkappa$, η', $\varkappa'$. Отметим, что параметры $\varkappa$ и $\varkappa'$ не будут зависеть от λ, если $\delta(\xi) \equiv 0$ или $\delta(\xi) = \lambda\delta^*(\xi)$.

1.4. *Производные $S(u)$.* Рассмотрим вопрос о существовании производных Фреше оператора $S(u)$ и оценке их норм в пространстве C_ρ^1.

Теорема 1. Пусть заданные функции, входящие в уравнение (A), удовлетворяют следующим условиям: (1) функции $\gamma(\xi)$ и $\delta(\xi)$ принадлежат классу C_ρ; (2) функции $U(u+\alpha(\xi))$, $V(u+\beta(\xi))$ определены и непрерывны на отрезке

$$-t' \leqslant u \leqslant t', \qquad t' = mr, \qquad m = \max(a, b) \tag{1.12}$$

при любом ξ на $[-1, 1]$. Тогда оператор $S(u)$ будет переводить шар Ω_r: $0 \leqslant \|u\|_\rho \leqslant r$ пространства $C_\rho{}^1$ в $C_\rho{}^1$. Если при этом функции $U(u+\alpha(\xi))$, $V(u+\beta(\xi))$ непрерывно-дифференцируемы по u на отрезке $[-t', t']$ при любом ξ на $[-1, 1]$, то оператор $S(u)$ имеет в каждой точке Ω_r производную Фреше, определяемую равенством

$$S'(u\,|\,\xi)\,u^* = \lambda\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\gamma(t)\,[U'(u(t)+\alpha(t))\,V(-T(u\,|\,t)+\beta(t))\,u^*(t) -$$

$$-U(u(t)+\alpha(t))\,V'(-T(u\,|\,t)+\beta(t))\,T(u^*\,|\,t)]\,dt \tag{1.13}$$

При этом для нормы $\|S'(u)\|_\rho$ линейного оператора $S'(u)u^*$ имеет место оценка

$$\|S'(u)\|_\rho \leqslant \lambda\eta M(\|u\|_\rho/\sigma), \qquad u(\xi)\in\Omega_r \tag{1.14}$$

где $M(\tau)$ — мажоранта уравнения (A), а σ — параметр, определяемый из уравнений (1.10). Если же функции $U(u+\alpha(\xi))$, $V(u+\beta(\xi))$ дважды непрерывно-дифференцируемы по u на отрезке $[-t', t']$ при любом ξ на $[-1, 1]$, то оператор $S(u)$ имеет в Ω_r вторую производную Фреше

$$S''(u\,|\,\xi)\,u^*u^{**} = \lambda\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\gamma(t)\,[U''(u(t)+\alpha(t))\,V(-T(u\,|\,t)+\beta(t))\,u^*(t)\,u^{**}(t) -$$

$$-U'(u(t)+\alpha(t))\,V'(-T(u\,|\,t)+\beta(t))\,(u^*(t)\,T(u^{**}\,|\,t)+u^{**}(t)\,T(u^*\,|\,t))+$$

$$+U(u(t)+\alpha(t))\,V''(-T(u\,|\,t)+\beta(t))\,T(u^*\,|\,t)\,T(u^{**}\,|\,t)]\,dt \tag{1.15}$$

причем для нормы $\|S''(u)\|_\rho$ билинейного оператора $S''(u)u^*u^{**}$ имеет место оценка

$$\|S''(u)\|_\rho \leqslant \lambda\eta'\,\frac{1}{\sigma'}\,N\left(\frac{\|u\|_\rho}{\sigma'}\right), \qquad u(\xi)\in\Omega_r \tag{1.16}$$

где $N(\tau)$ — мажоранта уравнения (A), а σ' — параметр, определяемый из уравнений (1.10).

Доказательство. Установим прежде всего, что оператор $S(u)$ действует из Ω_r в $C_\rho{}^1$. Это значит, что, если рассматривать оператор $S(u) = S(u\,|\,\xi)$ как функцию ξ, то $S(u|\,\xi)\in C_\rho{}^1$, если $u(\xi)\in\Omega_r$. Рассмотрим произведение

$$\rho(\xi)S_\xi{}'(u|\,\xi) = \lambda\rho(\xi)\,[\gamma(\xi)U(u(\xi)+\alpha(\xi))V(-T(u\,|\,\xi)+\beta(\xi))+\delta(\xi)]$$

Функции $\rho(\xi)\gamma(\xi)$ и $\rho(\xi)\delta(\xi)$, входящие в это произведение, непрерывны, так как по условию $\gamma(\xi)$ и $\delta(\xi)$ принадлежат классу C_ρ. Функции $U(u(\xi)+\alpha(\xi))$ и $V(-T(u\,|\,\xi)+\beta(\xi))$ также непрерывны, если $u(\xi)\in\Omega_r$, так как, с одной стороны, функции $U(u+\alpha(\xi))$ и $V(u+\beta(\xi))$ по условию непрерывны на отрезке е$0 \leqslant |u| \leqslant mr$ при любом ξ на $[-1, 1]$, а с другой стороны, в силу неравенств (1.5), функции $u(\xi)$ и $T(u\,|\,\xi)$ непрерывны на отрезке $[-1,1]$ и $0 \leqslant |u|_1$, $|T(u)|_1 \leqslant rm$, сли $u(\xi)\in\Omega_r$. Таким образом, произведение $\rho(\xi)\,S'_\xi(u\,|\,\xi)$ является непрерывной функцией на отрезке $[-1,1]$, а это значит, что $S(u\,|\,\xi)\in G_\rho{}^1$.

Для того чтобы убедиться в существовании первой и второй производных Фреше оператора $S(u)$, для которых справедливы формулы (1.13), (1.15), достаточно показать, что при выполнении условий, наложенных на функции $U(u+\alpha(\xi))$ и $V(u+\beta(\xi))$, имеют место предельные равенства [6]

$$\lim_{\|h\|_\rho \to 0} \frac{\|\Delta(u;\, h)\|_\rho}{\|h\|_\rho} = 0, \qquad \lim_{\|h^*\|_\rho \to 0} \frac{\|\Delta(u;\, h,\, h^*)\|_\rho}{\|h^*\|_\rho} = 0, \tag{1.17}$$

где $u(\xi)$, $h(\xi)$, $h^*(\xi)$ — произвольные функции, принадлежащие Ω_r, операторы

$$\Delta(u;\, h) = S(u+h) - S(u) - S'(u)h$$
$$\Delta(u;\, h,\, h^*) = S'(u+h^*)h - S'(u)h - S''(u)hh^*$$

Докажем первое из предельных равенств (1.17). Рассмотрим функцию двух переменных $f(x, y) = U(x + \alpha(\xi))V(y + \beta(\xi))$, которая будет непрерывно-дифференцируемой в квадрате $-t' \leqslant x, y \leqslant t'$. Для этой функции имеет место формула

$$f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x, y) = f'(x + \theta\Delta x,\ y + \theta\Delta y)\ \Delta x +$$
$$+ f_y'(x + \theta\Delta x,\ y + \theta\Delta y)\Delta y \quad (0 < \theta < 1,\ -t' \leqslant x,\ x + \Delta x,\ y,\ y + \Delta y \leqslant t')$$

Пусть $u(\xi) \in \Omega_r$ и $h(\xi) \in \Omega_r$, причем $u(\xi) + h(\xi) \in \Omega_r$. Тогда, в силу неравенств (1.5), $0 \leqslant |u|_1$, $|u+h|_1$, $|T(u)|_1$, $|T(u) + T(h)|_1 \leqslant mr = t'$. Если теперь, учитывая последнее неравенство, положить в формуле конечных приращений $x = u(\xi)$, $\Delta x = h(\xi)$, $y = T(u \mid \xi)$, $\Delta y = T(h \mid \xi)$, а затем при помощи полученного выражения преобразовать оператор $\Delta(u;\, h)$, то последний можно представить в виде

$$\Delta(u,h) \equiv \lambda \int_{\xi_0}^{\xi} \gamma(t)\{[f_x'(u(t) + \theta h(t),\ \ -T(u \mid t) - \theta T(h \mid t)) - f_x'(u(t), -T(u \mid t))h(t) -$$
$$- [f_y'(u(t) + \theta h(t),\ -T(u \mid t) - \theta T(h \mid t)) - f_y'(u(t),\ -T(u \mid t))]\, T(h \mid t)\}\, dt$$

Отсюда при помощи оценок (1.6) легко получить неравенство

$$\|\Delta(u;\ h)\|_\rho / \|h\|_\rho \leqslant \lambda |\gamma|_\rho\, [a\, |f_x'(u + \theta h,\ -T(u) - \theta T(h)) -$$
$$- f_x'(u,\ -T(u))|_1 + b\, |f_y'(u + \theta h,\ -T(u) - \theta T(h)) - f_y'(u,\ -T(u))|_1]$$

Так как функции $f_x'(x, y)$ и $f_y'(x, y)$ непрерывны в квадрате $-t' \leqslant x, y \leqslant t'$, то правая часть полученного неравенства стремится к нулю при $\|h\|_\rho \to 0$. Аналогичным образом доказывается второе предельное равенство (1.17).

Продифференцируем теперь равенство (1.13) по ξ и умножим затем на $\rho(\xi)$. Оценим правые части полученного равенства по модулю, вводя мажорирующие функции $U_\nu(t)$, $V_\nu(t)$, $(\nu = 0,\ 1)$ и пользуясь неравенствами (1.5). В результате будем иметь

$$\|S'(u \mid \xi)u^*\|_\rho \leqslant \lambda |\gamma|_\rho\, [aU_1(a\, \|u\|_\rho)V_0(b\, \|u\|_\rho) +$$
$$+ bU_0(a\, \|u\|_\rho)V_1(b\, \|u\|_\rho)]\, \|u^*\|_\rho, \quad u(\xi) \in \Omega_r$$

Из полученного неравенства легко видеть, что для нормы оператора $S'(u)u^*$ имеет место оценка (1.14). Поступая аналогичным образом с равенством (1.15), легко убедиться в справедливости оценки (1.16) для нормы оператора $S''(u)u^*u^{**}$.

1.5. *Линеаризированное уравнение.* Пусть $P(u) = 0$ есть нелинейное уравнение, заданное в банаховом пространстве. Тогда линейное уравнение $P'(u_0)(u_0 - u) = P(u_0)$, (где $P'(u_0)$ — производная Фреше в точке u_0) принято называть линеаризированным в точке u_0 или просто линеаризированным. Запишем уравнение (1.3) в виде

$$P(u) = 0, \qquad P(u) = P(u \mid \xi) \equiv u(\xi) - S(u \mid \xi) \tag{1.18}$$

Линеаризированное в точке $u_0(\xi) \equiv 0$ уравнение, соответствующее уравнению (1.18), а следовательно, и уравнению (1.3), будет

$$P'(0 \mid \xi)u \equiv u(\xi) - S'(0 \mid \xi)u = F(\xi), \qquad F(\xi) = S(0 \mid \xi) \tag{1.19}$$

где $S'(0 \mid \xi)$ — производная Фреше, определяемая формулой (1.13). Если уравнение (1.19) разрешимо при любой правой части $F(\xi)$ и его решение можно представить в виде

$$u(\xi) = \Gamma(F) = \Gamma(F \mid \xi) \tag{1.20}$$

где $\Gamma(F \mid \xi)$ — линейный оператор, то норма этого оператора $\sup \| \Gamma(F) \|_\rho$, $\| F \|_\rho = 1$, будет далее всюду обозначаться через η_0. Известно, что величина η_0 должна удовлетворять неравенству

$$\| \Gamma(F) \|_\rho \leqslant \eta_0 \| F \|_\rho \tag{1.21}$$

1.6. *Мажорантные уравнения.* Мажоранты $M(\tau)$ и $N(\tau)$, определяемые равенствами (1.8), (1.9), будут конкретными заданными функциями, если для уравнения (A) построены мажорирующие функции $U_\nu(t)$ и $V_\nu(t)$.

Рассмотрим, наряду с уравнением (A), несколько трансцендентных уравнений, в которые входят мажоранты $M(\tau)$ и $N(\tau)$. Три из них содержат мажоранту $M(\tau)$

$$\tau = \varkappa / \sqrt{M'(\tau)} \qquad (0 \leqslant \tau < \infty) \tag{1.22}$$

$$\tau M(\tau) - \int_0^\tau M(\tau)\, d\tau - \varkappa^2 = 0 \qquad (0 \leqslant \tau < \infty) \tag{1.23}$$

$$\tau = \varphi(\tau), \quad \varphi(\tau) \equiv \nu \left(\int_0^\tau M(\tau)\, d\tau + \varkappa^2 \right) \quad (0 \leqslant \tau < \infty,\ \nu = \lambda\eta) \tag{1.24}$$

а два других — мажоранту $N(\tau)$

$$\tau \int_0^\tau N(\tau)\, d\tau - \int_0^\tau \int_0^\tau N(\tau)\, d\tau\, d\tau - \varkappa'^2 = 0 \qquad (0 \leqslant \tau < \infty) \tag{1.25}$$

$$\psi(\tau) = 0, \quad \psi(\tau) \equiv -\tau + \nu' \left(\int_0^\tau \int_0^\tau N(\tau)\, d\tau\, d\tau + \varkappa'^2 \right) \quad (0 \leqslant \tau < \infty,\ \nu' = \lambda\eta'\eta_0) \tag{1.26}$$

Остановимся на вопросе существования корней этих уравнений. Так как $1 / M'(\tau)$ — положительная монотонно-невозрастающая функция, то, очевидно, уравнение (1.22) имеет единственный корень. Нетрудно показать, что уравнения (1.23), (1.25) также имеют единственный корень. В самом деле, если левую часть уравнения (1.23) обозначить через $f(\tau)$, то легко видеть, что $f'(\tau) = \tau M'(\tau) > 0$ при $\tau > 0$, причем $f(0) = -\varkappa^2 < 0$, откуда следует, что существует одна и только одна точка, в которой функция $f(\tau)$ обращается в нуль. Точно так же, если правую часть уравнения (1.25) обозначить через $f_*(\tau)$, то легко убедиться, что $f_*'(\tau) = \tau N(\tau) > 0$ при $\tau > 0$, причем $f_*(0) = -\varkappa'^2 < 0$, откуда следует существование единственного нуля функции $f_*(\tau)$. Уравнения (1.24) и (1.26) могут, в зависимости от значений ν и ν', иметь два корня, а также совсем не иметь корней. Относительно наименьшего корня уравнения (1.24) имеет место следующая лемма.

Лемма 1. Если $\nu \leqslant \nu_0 = \tau_0\nu / \varphi(\tau_0) = 1 / M(\tau_0)$, где τ_0 — корень уравнения (1.23), а $\varphi(\tau)$ — функция, входящая в правую часть уравнения (1.24), то уравнение (1.24) имеет на отрезке $[0, \tau_0]$ единственный корень τ_*, к которому сходится последовательность

$$\tau_0' = 0, \quad \tau_{n+1}' = \varphi(\tau_n') \qquad (\tau = 0, 1, \ldots) \tag{1.27}$$

причем быстрота сходимости этой последовательности характеризуется неравенством

$$\tau_* - \tau_n' \leqslant h^n{}_0\, \tau_*, \qquad h_0 = \lambda / \eta M(\tau_0) \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{1.28}$$

Доказательство. Запишем уравнение (1.24) в виде $\nu = f(\tau)$, $f(\tau) \equiv \tau\nu / \varphi(\tau)$. Дифференцируя, находим, что

$$f'(\tau) = \left(\int_0^\tau M(\tau) + \varkappa^2 - \tau M(\tau) \right) / \nu^2\varphi^2(\tau)$$

Пусть τ_0 — корень уравнения (1.23). Если проанализировать выражение для производной $f'(\tau)$, то легко убедиться, что функция $f(\tau) > 0$ при $\tau > 0$ имеет единственный максимум $\nu_0 = f(\tau_0)$, а поэтому, если $\nu \leqslant \nu_0$, то прямая $f = \nu$ пересечет на отрезке $[0, \tau_0]$ график функции $f = f(\tau)$ только в одной точке $(\tau_*, f(\tau_*))$, $\tau_* \leqslant \tau_0$ (при $\tau_* = \tau_0$ прямая $f = \nu$ касается кривой $f = f(\tau)$). Следовательно, уравнение

$\nu = f(\tau)$ имеет на отрезке $[0, \tau_0]$ единственный корень $\tau_* \leqslant \tau_0$. Запишем теперь уравнение (1.24) в виде $\tau = \varphi(\tau)$. Так как $\varphi'(\tau) = \nu M(\tau) > 0$, то, следуя Л. В. Канторовичу и Г. П. Акилову ([6], гл. XVIII, § 1), легко показать, что последовательность (1.27) сходится к τ_*, причем $\tau_n' < \tau_*$. Рассматривая разность $\tau_* - \tau = \varphi(\tau_*) - \varphi(\tau)$ и используя теорему в среднем, будем иметь

$$\tau_* - \tau_n' = \varphi'(\tau')(\tau_* - \tau'_{n-1}), \quad \tau_* < \tau' < \tau'_{n-1} \quad \text{или} \quad \tau_* - \tau_n' = \nu M(\tau')(\tau_* - \tau'_{n-1})$$

Отсюда $\tau_* - \tau_n' \leqslant h_0(\tau_* - \tau'_{n-1})$, так как $M(\tau)$ — возрастающая функция и $\nu M(\tau_0) = h_0$. Применяя последнюю оценку к $\tau_* - \tau'_{n-1}$ и продолжая так и дальше, получим, в конце концов, оценку (1.28). Лемма доказана.

Относительно наименьшего корня уравнения (1.26) имеет место следующая лемма.

Лемма 2. Если

$$\nu \leqslant \nu_0' = \frac{\tau_0'\nu'}{\psi(\tau_0') + \tau_0'} = \left(\int\limits_0^{\tau_0'} N(\tau)\,d\tau\right)^{-1}$$

где τ_0' — корень уравнения (1.25), а $\psi(\tau)$ — функция, входящая в правую часть уравнения (1.26), то уравнение (1.26) имеет на отрезке $[0, \tau'_0]$ единственный корень τ_*', к которому сходится последовательность

$$\tau_0 = 0, \qquad \tau_{n+1}' = \tau_n + \psi(\tau_n) \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{1.29}$$

Быстрота сходимости последней характеризуется неравенством

$$\tau_*' - \tau_n \leqslant (h_0')^n \tau_*', \qquad h_0' = \lambda\eta_0\eta'\left(\int\limits_0^{\tau_0'} N(\tau)\,d\tau\right)^{-1} \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{1.30}$$

Доказательство этой леммы легко свести к доказательству леммы 1, если ввести функции

$$M^*(\tau) = \int\limits_0^{\tau} N(\tau)\,d\tau, \quad \varphi^*(\tau) = \psi(\tau) + \tau$$

при помощи которых уравнения (1.16) можно записать в виде

$$\tau = \varphi^*(\tau), \qquad \varphi^*(\tau) = \nu'\left(\int\limits_0^{\tau} M^*(\tau)d\tau + \varkappa'^2\right)$$

1.7. *Метод итерации*. Одним из наиболее важных способов решения функциональных уравнений является метод итерации. В применении к уравнению (A) этот метод состоит в том, что решение уравнения (A) строится при помощи последовательности

$$u_0(\xi) \equiv 0, \qquad u_{n+1}(\xi) = S(u_n \mid \xi) \qquad (n=0,1,\ldots) \tag{1.31}$$

Можно указать два способа исследования сходимости последовательности (1.31) к решению уравнения (A) и установления единственности полученного решения. Обоснование способов дают следующие теоремы.

Теорема 2. Пусть заданные функции, входящие в уравнение (A), удовлетворяют условиям теоремы 1, и, кроме того, функции $U(u + \alpha(\xi))$ и $V(u + \beta(\xi))$ непрерывно-дифференцируемы по u на отрезке (1.12) при любом ξ на $[-1, 1]$. Пусть, далее, $M(\tau)$ есть мажоранта (1.8) уравнения (A), а τ° — корень уравнения (1.22). Тогда, если входящая в неравенство (1.12) величина $r \geqslant r^\circ = \sigma\tau^\circ$ и

$$\lambda \leqslant \frac{1}{\eta}\,\frac{1}{M(\tau^\circ) + \varkappa\sqrt{M'(\tau^\circ)}} \tag{1.32}$$

то в шаре Ω_{r° существует единственное решение $u^*(\xi)$ уравнения (A), удовлетворяющее условию (1.2). Это решение может быть получено как предел последовательности (1.31), быстрота сходимости которой характеризуется неравенством

$$\| u^* - u_n \|_\rho \leqslant (h^\circ)^n\, r^\circ, \qquad h^\circ = \lambda\eta M(\tau^\circ) \qquad (n=0,1,\ldots) \tag{1.33}$$

Доказательство. Согласно теореме 1, оператор $S(u)$ при выполнении всех условий, наложенных на заданные функции, входящие в уравнение (A), действует из Ω_{r° в C_ρ^1, и в каждой точке Ω_{r° существует производная Фреше, для которой имеет место (1.14). Пусть $u(\xi)$ и $v(\xi)$ — два элемента из Ω_{r°. Тогда по теореме о среднем [6]

$$\|S(u) - S(v)\|_\rho \leqslant \|u - v\|_\rho \sup \|S'(v + \theta(u - v))\|_\rho \qquad (0 < \theta < 1)$$

Отсюда, используя оценку (1.23) и учитывая, что $M(\tau)$ — монотонно-возрастающая функция, а поэтому $M(\|u\|_\rho / \sigma) \leqslant M(\tau^\circ)$, если $u(\xi) \in \Omega_{r^\circ}$, и что, в силу неравенства (1.32), $h^\circ = \lambda\eta M(\tau^\circ) < 1$, находим

$$\|S(u) - S(v)\|_\rho \leqslant h^\circ \|u - v\|_\rho, \ h^\circ < 1, \text{ если } u(\xi), \ v(\xi) \in \Omega_{r^\circ} \tag{1.34}$$

Пусть $u(\xi)$ — произвольный элемент из Ω_{r°. Тогда, используя (1.30), (1.27) и первое соотношение (1.11) и учитывая, что τ° — корень уравнения (1.12), имеем

$$\|S(u)\|_\rho \leqslant \|S(u) - S(0)\|_\rho + \|S(0)\|_\rho \leqslant h^\circ \|u - v\|_\rho + |\lambda\gamma U(\alpha)V(\beta) + \delta|_\rho \leqslant$$
$$\leqslant h^\circ r^\circ + \varkappa^2\lambda\sigma\eta = h^\circ r^\circ + \tau^\circ\sigma\sqrt{M'(\tau^\circ)}\lambda\eta \leqslant h^\circ r^\circ + r^\circ(1 - h^\circ)$$

т. е.

$$\|S(u)\|_\rho \leqslant r^\circ, \text{ если } u(\xi) \in \Omega_{r^\circ} \tag{1.35}$$

Из неравенств (1.34), (1.35) следует, что оператор $S(u)$ является в шаре Ω_{r° оператором сжатия и переводит шар Ω_{r° в себя, т. е. $S(u)$ удовлетворяет условиям известной теоремы о принципе сжатых отображений [5], откуда и следует теорема 2.

Теорема 3. Пусть заданные функции, входящие в уравнение (A), удовлетворяют условиям теоремы 1, и, кроме того, функции $U(u + \alpha(\xi))$ и $V(u + \beta(\xi))$ непрерывно-дифференцируемы по u на отрезке (1.12) при любом ξ на $[-1, 1]$. Пусть, далее, $M(\tau)$ есть мажоранта (1.8) уравнения (A), а τ_0 — корень уравнения (1.23). Тогда, если входящая в неравенство (1.12) величина $r \geqslant r_0 = \sigma\tau_0$ и

$$\lambda \leqslant 1 / \eta M(\tau_0) \tag{1.36}$$

то в шаре Ω_{r^*}, $r_* = \sigma\tau_*$, где τ_* — наименьший корень уравнения (1.24), существует единственное решение $u^*(\xi)$ уравнения (A), удовлетворяющее условию (1.2). Это решение может быть получено как предел последовательности (1.31), быстрота сходимости которой оценивается неравенством

$$\|u^* - u_n\|_\rho \leqslant h_0^n \sigma\tau_*, \quad h_0 = \lambda\eta M(\tau_0) \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{1.37}$$

Доказательство. Согласно теореме 1, в Ω_{r_0} существует непрерывная производная оператора $S(u)$, для которой имеет место (1.16). Введем переменное $t = \sigma\tau$ и функцию $\varphi_*(t) = \sigma\varphi(t / \sigma)$, где $\varphi(\tau)$ — функция, входящая в (1.24). Так как

$$\varphi_*(0) = \sigma\varphi(0) = \sigma\nu\varkappa^2 = |\lambda\gamma U(\alpha)V(\beta) + \delta|_\rho, \quad \varphi_*'(t) = \varphi'(\tau) = \nu M(\tau)$$

то, используя неравенство (1.16), нетрудно установить, что

$$\|S(0)\|_\rho = \varphi_*(0); \qquad \|S'(u)\|_\rho \leqslant \varphi_*'(t), \quad \text{если } \|u\|_\rho < t \quad (0 \leqslant t < \infty) \tag{1.38}$$

т. е. (согласно терминологии, принятой в функциональном анализе [6]) функция $\varphi_*(t)$ мажорирует оператор $S(u)$. Заметив, что (1.36) эквивалентно $\nu \leqslant \nu_0 = 1 / M(\tau_0)$, рассмотрим уравнение $t = \varphi_*(t)$, $0 \leqslant t < \infty$. При замене $t = \sigma\tau$ это уравнение переходит в (1.24), а поэтому, согласно лемме 1, оно имеет на отрезке $[0, r_0]$, $r_0 = \sigma\tau_0$ единственный корень $t_* = \sigma\tau_*$, где τ_* — предел последовательности (1.27).

Итак, оператор $S(u)$ имеет непрерывную производную в шаре Ω_{r_0}, а функция $\varphi_*(t)$ мажорирует оператор $S(u)$ на отрезке $[0, r_0]$, причем уравнение $t = \varphi_*(t)$ имеет на отрезке $[0, r_0]$ единственный корень t_*. Отсюда, на основании теоремы, доказанной Л. В. Канторовичем ([6], гл. XVIII, § 1), следует, что уравнение $u = S(u)$, т. е. уравнение (A) имеет в шаре Ω_{r_*} решение $u^*(\xi)$, причем к этому решению сходится последовательность (1.27), быстрота сходимости которой оценивается неравенством

$$\|u^* - u_n\|_\rho \leqslant t_* - t_n, \quad t_{n+1} = \varphi_*(t_n) \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

Последнее неравенство, учитывая, что $t_* = \sigma\tau_*$, $t_n = \sigma\tau_n'$, где τ_n' — члены последовательности (1.27), можно записать в виде

$$\| u^* - u_n \|_\rho \leqslant \sigma (\tau_* - \tau_n') \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Отсюда при помощи неравенства (1.28) легко получается оценка (1.37). Остается доказать единственность решения. Для этого, в силу другой теоремы, доказанной Л. В. Канторовичем (там же), достаточно установить неравенство $\varphi_* (r_0) \leqslant r_0$, которое эквивалентно неравенству $\varphi (\tau_0) \leqslant \tau_0$. Но легко видеть, что последнее следует из неравенства (1.36), так как $\varphi (\tau_0) = \tau_0 \nu M (\tau') = \tau_0 \lambda \eta M (\tau_0)$. Теорема доказана.

Таким образом, первый способ исследования сходимости метода итерации и установления единственности полученного решения состоит в том, что строятся мажорирующие функции уравнения (А), определяются параметры η, $\varkappa$ и мажоранта $M (\tau)$, а затем вычисляется корень τ° уравнения (1.22) и проверяется неравенство (1.32). Второй способ отличается от первого тем, что вычисляется корень τ_0 уравнения (1.23) и проверяется неравенство (1.37). Следует заметить, что первый способ является распространением на уравнение (А) известного в теории струй метода А. И. Некрасова [8, 4], при помощи которого был решен ряд задач об отрывном обтекании препятствий малой кривизны.

Из доказанных теорем видно, что метод итерации осуществим только при достаточно малых значениях параметров λ, η, $\varkappa$. Однако параметры η и $\varkappa$, зависящие от свойств заданных функций уравнения (А), в задачах теории струй являются заданными конкретными величинами. Параметр λ, наоборот, для целого класса задач может оказаться величиной, которую можно задавать, и, следовательно, можно всегда выбрать λ настолько малым (причем это будет иметь вполне определенный физический смысл), что для получения решения уравнения (А) можно применить метод итерации. С этой точки зрения, метод итерации является в теории струй методом малого параметра λ.

Для решения нелинейных функциональных уравнений Л. В. Канторовичем разработан метод, который в случае обычных алгебраических или трансцендентных уравнений известен под названием метода Ньютона или метода касательных [6, 7].

1.8. *Метод Ньютона — Канторовича.* В применении к уравнению (А), этот метод будет состоять в построении решения уравнения (А) при помощи последовательности

$$u_0 (\xi) \equiv 0, \quad u_{n+1} (\xi) = u_n (\xi) - \Gamma (P (u_n) \mid \xi) \qquad (n=0,1,\ldots) \qquad (1.39)$$

в которой $\Gamma (P \mid \xi)$ и $P (u)$ — операторы (1.18) и (1.20). Обоснование этого метода, при некоторых ограничениях на заданные функции, входящие в уравнение (А), дает следующая теорема.

Теорема 4. Пусть решение уравнения (1.18) представляется в виде (1.20) и выполнены условия теоремы 1. Пусть, кроме того, функции $U (u + \alpha (\xi))$ и $V (u + \beta (\xi))$ — дважды непрерывно дифференцируемы по u на отрезке (1.12) при любом ξ на $[-1, 1]$ и $N (\tau)$ есть мажоранта (1.9) уравнения (А), а τ_0' — корень уравнения (1.26). Тогда, если входящая в неравенство (1.12) величина $r \geqslant r_0' = \sigma' \tau_0'$ и

$$\lambda \leqslant 1 / \eta' \eta_0 \int_0^{\tau_0'} N (\tau) \, d\tau \qquad (1.40)$$

в шаре $\Omega_{r_*'}$, $r_*' = \sigma' \tau_*'$, где τ_*' — наименьший корень уравнения (1.26), существует единственное решение уравнения (А), удовлетворяющее условию (1.2). Это решение может быть получено как предел последовательности (1.39), быстрота сходимости которой оценивается неравенством

$$\| u^* - u_n \|_\rho \leqslant (h_0')^n \sigma' \tau_*', \quad h_0' = \lambda \eta' \eta_0 \int_0^{\tau_0'} N (\tau) \, d\tau \qquad (n = 0, 1, \ldots) \qquad (1.41)$$

Доказательство. Согласно теореме 1, в $\Omega_{r_0'}$ существует вторая производная оператора $S (u)$, для которой имеет место неравенство (1.16). Введем переменное $t = \sigma' \tau$ и функцию $\psi_* (t) = \sigma' \psi (t / \sigma')$, где $\psi (\tau)$ — функция, входящая в уравнение (1.26).

При помощи оценок (1.21). (1.16) нетрудно показать, что

$$\psi_*' (0) = -1 < 0, \qquad \| \Gamma (P (0)) \|_\rho \leqslant \psi_* (0)$$

$$\| \Gamma (P'' (u)) \|_\rho \leqslant \psi_*'' (t), \quad \text{если } \| u \|_\rho < t, \quad 0 \leqslant t < \infty$$

Здесь $\| \Gamma (P'' (u)) \|_\rho$ — норма билинейного оператора $\Gamma (P'' (u) u^* u^{**} \mid \xi)$.

Рассмотрим уравнение $\psi_*(t) = 0$, $0 \leqslant t < \infty$. Легко видеть, что при замене $t = \sigma\tau$ это уравнение переходит в уравнение (1.26), и из неравенства (1.40) следует, что

$$\nu' \leqslant \nu_0' = \left(\int_0^{\tau_0'} N(\tau)d\tau\right)^{-1}$$

а поэтому на основании леммы 2 оно имеет на отрезке $[0, r_0']$ единственный корень $t_* = \sigma\tau_*'$, где τ_*' — предел последовательности (1.29). Кроме того, из неравенства (1.40) следует, что

$$\psi_*(r_0') \leqslant r_0'$$

Если теперь обратиться к двум основным теоремам Л. К. Канторовича о сходимости метода Ньютона ([6], гл. XVIII, § 1), то легко видеть, что оператор $P(u)$ и функция $\psi_*(t)$ удовлетворяют всем условиям этих теорем. Отсюда следует, что уравнение $P(u) = 0$, т. е. уравнение (А), имеет в шаре $\Omega_{r_*'}$ единственное решение $u^*(\xi)$, причем к этому решению сходится последовательность (1.39), быстрота сходимости которой оценивается неравенством

$$\| u^* - u_n \|_\rho \leqslant t_* - t_n, \qquad t_{n+1} = t_n + \psi_*(t_n) \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

Последнее неравенство, учитывая, что $t_* = \sigma'\tau_*'$, $t_n = \sigma'\tau_n$, где τ_n — члены последовательности (1.29), можно записать в виде

$$\| u^* - u_n \|_\rho \leqslant \sigma'(\tau_*' - \tau_n) \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

Отсюда при помощи неравенства (1.30) легко получается оценка (1.41). Теорема доказана.

Из доказанной теоремы вытекает способ исследования сходимости метода Ньютона — Канторовича и установления единственности полученного решения, состоящий в том, что строятся мажорирующие функции уравнения (А), определяются параметры η', $\varkappa'$ и мажоранта $N(\tau)$, а затем вычисляется корень τ_0' уравнения (1.25) и проверяется неравенство (1.40). Метод Ньютона — Канторовича, так же как и метод итерации, является для задач теории струй методом малого параметра λ.

1.9. *Линейное интегро-дифференциальное уравнение.* Основная трудность практического применения метода Ньютона — Канторовича состоит в решении уравнения (1.18), т. е. в отыскании обратного оператора $\Gamma(F \mid \xi)$ от оператора $P'(0 \mid \xi)u$. Если в уравнение (1.18) подставить вместо производной $S'(0 \mid \xi)u$ ее выражение, получаемое из формулы (1.13), то после дифференцирования оно будет иметь вид

$$u'(\xi) - \lambda p(\xi)u(\xi) + \lambda q(\xi)T(u \mid \xi) = f(\xi), \qquad \xi \text{ на } [-1, 1] \tag{1.42}$$

где

$$p(\xi) = \gamma(\xi)U'(\alpha(\xi))V(\beta(\xi)), \qquad q(\xi) = \gamma(\xi)U(\alpha(\xi))V'(\beta(\xi))$$

$$f(\xi) = \lambda\gamma(\xi)U(\alpha(\xi))V(\beta(\xi)) + \delta(\xi)$$

Очевидно, решение уравнения (1.19) эквивалентно решению уравнения (1.42) при условии (1.2). Отсюда следует, что если уравнение (1.42) разрешимо при любой правой части $f(\xi)$ и его решение представляется в виде

$$u = Q(f) = Q(f \mid \xi) \tag{1.43}$$

где $Q(f \mid \xi)$ — линейный оператор, то уравнение (1.19) разрешимо при любой правой части $F(\xi)$ и его решение представимо через производную $F'(\xi)$ в виде

$$u = \Gamma(F \mid \xi) = Q(F' \mid \xi)$$

а неравенство (1.21) эквивалентно неравенству

$$| Q(f) |_\rho \leqslant \eta' | f |_\rho$$

Методы решения уравнения (1.42), а следовательно и уравнения (1.19), в настоящее время не разработаны и это затрудняет применение метода Ньютона — Канторовича. Однако в частных случаях, когда решение уравнения (1.42) можно представить в простом виде, метод Ньютона — Канторовича может быть с успехом применен для решения уравнения (А). Можно предложить несколько способов приведения уравнения (1.42) к эквивалентному ему уравнению Фредгольма. Приведем один из них. Произведем в уравнении (1.42) замену

$$v(\xi)=u(\xi)c(\xi),\ s(\xi)=\omega(\xi)c(\xi),\ c(\xi)=\exp\left(-\lambda\int_{\xi_0}^{\xi} p(t)dt\right),\ g(\xi)=f(\xi)c(\xi)$$

Тогда для функции $v(\xi)$ получим интегро-дифференциальное уравнение

$$v'(\xi)+\lambda q(\xi)T(v, s|\xi)=g(\xi), \qquad \xi \text{ на } [-1,\ 1]$$

которое интегрированием приводится к эквивалентному уравнению Фредгольма

$$v(\xi)+\lambda\int_{-1}^{1}K(\xi, t;\lambda)v(t)\,dt+g^*(\xi), \qquad \xi \text{ на } [-1, 1]$$

$$K(\nu, t;\lambda)=\frac{1}{\pi s(t)}\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{s(\tau)q(\tau)}{\tau-\xi}d\tau, \qquad g^*(\xi)=\int_{\xi_0}^{\xi}g(t)\,dt$$

1.10. *Метод линеаризации.* Точным методом решения какого-либо уравнения часто принято называть метод, дающий возможность найти решение в замкнутом виде или в виде некоторого алгоритма, который позволяет получить решение с любой наперед заданной точностью. С этой точки зрения, метод итерации и метод Ньютона — Канторовича является точным. В качестве приближенного метода решения уравнения (А) можно предложить метод линеаризации. Он состоит в том, что решение уравнения (А) заменяется решением уравнения (1.42). Пусть $u^0(\xi)$ — решение уравнения (1.42), а $u^*(\xi)$ — решение уравнения (А). Тогда, если выполнены условия теоремы 4, будет иметь место следующая оценка

$$\|u^*-u^0\|_\rho\leqslant\sigma'\tau_*'$$

вытекающая из неравенства (1.41). Эта оценка дает возможность судить о погрешности, которая получается при решении уравнения (А) методом линеаризации. Для эффективного решения уравнения (А) методом линеаризации необходимо иметь хорошо разработанные методы решения уравнения (1.42).

§ 2. Струйные течения с криволинейной стенкой и струйные течения тяжелой жидкости с прямолинейными границами. 2.1. *Струйные течения с криволинейной стенкой.* Рассмотрим установившееся струйное течение невесомой идеальной несжимаемой жидкости, границы которой состоят из конечного числа прямолинейных стенок, одной криволинейной стенки и сходящей с нее свободной струи, причем на криволинейной стенке нет критических точек скорости. В работе [1] показано, что определение такого течения сводится к решению интегро-дифференциального уравнения

$$u'(\xi)=\lambda\gamma(\xi)K(u(\xi))\exp)-I(u|\xi)), \qquad \xi \text{ на } [-1{,}1] \tag{2.1}$$

при условии $u(0)=0$. В данном уравнении $K(u)$ есть так называемая относительная кривизна [1], зависящая только от формы криволинейной стенки, $\gamma(\xi)$ — заданная функция, зависящая от геометрических и физических свойств течения, λ — постоянный параметр. По способу построения величина $K(u)$ является четной функцией, причем $K(0)=1$. Будем далее предполагать, что

$$|K(u)|\leqslant K_0, \qquad |K'(u)|\leqslant K_0', \qquad |K''(u)|\leqslant K_0'' \tag{2.2}$$

При выполнении неравенств (2.2) функции $U_\nu(t)\equiv K_0{}^\gamma$, $V_\nu(t)=e^t$ $(\nu=0, 1, 2)$ можно взять в качестве мажорирующих функций уравнения (2.1). В этом случае основными параметрами уравнения (2.1) будут

$$\eta=|\gamma|_\rho(aK_0'+bK_0), \qquad \varkappa^2=\frac{b}{aK'+bK_0}$$

$$\eta'=\frac{1}{b}|\gamma|_\rho(a^2K_0''+2abK_0'+b^2K_0), \qquad \varkappa'^2=\frac{b^2}{a^2K_0''+2abK_0'+b^2K_0}$$

а мажорантами будут показательные функции

$$M(\tau) = e^{\tau}, \qquad N(\tau) = e^{\tau} \qquad (2.3)$$

причем $\sigma = \sigma' = 1 / b$. Мажорантные уравнения (1.12), (1.16), после подстановки в них мажорант (2.5), принимают вид

$$L(\varkappa, \tau) \equiv \tau - \varkappa e^{-\frac{1}{2}\tau} = 0; \qquad L_1(\varkappa, \tau) \equiv \tau - 1 + (1 - \varkappa^2)e^{-\tau} = 0$$
$$L_2(\nu, \varkappa; \tau) \equiv \tau - \nu(e^{\tau} - 1 + \varkappa^2) = 0, \ \nu = \lambda\eta; \ L_1(\varkappa', \tau) = 0 \qquad (2.4)$$
$$L_3(\nu', \varkappa'; \tau) \equiv \tau - \nu'(e^{\tau} - 1 - \tau + \varkappa'^2) = 0, \qquad \nu' = \eta'\eta_0\lambda$$

Уравнению (2.1) соответствует линейное интегро-дифференциальное уравнение

$$u'(\xi) - \lambda\Upsilon(\xi)I(u|\xi) = f(\xi), \qquad f(\xi) = \lambda\gamma(\xi), \qquad \xi \text{ на } [-1, 1] \qquad (2.5)$$

Корни уравнений $L(\varkappa, \tau) = 0$, $L_1(\varkappa, \tau) = 0$, $L_1(\varkappa', \tau) = 0$ будут далее обозначаться соответственно через τ°, τ_0, τ_0', а наименьшие корни уравнений $L_2(\nu, \varkappa; \tau) = 0$ и $L_3(\nu', \varkappa'; \tau) = 0$ — через τ_* и τ_*'.

Применим к уравнению (2.1) теоремы *2—4*. Тогда легко видеть, что при достаточно малом значении параметра λ можно получить решение уравнения (2.1) методом итерации или методом Ньютона — Канторовича, а именно — имеют место следующие утверждения.

1°. Пусть функция $\gamma(\xi)$ принадлежит классу C_ρ и относительная кривизна $K(u)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $-t' \leqslant u \leqslant t'$, $t' = mr$, $m = \max(a, b)$. Тогда могут быть два подслучая.

(1) Если $r \geqslant r^\circ = \tau^\circ / b$ и $\lambda \leqslant 1 / \eta\,(e^{\tau^\circ} + \varkappa e^{\frac{1}{2}\tau^\circ})$, то в шаре Ω_{r° существует единственное решение $u^*(\xi)$ уравнения (2.1), удовлетворяющее условию $u(0) = 0$. Это решение может быть получено как предел последовательности

$$u_0(\xi) \equiv 0, \quad u_{n+1}(\xi) = \lambda\int_{\xi_0}^{\xi}\gamma(t)K(u_n(t))\exp(-I(u_n|t))\,dt \quad (n = 0, 1, \ldots) \qquad (2.6)$$

быстрота сходимости которой оценивается неравенством

$$\| u^* - u_n \|_\rho \leqslant (h^\circ)^n r^\circ, \qquad h^\circ = \lambda\eta e^{\tau^\circ} \qquad (n = 0, 1, \ldots) \qquad (2.7)$$

(2) Если $r \geqslant r_0 = \tau_0 / b$ и $\lambda \leqslant 1 / \eta e^{\tau_0}$, то в шаре Ω_{r_*}, $r_* = \tau_*/b$ существует единственное решение $u^*(\xi)$ уравнения (2.1), удовлетворяющее условию $u(0) = 0$. Это решение может быть получено как предел последовательности (2.8), быстрота сходимости которой оценивается неравенством

$$\|u^* - u_n\|_\rho \leqslant h_0^n\, r_0, \qquad h_0 = \lambda\eta e^{\tau_0} \qquad (n = 0, 1, \ldots) \qquad (2.8)$$

2°. Пусть решение уравнения (2.7) представляется в виде (1.43) и пусть функция $\gamma(\xi)$ принадлежит классу C_ρ, а относительная кривизна $K(u)$ дважды непрерывно-дифференцируема на отрезке $-t' \leqslant u \leqslant t'$, $t' = mr$, $m = \max(a, b)$. Тогда, если $r \geqslant r_0' = \tau_0' / b$ и $\lambda < 1 / \eta'\eta_0(e^{\tau_0'} - 1)$, то в шаре $\Omega_{r'_*}$, $r_*' = \tau_*' / b$ существует единственное решение $u^*(\xi)$ уравнения (2.1), удовлетворяющее условию $u(0) = 0$.

Это решение может быть получено как предел последовательности (1.39), в которой $\Gamma(F \mid \xi) = Q(F' \mid \xi)$, где $Q(f \mid \xi)$ — решение уравнения (2.5), а $P(u \mid \xi)$ — оператор вида

$$P(u \mid \xi) \equiv u(\xi) - \lambda\int_{\xi_0}^{\xi}\gamma(t)K(u(t))\exp(-I(u \mid t))\,dt$$

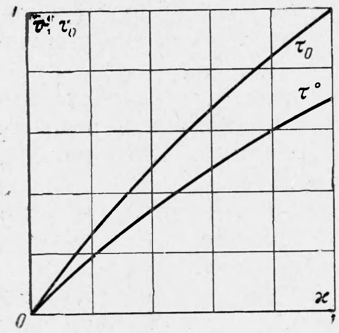
При этом быстрота сходимости указанной последовательности оценивается неравенством

$$\|u^* - u_n\|_\rho \leqslant (h_0')^n r_*', \quad h_0' = \lambda\eta'\eta_0 (e^{\tau_0'} - 1) \qquad (n = 0, 1, \ldots) \qquad (2.9)$$

2.2. *Струйные течения тяжелой жидкости с прямолинейными границами.* Рассмотрим течение тяжелой жидкости, границы которого состоят из конечного числа прямолинейных твердых стенок и одной свободной поверхности. Определение такого течения, как показано в работе [1], сводится к решению интегро-дифференциального уравнения

$$u'(\xi) = \lambda\gamma(\xi)\sin(-I(u \mid \xi) + \beta(\xi))\exp(-3u(\xi)), \quad \xi \text{ на } [-1, 1] \qquad (2.10)$$

при условии (1.2). В данном уравнении λ — постоянный параметр, $\gamma(\xi)$, $\beta(\xi)$ — заданные функции, зависящие от геометрических и физических свойств течения.



Фиг. 1

Легко видеть, что функции

$$U_\nu(t) = 3\nu e^{3t}, \quad V_\nu(t) \equiv 1 \quad (\nu = 0, 1, 2)$$

можно взять в качестве мажорирующих функций уравнения (2.10).

Основными параметрами уравнения (2.10) в этом случае будут величины

$$\eta = |\gamma|_\rho (3a + b), \qquad \varkappa^2 = \frac{3a \mid \gamma \sin\beta \mid_\rho}{(3a + b) \mid \gamma \mid_\rho}$$

$$\eta' = \frac{(3a + b)^2 \mid \gamma \mid_\rho}{3a}, \qquad \varkappa'^2 = \frac{9a^2 \mid \gamma \sin\beta \mid_\rho}{(3a + b)^2 \mid \gamma \mid_\rho}$$

а мажорантами будут показательные функции (2.3), причем $\sigma = \sigma' = 1/3a$. Мажорантные уравнения, следовательно, имеют вид (2.4).

Уравнению (2.10) соответствует линейное интегро-дифференциальное уравнение

$$u'(\xi) + \lambda\gamma(\xi)\,[3\sin\beta(\xi)u(\xi) + \cos\beta(\xi)I(u \mid \xi)] = f(\xi)$$

$$f(\xi) = \lambda\gamma(\xi)\sin\beta(\xi), \qquad \xi \text{ на } [-1, 1] \qquad (2.11)$$

Корни уравнений (2.4) будем по-прежнему обозначать через τ°, τ_0, τ_0', τ_*, τ_*'. Если к уравнению (2.10) применить теоремы *2—4*, то легко видеть, что к этому уравнению при малом значении параметра λ применимы метод итерации и метод Ньютона — Канторовича, а именно — имеют место следующие утверждения.

1°. Пусть функция $\gamma(\xi)$ принадлежит классу C_ρ, а функция $\beta(\xi)$ непрерывна на отрезке $[-1, 1]$. Тогда имеем два подслучая:

(1) Если $\lambda < 1 / \eta\,(e^{\tau^\circ} + \varkappa e^{1/2\tau^\circ})$, то в шаре Ω_{r°, $r^\circ = \tau^\circ / 3a$ существует единственное решение $u^*(\xi)$ уравнения (2.10), удовлетворяющее условию (1.2). Это решение можно получить как предел последовательности

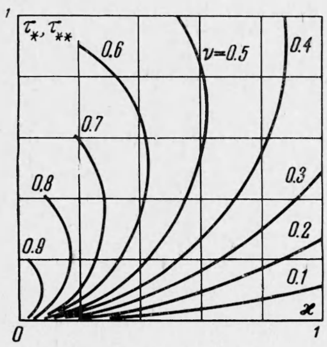
$$u_0(\xi) \equiv 0, \quad u_{n+1}(\xi) = \lambda \int_{\xi_0}^{\xi} \gamma(t)\sin(-I(u_n \mid t) + \beta(t))\exp(-3u_n(t))\,dt$$

$$(n = 0, 1, \ldots) \qquad (2.12)$$

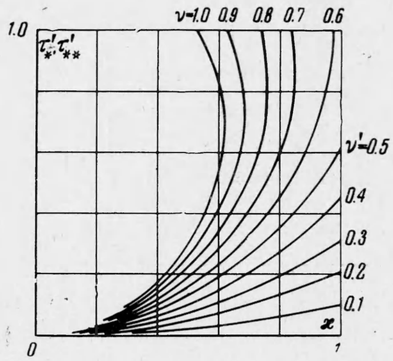
быстрота сходимости которой оценивается (2.7), где $r^\circ = \tau^\circ / 3a$.

(2) Если $\lambda < 1 / \eta e^{\tau^\circ}$, то в шаре Ω_{r_*}, $r_* = \tau_* / 3a$ существует единственное решение уравнения (2.10), удовлетворяющее условию (1.2). Это решение может быть получено как предел последовательности (2.12), быстрота сходимости которой оценивается (2.8), где $r_* = \tau_* / 3a$.

2°. Пусть решение уравнения (2.10) представляется в виде (1.43) и пусть функция $\gamma(\xi)$ принадлежит классу C_ρ, а функция $\beta(\xi)$ непрерывна на отрезке $[-1, 1]$. Тогда, если $\lambda < 1 / \eta'\eta_0 (e^{\tau'_0} - 1)$, то в шаре $\Omega_{r_*'}$, $r_*' = \tau_*' / 3a$ существует единственное решение $u^*(\xi)$ уравнения (2.10) удовлетворяющее условию (1.2). Это решение может быть получено как



Фиг. 2



Фиг. 3

предел последовательности (1.39), в которой $\Gamma(F \mid \xi) = Q(F' \mid \xi)$, где $Q(f \mid \xi)$ — решение уравнения (2.11), а $P(u \mid \xi)$ — оператор вида

$$P(u \mid \xi) \equiv u(\xi) - \lambda \int_{\xi_0}^{\xi} \gamma(t) \sin(-I(u \mid t) + \beta(t)) \exp(-3u(t))\, dt$$

При этом быстрота сходимости указанной последовательности оценивается неравенством (2.9), где $r_*' = \tau_*' / 3a$.

2.3. *Вычисление корней мажорантных уравнений.* Применение изложенных здесь методов к рассмотренным выше двум классам струйных течений зависит от выполнения неравенств, в которые входят величины, зависящие от корней мажорантных уравнений. Но легко видеть, что мажорантные уравнения как для течения с криволинейной стенкой, так и для течений тяжелой жидкости имеют один и тот же вид (2.4), причем достаточно взять четыре уравнения

$$L(\varkappa, \tau) = 0, \quad L_1(\varkappa, \tau) = 0,$$

$$L_2(\nu, \varkappa; \tau) = 0, \quad L_3(\nu', \varkappa'; \tau) = 0 \quad (2.13)$$

так как уравнение $L_1(\varkappa', \tau) = 0$ может быть получено из уравнения $L_1(\varkappa, \tau) = 0$ заменой $\varkappa$ на $\varkappa'$. Таким образом, для получения корней всех мажорантных уравнений достаточно уметь вычислять корни уравнений (2.18). В связи с этим здесь приводятся таблицы этих корней (см. табл. 1, где τ° — корень уравнения $\tau = \varkappa \exp(-{}^1\!/_2\, \tau)$, а τ_0— корень уравнения $\tau = 1 - (1 - \varkappa^2) \exp(-\tau)$; табл. 2, где τ_* — меньший корень уравнения $\tau = \nu(\exp \tau - \tau + \varkappa^2)$; табл. 3, где τ'_* — меньший корень уравнения $\tau = \nu'(\exp \tau - 1' - \tau + \varkappa'^2)$, а также графики, изображенные на фиг. 1—3, позволяющие находить приближенно корни уравнений (2.13).

Таблица 1

$\varkappa$	τ°	τ_0
0.0	0.0	0.0
0.1	0.0953	0.1350
0.2	0.1825	0.2592
0.3	0.2630	0.3738
0.4	0.3378	0.4805
0.5	0.4078	0.5801
0.6	0.4735	0.6737
0.7	0.5355	0.7620
0.8	0.5943	0.8454
0.9	0.6502	0.9246
1.0	0.7035	1.0

В заключение отметим, что для эффективного применения изложенных здесь методов к рассмотренным струйным задачам необходимо разработать эффективные точные и приближенные методы вычисления интегралов (0.1), (0.2). Вопрос о точном вычислении интегралов (0.2) рассмотрен в работе [9]. Для приближенного вычисления интегралов (0.2) в некоторых случаях можно использовать формулы работы [10].

Таблица 2

Значения τ*

κ \ ν	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.0011	0.0025	0.0043	0.0067	0.0100	0.0152	0.0240	0.0439	
0.2	0.0044	0.0100	0.0172	0.0269	0.0408	0.0630	0.1072		
0.3	0.0100	0.0226	0.0389	0.0613	0.0946	0.1537			
0.4	0.0178	0.0402	0.0696	0.1109	0.1765	0.3335			
0.5	0.0278	0.0630	0.1098	0.1779	0.2998				
0.6	0.0401	0.0911	0.1601	0.2658	0.5265				
0.7	0.0546	0.1245	0.2213	0.3822					
0.8	0.0714	0.1635	0.2949	0.5477					
0.9	0.0905	0.2083	0.3830						
1.0	0.1118	0.2592	0.4894						

Таблица 3

Значения τ_*'

κ′ \ ν′	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.0010	0.0020	0.0030	0.0040	0.0050	0.0060	0.0070	0.0080	0.0090
0.2	0.0040	0.0080	0.0120	1.0160	0.0201	0.0242	0.0283	0.0324	0.0366
0.3	0.0090	0.0180	0.0271	0.0363	0.0455	0.0549	0.0645	0.0743	0.0843
0.4	0.0160	0.0321	0.0483	0.0649	0.0817	0.0990	0.1170	0.1357	0.1555
0.5	0.0250	0.0502	0.0759	0.1022	0.1294	0.1579	0.1882	0.2211	0.4121
0.6	0.0361	0.0725	0.1099	0.1486	0.1896	0.2337	0.2828	0.3399	
0.7	0.0491	0.0990	0.1506	0.2050	0.2641	0.3308	0.4112	0.5236	
0.8	0.0642	0.1298	0.1983	0.2723	0.3557	0.4576	0.6083		
0.9	1.0813	0.1649	0.2535	0.3520	0.4700	0.6398			
1.0	0.1005	0.2045	0.3168	0.4465	0.6191				

Поступила 6 XI 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Пыхтеев Г. Н. Общая и основная краевые задачи плоских струйных установившихся течений и соответствующие им нелинейные уравнения. ПМТФ, 1966, № 1.
2. Пыхтеев Г. Н. Нелинейные краевые задачи теории струй и некоторые методы их решения. II Всесоюзн. съезд по теоретической и прикладной механике, М., 1964, Аннотация докл.
3. Секерж-Зенкович Я. И. К теории обтекания криволинейной дуги с отрывом струй. Тр. ЦАГИ, 1937, вып. 299.
4. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. Физматгиз, 1961.
5. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. Гостехиздат, 1956.
6. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, 1959.
7. Канторович Л. В. Некоторые дальнейшие применения метода Ньютона. Вестн. ЛГУ, 1957, т. 2, № 7, стр. 68—103.
8. Некрасов А. И. О прерывном течении жидкости в двух измерениях вокруг препятствия в форме дуги круга. Изв. Иваново-Вознесенск. политехн. ин-та, 1962, № 5 (выпуск математический).
9. Пыхтеев Г. Н. Точные методы вычисления интегралов типа Коши по разомкнутому кругу. Aplikace matematiky, 1965, vol. 10, № 4, p 351—373.
10. Пыхтеев Г. Н. О вычислении некоторых сингулярных интегралов с ядром типа Коши. ПММ, 1959, т. 23, вып. 6.