УДК 539.3

ОБ УРАВНЕНИЯХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНЕ ПОВОРОТОВ И ДЕФОРМАЦИЙ

Г. В. Иванов

(Новосибирск)

В ряде твердых тел, например в металлических телах, при произвольной величине поворотов и деформаций элементов тела компоненты девиатора упругих деформаций — величины порядка отношения предела текучести на сдвиг к модулю Юнга и, следовательно, малы по сравнению с единицей. Ниже на основе результатов работы [1] формулируются уравнения изотропного упругого и идеального упругопластического деформирования таких тел. Проведено сопоставление полученных уравнений с известными [2—4]. Ради простоты записи уравнений ниже рассматриваются только адиабатические процессы деформирования.

1. Уравнения упругого деформирования в случае малых компонент девиатора деформаций. Обозначим через Э_α, Э^β $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$ базисные векторы лагранжевой системы координат, порождаемой декартовой системой координат x^i с базисными векторами $\mathbf{k}_i = \mathbf{k}^i (i = 1, 2, 3)$.

Пусть $\hat{\gamma}_{\alpha\beta}\text{Э}^\alpha\text{Э}^\beta = \hat{\gamma}^{\sigma\lambda}\text{Э}_\sigma\text{Э}_\lambda = \gamma_{ij}\mathbf{k}^i\mathbf{k}^j$ — какой-либо симметричный тензор. Дифференцируя по времени t формулы связи компонент $\hat{\gamma}_{\alpha\beta}$, $\hat{\gamma}^{\sigma\lambda}$ с компонентами γ_{ij}, находим (1.1)

$$(d\hat{\gamma}_{\alpha\beta}/dt)\text{Э}^\alpha\text{Э}^\beta = (D\gamma_{ij}/Dt + \gamma_{sj}e_{si} + \gamma_{si}e_{sj})\mathbf{k}^i\mathbf{k}^j,$$
$$(d\hat{\gamma}^{\alpha\beta}/dt)\text{Э}_\alpha\text{Э}_\beta = (D\gamma_{ij}/Dt - \gamma_{sj}e_{si} - \gamma_{si}e_{sj})\mathbf{k}^i\mathbf{k}^j,$$

где $e_{ij} = (1/2)(\partial u_i/\partial x^j + \partial u_j/\partial x^i)$, u_i — компоненты вектора скорости; $D\gamma_{ij}/Dt$ — производная Яуманна [5]

$$D\gamma_{ij}/Dt = d\gamma_{ij}/dt + \gamma_{ki}\omega_{kj} + \gamma_{kj}\omega_{ki},$$
$$\omega_{ij} = (1/2)(\partial u_i/\partial x^j - \partial u_j/\partial x^i).$$

Из (1.1), в частности, следует

$$D\varepsilon_{ij}/Dt + \varepsilon_{ki}e_{kj} + \varepsilon_{jk}e_{ki} = e_{ij}, \tag{1.2}$$

где

$$\varepsilon_{ij}\mathbf{k}^i\mathbf{k}^j = \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}\text{Э}^\alpha\text{Э}^\beta; \quad \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} = (1/2)(\hat{g}_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}); \quad \hat{g}_{\alpha\beta} = \text{Э}_\alpha\cdot\text{Э}_\beta.$$

Очевидно, уравнения (1.2) можно записать в виде

$$D\varepsilon_{ij}/Dt + (2/3)\varepsilon e_{ij} = a_{ij}, \quad \varepsilon = \varepsilon_{ij}\delta_{ij}, \tag{1.3}$$
$$a_{ij} = e_{ij} - \varepsilon'_{ik}e_{kj} - \varepsilon'_{jk}e_{ki}, \quad \varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon.$$

Так как в системе координат x^i, образованной главными осями деформаций,

$$a_{11} = (1 - 2\varepsilon'_{11})e_{11}, \quad a_{12} = (1 + \varepsilon'_{33})e_{12}, \ \ldots,$$

то при

$$1 + \varepsilon'_{ij} \approx 1 \tag{1.4}$$

тензор с компонентами a_{ij} эквивалентен тензору скоростей деформаций e_{ij}.

Поэтому в случае (1.4) можно вместо (1.3) использовать уравнения

(1.5) $$D\varepsilon_{ij}/Dt = (1-(2/3)\varepsilon)e_{ij}.$$

Из (1.5) и уравнения неразрывности

$$d\rho/dt + \rho e = 0$$

следует

(1.6) $$D\varepsilon'_{ij}/Dt = \left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon\right)e'_{ij}, \quad d\varepsilon/dt = \left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon\right)e,$$
$$e'_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}e, \quad e = \delta_{ij}e_{ij}, \quad \rho = \rho_0\left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon\right)^{3/2},$$

где ρ_0 — плотность в недеформированном состоянии.

Аналогично находим из (1.1), (1.6), что в случае (1.4) для записи уравнений (1.6) в лагранжевой системе координат можно использовать формулы

(1.7) $$d\hat{\varepsilon}'_{\alpha\beta}/dt\, Э^{\alpha}Э^{\beta} = d\hat{\varepsilon}'^{\gamma\lambda}/dt\, Э_{\gamma}Э_{\lambda} = D\varepsilon'_{ij}/Dt k^i k^j,$$
$$\hat{\varepsilon}'_{\alpha\beta} = \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\hat{g}_{\alpha\beta}\varepsilon, \quad \hat{\varepsilon}'^{\gamma\lambda} = \hat{g}^{\gamma s}\hat{g}^{\lambda k}\hat{\varepsilon}'_{sk}, \quad \hat{g}^{\alpha\beta} = Э^{\alpha}\cdot Э^{\beta}.$$

Полагаем, что при изотропном упругом деформировании внутренняя энергия E — функция энтропии S и инвариантов ε, Γ_2, Γ_3 тензора деформаций

(1.8) $$E = E(\varepsilon, \Gamma_2, \Gamma_3, S), \quad \Gamma_2 = \frac{1}{2}\varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ij}, \quad \Gamma_3 = \frac{1}{3}\varepsilon'_{ik}\varepsilon'_{kj}\varepsilon'_{ij}.$$

Из (1.6), (1.8) находим

(1.9) $$dE/dt = \left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon\right)\left[e\partial E/\partial\varepsilon + \varepsilon'_{ij}\partial E/\partial\Gamma_2 + \varepsilon'_{ik}\varepsilon'_{kj}\partial E/\partial\Gamma_3\right]e'_{ij} +$$
$$+ TdS/dt, \quad T = \partial E/\partial S.$$

Так как упругое деформирование — обратимый процесс, то из закона сохранения энергии

(1.10) $$\sigma_{ij}e_{ij} = \rho dE/dt$$

и (1.6), (1.9) следуют уравнения

(1.11) $$\sigma = \alpha\,\partial E/\partial\varepsilon, \quad \sigma'_{ij} = \beta\varepsilon'_{ij} + \gamma\left(\varepsilon'_{ik}\varepsilon'_{kj} - \frac{2}{3}\Gamma_2\delta_{ij}\right), \quad dS/dt = 0,$$
$$\alpha = \rho_0\left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon\right)^{5/2}, \quad \beta = \alpha\,\partial E/\partial\Gamma_2, \quad \gamma = \alpha\,\partial E/\partial\Gamma_3.$$

При упругом деформировании соответствие между величинами напряжений и деформаций должно быть взаимно однозначным. Поэтому для того, чтобы уравнения (1.11) были уравнениями упругого деформирования, необходимо, чтобы они однозначно определяли величины деформаций по заданным величинам напряжений. Из (1.11) находим

$$\sigma'_{ik}\sigma'_{kj} = A\,\varepsilon'_{ij} + B\,\varepsilon'_{ik}\varepsilon'_{kj} + C\,\delta_{ij},$$
$$A = \gamma\left(\frac{2}{3}\beta\Gamma_2 + \gamma\Gamma_3\right), \quad B = \beta^2 - \frac{1}{3}\gamma^2\Gamma_2, \quad C = 2\gamma\left(\beta\Gamma_3 + \frac{2}{9}\Gamma_2^2\gamma\right),$$

$$J_2 = \frac{1}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij} = \beta^2\Gamma_2 + \frac{1}{3}\gamma^2\Gamma_2^2 + 3\beta\gamma\Gamma_3,$$

$$J_3 = \frac{1}{3}\sigma'_{ik}\sigma'_{kj}\sigma'_{ij} = \frac{2}{3}\gamma\Gamma_2\left(\beta^2\Gamma_2 - \frac{1}{9}\gamma^2\Gamma_2^2 + \frac{3}{2}\gamma\beta\Gamma_3\right) + (\beta^3 + \gamma^3\Gamma_3)\,\Gamma_3.$$

Отсюда и из (1.11) следует, что в случае

$$\partial(\alpha\partial E/\partial\varepsilon)/\partial\varepsilon \neq 0, \quad \beta^3 - \gamma^2(\beta\Gamma_2 + \gamma\Gamma_3) \neq 0,$$

$$(\partial J_2/\partial\Gamma_2)(\partial J_3/\partial\Gamma_3) - (\partial J_2/\partial\Gamma_3)(\partial J_3/\partial\Gamma_2) \neq 0$$

уравнения (1.11) разрешимы относительно ε, ε'_{ij} и их можно записать в виде

(1.12)
$$\varepsilon'_{ij} = a\sigma'_{ij} + bQ'_{ij}, \quad Q'_{ij} = \sigma'_{ik}\sigma'_{kj} - \frac{2}{3}J_2\delta_{ij},$$
$$\sigma = \sigma(\varepsilon, J_2, J_3, S),$$

где a, b можно рассматривать как функции ε, J_2, J_3, S.

Для того чтобы уравнения (1.6), (1.12) с заданными функциями a, b, σ были уравнениями упругого деформирования, достаточно, чтобы a, b, σ удовлетворяли условиям разрешимости уравнений (1.12) относительно σ'_{ij}, ε

(1.13)
$$\partial\sigma/\partial\varepsilon \neq 0, \quad a^3 - b^2(aJ_2 + bJ_3) \neq 0,$$
$$(\partial\Gamma_2/\partial J_2)(\partial\Gamma_3/\partial J_3) - (\partial\Gamma_2/\partial J_3)(\partial\Gamma_3/\partial J_2) \neq 0,$$
$$\Gamma_2 = a^2J_2 + \frac{1}{3}b^2J_2^2 + 3abJ_3,$$
$$\Gamma_3 = \frac{2}{3}bJ_2\left(a^2J_2 - \frac{1}{9}b^2J_2^2 + \frac{3}{2}abJ_3\right) + J_3(a^3 + b^3J_3)$$

и закону сохранения энергии (1.10) с внутренней энергией E, рассматриваемой как функция ε, J_2, J_3, S. Так как по (1.6), (1.12) имеет место

(1.14)
$$\left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon\right)e'_{ij} = D(a\sigma'_{ij} + bQ'_{ij})/Dt,$$
$$\left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon\right)\sigma'_{ij}e'_{ij} = adJ_2/dt + 2\,bdJ_3/dt + 2\,J_2da/dt + 3\,J_3db/dt,$$

то закон сохранения энергии (1.10) при $E = E(\varepsilon, J_2, J_3, S)$ будет выполнен, если

$$\alpha\partial E/\partial J_2 = a + 2J_2\partial a/\partial J_2 + 3J_3\partial b/\partial J_2,$$

$$\alpha\partial E/\partial J_3 = 2(b + J_2\partial a/\partial J_3) + 3J_3\partial b/\partial J_3,$$

$$\alpha\partial E/\partial\varepsilon = \sigma + 2J_2\partial a/\partial\varepsilon + 3J_3\partial b/\partial\varepsilon,$$

и, следовательно, a, b, σ должны удовлетворять условиям

(1.15)
$$\partial a/\partial J_3 = \partial b/\partial J_2, \quad a + 2J_2\partial a/\partial J_2 + 3J_3\partial b/\partial J_2 = (3/5)(1 - (2/3)\varepsilon)\times$$
$$\times(\partial\sigma/\partial J_2 + \partial a/\partial\varepsilon),$$
$$2(b + J_2\partial a/\partial J_3) + 3J_3\partial b/\partial J_3 = (3/5)(1 - (2/3)\varepsilon)(\partial\sigma/\partial J_3 + \partial b/\partial\varepsilon).$$

Таким образом, уравнения упругого деформирования в случае (1.4) можно строить, задавая a, b, σ как функции ε, J_2, J_3, S так, чтобы были выполнены условия (1.13), (1.15). В частности, эти условия будут выполнены при

$$a = 1/2\mu\alpha, \quad \mu = \mu(\varepsilon, S), \quad b = 0, \quad \sigma = \alpha\partial\psi/\partial\varepsilon - -J_2 d\,(1/2\mu)/\alpha d\varepsilon, \quad \psi = \psi(\varepsilon, S), \quad E = J_2/2\mu\alpha^2 + \psi(\varepsilon, S). \tag{1.16}$$

Если относительное изменение плотности мало по сравнению с единицей, то величину $1 - (2/3)\varepsilon$ в (1.5), (1.6) и во всех последующих уравнениях можно заменить на единицу.

Если угловые скорости элементов среды и скорости деформаций сдвига — величины одного порядка

$$\omega_{ij} \sim e_{ij} \sim \partial u_i/\partial x^j \quad (i \neq j),$$

то тензор с компонентами

$$e_{ij} - \varepsilon'_{ik}\partial u_k/\partial x^j - \varepsilon'_{jk}\partial u_k/\partial x^i$$

эквивалентен тензору скоростей деформаций. В этом случае производную Яуманна в (1.5)—(1.7), (1.14) можно заменить на производную по времени.

2. Уравнения упругопластического деформирования при малых компонентах девиатора упругих деформаций. При упругопластическом деформировании наряду с обратимыми (упругими) деформациями имеют место необратимые (пластические) деформации. Обозначим

$$e_{ij} = e^e_{ij} + e^p_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon^e_{ij} + \varepsilon^p_{ij}, \tag{2.1}$$

где e^e_{ij}, e^p_{ij} — скорости упругих и пластических деформаций; ε^e_{ij}, ε^p_{ij} — упругие и пластические деформации. Из (1.1), (1.2), (2.1) следует

$$D\,\varepsilon^e_{ij}/Dt + \varepsilon^e_{is}e_{sj} + \varepsilon^e_{js}e_{si} = e^e_{ij} = e_{ij} - e^p_{ij}. \tag{2.2}$$

Если компоненты девпатора упругих деформаций малы по сравнению с единицей

$$1 + \varepsilon'^e_{ij} \approx 1, \quad \varepsilon'^e_{ij} = \varepsilon^e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{ks}\varepsilon^e_{ks}, \tag{2.3}$$

то тензор с компонентами α_{ij}

$$\alpha_{ij} = e_{ij} - \varepsilon'^e_{is}e_{sj} - \varepsilon'^e_{js}e_{si}$$

эквивалентен тензору скоростей деформаций e_{ij} и уравнения (2.2) можно записать в виде

$$D\,\varepsilon^e_{ij}/Dt + \frac{2}{3}e_{ij}\delta_{ks}\varepsilon^e_{ks} = e^e_{ij} = e_{ij} - e^p_{ij}. \tag{2.4}$$

Полагаем, что объем элемента среды изменяется упруго

$$e = \delta_{ij}e_{ij} = \delta_{ks}e^e_{ks}. \tag{2.5}$$

Из (2.4), (2.5) и уравнения неразрывности находим

$$(2.6)\qquad \left(1-\frac{2}{3}\varepsilon\right)e'_{ij}=D\varepsilon'^{e}_{ij}/Dt+e^{p}_{ij},$$

$$d\varepsilon/dt=\left(1-\frac{2}{3}\varepsilon\right)e,\ \rho=\rho_0\left(1-\frac{2}{3}\varepsilon\right)^{3/2}.$$

Если в качестве зависимости ε'^{e}_{ij} от σ_{ij} использовать уравнения (1.12), (1.16), а в качестве зависимости e^{p}_{ij} от σ_{ij} использовать уравнения идеального пластического течения с условием пластичности Мизеса [6], то получим

$$(2.7)\qquad \varepsilon'^{e}_{ij}=\sigma'_{ij}/2\mu\alpha,\ e^{p}_{ij}=\lambda\sigma'_{ij},$$

$$\sigma=\alpha\partial\psi/\partial\varepsilon-J_2d(1/2\mu)/\alpha d\varepsilon,\ \mu=\mu(\varepsilon,S),\ \alpha=\rho_0(1-(2/3)\varepsilon)^{5/2},$$

$$\psi=\psi(\varepsilon,S),$$

$$E=\psi+J_2/2\mu\alpha^2,\quad \alpha TdS/dt=2\tau^2\lambda,\quad T=\partial E/\partial S;$$

$$(2.8)\qquad \lambda=0,\ \text{если}\ f<0\ \text{или}\ f=0,\quad df/dt<0;$$

$$\lambda\geqslant 0,\ \text{если}\ f=0,\ df/dt=0,\ f=J_2-\tau^2,\ \tau=\tau(\varepsilon,S)$$

(τ — предел текучести при сдвиге).

Для среды, удовлетворяющей условию (2.3), уравнения (2.6)—(2.8) образуют систему уравнений упругопластического деформирования, корректную при произвольной величине поворотов и деформаций элементов среды. Уравнения (2.6)—(2.8) совпадают с известными уравнениями [2—4] в случае, когда $\mu=\mathrm{const}$, $\tau=\mathrm{const}$, а относительное изменение плотности мало по сравнению с единицей и, следовательно,

$$1-(2/3)\varepsilon=(\rho/\rho_0)^{2/3}\approx 1,\quad \alpha\approx\rho_0,\quad d\varepsilon/dt\approx e.$$

При записи уравнений (2.6)—(2.8) в лагранжевой системе координат зависимость компонент девиатора скоростей деформаций от напряжений можно записать, используя (1.6), в виде

$$\left(1-\frac{2}{3}\varepsilon\right)\widehat{e}'_{\alpha\beta}=d\widehat{\varepsilon}'^{e}_{\alpha\beta}/dt+\lambda\widehat{\sigma}'_{\alpha\beta},\quad \widehat{\varepsilon}'^{e}_{\alpha\beta}=\widehat{\sigma}'_{\alpha\beta}/2\mu\alpha,$$

остальные уравнения (2.6)—(2.8) остаются без изменений.

Так как по (2.6), (2.7)

$$\left(1-\frac{2}{3}\varepsilon\right)\sigma'_{ij}e'_{ij}=\frac{1}{2}dJ_2/\mu\alpha\,dt+J_2d(1/\mu\alpha)/dt+2J_2\lambda,$$

то условия (2.8), определяющие функцию λ в (2.7), можно заменить условиями

$$\lambda=\frac{1}{2}c\omega/\tau^2,\quad \omega=\left(1-\frac{2}{3}\varepsilon\right)\sigma'_{ij}e'_{ij}-\tau d(\tau/\mu\alpha)/dt,$$

$$c=0,\quad \text{если}\quad f<0\quad \text{или}\quad f=0,\quad \omega\leqslant 0;$$

$$c=1,\quad \text{если}\quad f=0,\quad \omega>0.$$

Для вычисления по скоростям деформаций малых приращений напряжений за малый интервал времени можно вместо уравнений (2.6)—(2.8) использовать предложенную в [4] процедуру корректировки девиатора напряжений. При этом приращения напряжений до корректировки вычисляются по уравнениям (1.11), (1.16).

Используя (1.12), (1.13), (1.15), (2.6), можно для среды с условием (2.3) сформулировать уравнения идеального упругопластического деформирования с более общим, чем в (2.6)—(2.8), законом упругого деформирования.

Поступила 1 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. **Годунов С. К., Роменский Е. И.** Нестационарные уравнения нелинейной теории упругости в эйлеровых координатах.— ПМТФ, 1972, № 6.
2. **Григорян С. С.** Об основных представлениях динамики грунтов.— ПММ, 1960, № 6.
3. **Томас Т.** Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М., «Мир», 1964.
4. **Уилкинс М. Л.** Расчет упругопластических течений.— В кн.: Вычислительные методы в гидродинамике. М., «Мир», 1967.
5. **Седов Л. И.** Введение в механику сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
6. **Качанов Л. М.** Основы теории пластичности. М., «Наука», 1969.

УДК 532.5 : 532.135

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В СТЕРЖНЕ ИЗ ДИССИПАТИВНОГО КАУЧУКОПОДОБНОГО МАТЕРИАЛА

А. И. Леонов

(Москва)

В [1] рассматривались в изотермическом приближении волны, распространяющиеся в упруговязком стержне, а также было приведено численное решение задачи об ударе стержня конечной длины о жесткую преграду. При наличии сильных геометрических и физических нелинейностей в определяющих уравнениях в стержнях могут распространяться волны очень большой интенсивности, где существенны эффекты неизотермичности при распространении волн. Исследованию этих вопросов посвящена данная работа.

1. Основные уравнения. При изучении движения стержней будем использовать, как и в [1], осредненное по сечению описание. Материал стержня предполагаем несжимаемым с плотностью ρ_0.

Уравнения баланса массы, импульса и энергии в «стержневом приближении» имеют вид

$$(1.1)\qquad \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(fv) = 0,\quad \frac{\partial}{\partial t}(fv) + \frac{\partial}{\partial x}\left(fv^2 - \rho_0^{-1} f\sigma\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\rho_0 f(U + v^2/2)\} + \frac{\partial}{\partial x}\{\rho_0 fv(U + v^2/2\} = \frac{\partial}{\partial x}(fv\sigma - q) + \alpha\sqrt{f}(T - T_0),$$

где f — площадь поперечного сечения стержня; v — средняя по сечению скорость; σ — среднее по сечению нормальное напряжение (определенное, как и в однородном случае, с использованием условия обращения в нуль напряжений на свободной поверхности стержня); U — удельная внутренняя энергия; q — продольный тепловой поток; T — средняя по сечению