

УДК 536.25; 621.315.592.3; 621.315.61

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ
ПРИ ВЫРАЩИВАНИИ КРИСТАЛЛОВ
МУЛЬТИКРЕМНИЯ МЕТОДОМ
БРИДЖМЕНА–СТОКБАРГЕРА***

В.С. БЕРДНИКОВ¹, М.В. ФИЛИППОВА¹, Б.А. КРАСИН², А.И. НЕПОМНЯЩИХ²

¹*Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск*

²*Институт геохимии им. А.П. Виноградова СО РАН, Иркутск*

Численно исследован сопряженный теплообмен при получении мультикремния из плоскостонных тиглей в вертикальном варианте метода Бриджмена–Стокбаргера. С учетом теплоты фазового перехода решены уравнения конвективного теплообмена в области, занятой расплавом, и уравнения теплопроводности в массиве затвердевшего кремния и в стенках тигля.

ВВЕДЕНИЕ

Создание новых экономичных технологий получения исходного сырья для изготовления высокоэффективных солнечных фотоэлектрических модулей — одна из ключевых проблем, лимитирующих развитие альтернативной энергетики [1]. Основная доля производства солнечных батарей в настоящее время приходится на моно- и мультикристаллический кремний [2, 3], поэтому массовое производство и использование солнечных энергосистем на их основе связано с созданием оптимальных технологий получения кремния солнечного качества, обеспечивающих радикальное снижение его стоимости и позволяющих существенно снизить стоимость фотоэлектрических модулей. Один из возможных вариантов новой технологии основан на глубокой очистке (рафинировании) металлургического кремния и выращивании из него достаточно качественных блоков мультикремния в плоскостонных тиглях методом Бриджмена–Стокбаргера [4, 5]. В реальной технологии желательна реализация таких условий, чтобы крупноблочный слиток рос с минимальным количеством межзеренных границ и наиболее однородным распределением электрофизических характеристик [5]. Необходимо найти условия зарождения затравочного кристалла (или сохранения внесенной заранее затравки) и формирования слитка с равномерным распределением примесей по объему.

Метод Бриджмена разрабатывался, исходя из предположения, что, охлаждая контейнер с расплавом со дна, можно подавить свободную (термогравитационную или тепловую гравитационно-капиллярную в зависимости от состояния верхней границы расплава) конвекцию и обеспечить условия роста кристалла в диффузионном режиме (в режиме нестационарной теплопроводности) с плоским фронтом

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 02-01-00808, 05-01-00813, 05-05-64752) и интеграционных проектов СО РАН (№ 155-2003, № 156-2003).

кристаллизации. Но поскольку коэффициенты теплопроводности расплава кремния и материала тигля (в данном случае — графита) практически всегда достаточно сильно отличаются, то в системе неизбежно возникают радиальные градиенты температуры и в гидродинамическом смысле система абсолютно неустойчива. Развивается конвективное движение, интенсивность которого пропорциональна радиальному градиенту температуры. При анализе условий роста кристалла поле температуры в системе тигель–расплав–кристалл необходимо определять, решая задачу сопряженного теплообмена. Поля температуры в расплаве и кристалле кремния и в стенках тигля самосогласованны. Кроме специфических для контейнерных методов проблем, связанных с различием коэффициентов теплового расширения материалов и возникающих напряжений, в методе Бриджмена–Стокбаргера при развитии конвективного движения возникает общая для всех методов получения кристаллов необходимость изучения влияния локальных особенностей конвекции на поле температуры и на форму фронта кристаллизации, на распределение градиентов температуры и термических напряжений в растущем кристалле [6–8].

Для отработки управляемой технологии получения кристаллов кремния высокого качества и большого диаметра необходимо понимание процессов тепло-массопереноса, протекающих в объеме расплава и вблизи фронта кристаллизации, а так же их связь с процессами теплообмена во всей ростовой камере. Прямые экспериментальные исследования представляют собой чрезвычайно трудоемкую и дорогостоящую процедуру из-за крайне высоких температур, характерных для этого процесса (до 1800 К). Подробные измерения характеристик поля температуры практически невозможны из-за особенностей конструкции теплового узла. Математическое моделирование может существенно сократить сроки подготовки технологических экспериментов, сузить диапазоны поиска оптимальных параметров процесса и снизить материальные затраты на проведение экспериментов, качественно оценить то или иное конструкторское решение. Поэтому задача численного моделирования даже сильно идеализированного процесса роста является весьма важной и актуальной. С помощью численного и физического моделирования можно воссоздать условия роста кристалла и ответить на непростой вопрос: действительно ли диффузионный режим наиболее технологичен? Поскольку из общих гидродинамических соображений рассматриваемая система абсолютно неустойчива, то с помощью комплексного моделирования можно ответить на вопрос о влиянии на пространственную форму и интенсивность конвективных течений распределения температуры на внешних стенках тигля и темпа охлаждения. А локальные характеристики конвективного теплообмена однозначно связаны с формой фронта кристаллизации, как экспериментально показано на примере метода Чохральского [7].

В настоящее время математические модели метода Бриджмена–Стокбаргера, включающие в себя сопряженный теплообмен и учитывающие фазовые превращения, активно разрабатываются [8, 9]. Но качественные и количественные характеристики теплофизических процессов сильно зависят от индивидуальных для каждого материала особенностей технологии, определяемых его физико-химическими свойствами. Теплофизические процессы при получении мультикремния из графитовых плоскодонных тиглей не изучены совершенно. Поэтому данная работа направлена на исследования фундаментальных теплофизических свойств данного типа технологических процессов, а в частности, на воспроизведение условий роста мультикремния в технологических экспериментах, проведенных в ИГХ СО РАН. На первом этапе необходимо было правильно уловить основные тенденции в поведении системы на качественном уровне. С практической точки зрения это

наиболее сильный результат. На следующем этапе расчёты будут проведены точнее, для режимов, наиболее интересных с физической и технологической точек зрения. Использован метод сквозного счёта, основанный на энтальпийной постановке задачи. Проведен сравнительный анализ характеристик процесса кристаллизации в диффузионном и конвективном режимах. Изучено влияние тепловой гравитационно-капиллярной конвекции на форму фронта кристаллизации в зависимости от распределений температуры на внешних стенках тигля.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для численного эксперимента постановка задачи и расчётная область определялись условиями реального технологического эксперимента. Боковые стенки цилиндрического тигля с плоским дном подогреваются радиационным потоком со стенок осесимметричной двухзонной печи. Конструкция печи позволяет иметь верхнюю часть с однородным распределением температуры, в которой тигель с шихтой выдерживаются в режиме расплавления шихты и гомогенизации расплава. Начиная с момента $t = 0$, после выдержки, тигель с заданной скоростью опускается в нижнюю часть печи, в которой температура падает по линейному закону. Начиная с какого-то момента, температура дна тигля становится ниже температуры кристаллизации. В качестве первого шага исследований данной системы считаем, что температура на внешней стороне вертикальных стенок тигля соответствует экспериментально измеренному профилю температуры в печи. Т. е. не учитываем радиационно-конвективный теплообмен между стенками печи и тигля, не учитываем тепловую инерцию заполненного расплавом тигля и обратное влияние конвекции в расплаве на перераспределение температуры на внешних стенках тигля. Из возможных вариантов распределения температуры на боковой стенке тигля выберем случай, когда температура внешней стенки дна достигает температуры кристаллизации, на боковой стенке верхняя часть нагрета однородно, а в нижней части температура меняется линейно. То есть на боковой стенке есть излом профиля температуры. По мере опускания тигля в холодную зону, точка излома смещается вверх по стенке тигля. На нижней поверхности дна температура всегда считается заданной и равной температуре в нижней угловой точке, а на границе раздела дно–расплав температура рассчитывается и зависит от соотношения радиального и осевого потоков тепла. Оно устанавливается в зависимости от режима теплообмена. Радиальное распределение температуры и теплового потока в общем случае может быть неоднородным. Будем считать, что тигель, содержащий расплав, и весь тепловой узел имеют цилиндрическую симметрию. В математической модели предполагается, что поля температуры, скорости и вихря сохраняют осевую симметрию.

Графитовый тигель с однородной толщиной стенки и крышки удерживается в цилиндрической печи за шток, расположенный осесимметрично на верхней границе крышки. Схема рабочего участка установки в цилиндрических координатах представлена на рис. 1, а. Здесь 1, 2 — области, занятые расплавом и затвердевшим материалом соответственно, 3 — дно тигля, 4 — его боковая стенка, 5 — съёмная крышка, в рабочем состоянии плотно соединённая со стенкой тигля, и можно считать, что разрыв и контактное тепловое сопротивление отсутствуют, 6 — графитовый шток, благодаря которому тигель удерживается в водоохлаждаемом узле, 7 — газовая прослойка между свободной поверхностью расплава и нижней границей крышки. Поскольку после предварительного вакуумирования ростовая камера продувается аргоном, то считаем, что прослойка заполнена аргоном. Экспериментально определенное распределение температуры на оси печи показано

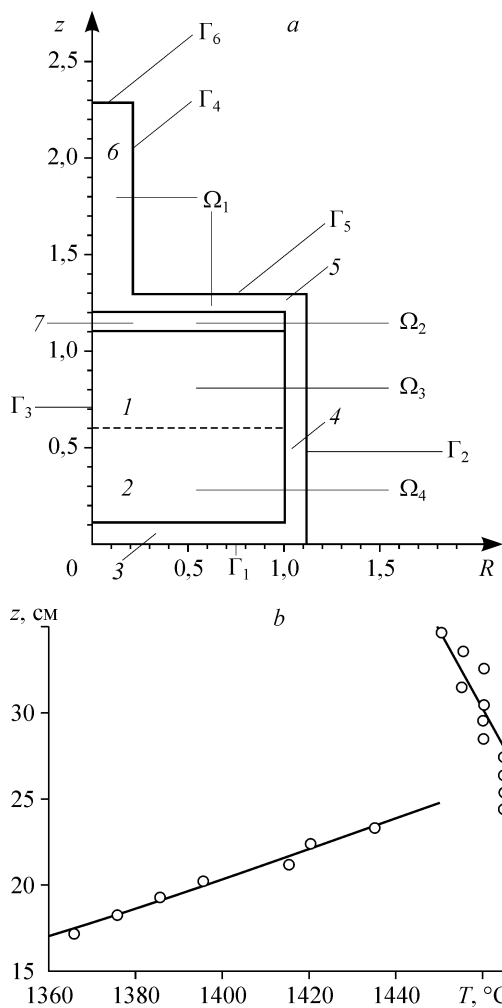


Рис. 1. Расчетная область (а) и экспериментально определенное распределение температуры на оси печи (b).

на рис. 1, b. Измерения проводились двумя термопарами в условиях нагрева с пустым тиглем. Спаи термопар располагались: первая — на дне тигля, вторая — в области крышки.

Исходя из конструкции рабочего участка установки, считаем, что расчетная область Ω является составной, то есть $\Omega = \bigcup_{i=1}^4 \Omega_i$, где

Ω_1 — графитовый тигель, Ω_2 — газовая прослойка, Ω_3 — расплав кремния, Ω_4 — кристалл. Граница расчетной области $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^6 \Gamma_i$,

где $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_6$ части общей границы, на которых заданы условия Дирихле, на границе $\Gamma_4 \cup \Gamma_5$ заданы условия Неймана, и на границе Γ_4 задано условие симметрии $\partial T / \partial n = 0$. При этом в расчетной области имеется внутренняя свободная граница расплав–твердое

вещество ($\partial\Omega_3 \cap \partial\Omega_4$), положение которой заранее неизвестно, а также свободная граница газ–расплав ($\partial\Omega_2 \cap \partial\Omega_3$), которая считается плоской. Толщина газовой прослойки не меняется.

В численных экспериментах, при решении поставленной задачи в расчетной области, изображенной на рис. 1, а, используются следующие физические свойства веществ [10–15]. Они приняты постоянными. Для расплава кремния: теплопроводность $\lambda = 42,9$ Дж/(м·с·К); плотность $\rho = 2550$ кг/м³; теплоемкость $C_p = 1099,95$ Дж/(кг·К); коэффициент объемного расширения $\beta = 6,68 \cdot 10^{-5}$ 1/К; кинематическая вязкость $\nu = 3,48 \cdot 10^{-6}$ м²/с; температуропроводность $a = 1,53 \cdot 10^{-5}$ м²/с; коэффициент поверхностного натяжения $\sigma = 0,74$ Н/м, $\partial\sigma/\partial T = -1,0 \cdot 10^{-4}$ Н/(м·К); теплота кристаллизации $L = 1,1053152 \cdot 10^6$ Дж/кг. Для твердого кремния: теплопроводность $\lambda = 30,15$ Дж/(м·с·К), плотность $\rho = 2550$ кг/м³, теплоемкость $C_p = 714$ Дж/(кг·К), температуропроводность $a = 1,656 \cdot 10^{-5}$ м²/с. Для материала тигля (графит МПГ-1–6): теплопроводность $\lambda = 95$ Дж/(м·с·К), плотность $\rho = 1820$ кг/м³, теплоемкость $C_p = 710$ Дж/(кг·К). Для газовой прослойки (аргон): теплопроводность $\lambda = 0,055$ Дж/(м·с·К), плотность $\rho = 1,5711$ кг/м³, теплоемкость $C_p = 521,8428$ Дж/(кг·К), температуропроводность $a = 6,7084 \cdot 10^{-5}$ м²/с.

Таким образом, вначале решаем задачу расчета нестационарного осесимметричного распределения температуры в режиме теплопроводности в Ω :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} T) = f, \quad (1)$$

где
$$-\operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} T) = -\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right],$$

$$T|_{S_1} = T_g, \quad S_1 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_6, \quad (2)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{S_2} - \theta = 0, \quad S_2 = \Gamma_4 \cup \Gamma_5 \quad (3)$$

и начальное условие

$$T|_{t=t_0} = T_0. \quad (4)$$

В случае учета конвективного переноса тепла в расплаве, в цилиндрической системе координат имеем сопряженную систему уравнений в приближении Обербека–Буссинеска в переменных вихря скорости, функции тока и температуры:

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial(r\psi)}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial(r\psi)}{\partial r}, \quad \omega = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}, \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \vec{U} \equiv 0, \quad (6)$$

в Ω_3 :

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} + u_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + v_z \frac{\partial \omega}{\partial z} - \frac{u_r \omega}{r} = \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} - \frac{\omega}{r^2} \right) - g\beta_T \frac{\partial T}{\partial r}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\psi}{r^2} = \omega, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = a \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \end{cases} \quad (7)$$

в Ω_i

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_i \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad i = 1, 2, 4. \quad (8)$$

В качестве масштабов выберем следующие величины: для времени — R_c/U_0 , для температуры — $\Delta T = T_{\max} - T_{\min}$, температура расплава в начале процесса $T_{\max} = 1723,16$ К и минимальная температура, до которой охлаждается дно тигля $T_{\min} = 1223,16$ К, единица длины — R_c , скорости — $U_0 = \sqrt{\beta \cdot \Delta T \cdot g \cdot R_c}$, тогда:

$$t = (R_c/U_0)t', \quad \omega = (U_0 \omega' / R_c), \quad \psi = U_0 R_c \psi', \quad T' = (T - T_{\min}) / (T_{\max} - T_{\min}).$$

В итоге безразмерная система уравнений примет вид в Ω_3 :

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} + u_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + v_z \frac{\partial \omega}{\partial z} - \frac{u_r \omega}{r} = \frac{1}{\sqrt{Gr}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} - \frac{\omega}{r^2} \right) - \frac{\partial T}{\partial r}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\psi}{r^2} = \omega, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{Pr \sqrt{Gr}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \end{cases} \quad (9)$$

в Ω_i

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \hat{a}_i \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad i = 1, 2, 4, \quad (10)$$

где нормированный коэффициент $\hat{a}_i = a_i / R_c U_0$, $i = 1, 2, 4$. В дальнейшем будем считать все переменные для уравнений (9), (10) безразмерными и для удобства их обозначение штрихом уберем.

Введем обозначения границы, разделяющей подобласти расчетной области: $\Gamma_{ij} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$, $\Omega_i, \Omega_j \subset \Omega$, $i, j = 1, 4$. Отметим, что Γ_{23} — свободная граница, граница раздела расплава кремния и газа; Γ_{34} — внутренняя свободная граница, разделяющая расплав и кристалл, ее положение заранее неизвестно, и в методах сквозного счета она явно не выделяется.

В системе координат, связанной с тиглем, процесс опускания тигля с расплавом из горячей зоны в холодную заменяется изменением температуры внешней поверхности тигля. Эффект опускания достигается за счет сопряжения участков с постоянной температурой и с линейным распределением температуры на боковой стенке тигля Γ_2 . В режиме “с изломом профиля температуры” в верхней части боковой стенки Γ_2 температура постоянная (стенка перегрета относительно температуры кристаллизации), а в нижней части от холодного дна вверх растет протяженность области с линейным распределением температуры. То есть на боковой стенке от дна вверх поднимается со скоростью, соответствующей скорости опускания тигля, точка излома профиля температуры. Соответствующие профили температуры показаны на рис. 3. Температура на дне тигля, на границе Γ_1 , постепенно падает с течением времени $T(t)|_{\Gamma_1} = 1723,16 - \hat{\kappa} \cdot t$, где $\hat{\kappa}$ — коэффициент изменения температуры, определяемый скоростью опускания тигля и заданным градиентом температуры, t — текущий момент времени.

На верхнем торце штока Γ_6 (см. рис. 1) поддерживается постоянная температура $T = \hat{T}$. На оси симметрии ставится условие симметрии $\frac{\partial T}{\partial r}|_{r=0} = 0$. На внешних границах Γ_4 и Γ_5 ставится условие теплоизоляции $\frac{\partial T}{\partial r}|_{\Gamma_4} = \frac{\partial T}{\partial z}|_{\Gamma_5} = 0$. На межобластных границах Γ_{14} , Γ_{13} , Γ_{12} соблюдаются условия идеального теплового контакта:

$$\left\{ T|_{\Gamma_{14}^-} = T|_{\Gamma_{14}^+}, \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial n}|_{\Gamma_{14}^-} = \lambda_4 \frac{\partial T}{\partial n}|_{\Gamma_{14}^+} \right\}, \left\{ T|_{\Gamma_{13}^-} = T|_{\Gamma_{13}^+}, \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial n}|_{\Gamma_{13}^-} = \lambda_3 \frac{\partial T}{\partial n}|_{\Gamma_{13}^+} \right\}, \left\{ T|_{\Gamma_{12}^-} = T|_{\Gamma_{12}^+}, \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial n}|_{\Gamma_{12}^-} = \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial n}|_{\Gamma_{12}^+} \right\}.$$

На свободной границе Γ_{23} также выполняется условие идеального теплового контакта:

$$\begin{cases} T|_{\Gamma_{23}^-} = T|_{\Gamma_{23}^+} \\ \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial n}|_{\Gamma_{23}^-} = \lambda_3 \frac{\partial T}{\partial n}|_{\Gamma_{23}^+} \end{cases}.$$

На границе Γ_{34} задаем условие непрерывности температуры и теплового потока (условие Стефана):

$$T(P)|_{\Gamma_{34}^-} = T(P)|_{\Gamma_{34}^+}, \quad (11)$$

$$-\lambda_s \frac{\partial T(P)}{\partial n}|_{\Gamma_{34}^-} = -\lambda_l \frac{\partial T(P)}{\partial n}|_{\Gamma_{34}^+} + \rho L \xi(P), \quad P \in \Gamma_{34}, \quad (12)$$

где Γ_{34} — граница раздела фаз, $\xi(P)$ — скорость перемещения точки P фронта кристаллизации, L — скрытая теплота плавления. В условии Стефана не учитывается изменение плотности при фазовых переходах первого рода, поэтому плотность $\rho = \rho_3 = \rho_4$.

Рассматривается модель, в которой тепловая конвекция присутствует только в подобласти Ω_3 . Считаем, что из-за большой разницы в значениях вязкости газ не оказывает динамического воздействия на поле скорости в расплаве. И для простоты считаем, что в газе всегда перенос тепла происходит в режиме теплопроводности. На границах Γ_{13} , Γ_{34} для компонент скорости ставятся условия непротекания и прилипания $\psi = 0$, $\partial\psi/\partial n = 0$. На оси симметрии $\omega = 0$, $\psi = 0$. Свободная граница Γ_{23} считается плоской фиксированной поверхностью жидкости, коэффициент поверхностного натяжения которой зависит от температуры T : $\sigma = \sigma_0(1 - \beta_{\sigma T} \Delta T)$. При наличии на поверхности раздела жидкость–газ неоднородного распределения температуры, возникают конвективные течения, вызванные градиентом сил поверхностного натяжения: $\partial\sigma/\partial r = (-\partial\sigma/\partial T)\partial T/\partial r = \mu(\partial u/\partial z)$.

И в условиях нормальной силы тяжести эти течения проявляются на фоне интенсивной гравитационной конвекции [7]. В установках для получения кристаллов конвекция этого типа оказывает заметное влияние на процессы теплообмена и, вследствие этого, на качество кристаллов. В безразмерной форме на свободной поверхности граничные условия для скорости приобретают вид [6]: $\psi = 0$,

$$\omega = \frac{Ma}{\text{Re Pr}} \frac{\partial T}{\partial r}, \quad \text{где } Ma = \frac{\Delta T R_c}{\alpha \nu \rho} \left(-\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) \text{ — число Марангони, } \text{Re} = U_0 R_c / \nu \text{ — число Рейнольдса. Также имеем начальные условия:}$$

$$T|_{t=t_0} = T_0, \quad \omega|_{t=t_0} = 0, \quad \psi|_{t=t_0} = 0. \quad (13)$$

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Поставленную задачу будем решать методом конечных элементов [6]. Выпишем соответствующую вариационную постановку для системы (9)–(10). Будем искать решение задачи в слабой форме (метод Галёркина). Пусть $T \in H^1(\Omega)$, $\omega \in H^1(\Omega)$, $\psi \in H^1(\Omega)$, где гильбертово пространство функций

$$H^1(\Omega) = \{v \in L_2(\Omega), \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 d\Omega < \infty\} \quad (14)$$

содержит в качестве одного из своих элементов решение T поставленной краевой задачи, где $L_2(\Omega) : \|x\| \left[\int_{\Omega} |x(t)|^2 d\Omega \right]^{1/2}$, а скалярное произведение задано как $(u, v) = \int_{\Omega} uv d\Omega$. Тогда $\forall v \in H^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} v d\Omega + \int_{\Omega} \left[u_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + v_z \frac{\partial \omega}{\partial z} - \frac{u_r \omega}{r} \right] v d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{\sqrt{Gr}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} - \frac{\omega}{r^2} \right) \right] v d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial r} v d\Omega, \\ & \int_{\Omega} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\varphi}{r^2} \right] v d\Omega = \int_{\Omega} \omega v d\Omega, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial t} v d\Omega + \int_{\Omega} \left[u_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right] v d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{\text{Pr} \sqrt{Gr}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \right] v d\Omega. \end{aligned}$$

Если T, v, λ — некоторые функции, определенные в области Ω , λ — ограниченная на Ω функция, то по теореме Остроградского–Гаусса:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} v d\Omega + \int_{\Omega} \left[u_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + v_z \frac{\partial \omega}{\partial z} - \frac{u_r \omega}{r} \right] v d\Omega = \\ & = - \int_{\Omega} \left[\frac{1}{\sqrt{Gr}} \left(\text{grad} \omega \text{grad} v - \frac{\omega}{r^2} v \right) \right] d\Omega + \frac{1}{\sqrt{Gr}} \int_{s_2} \frac{\partial \omega}{\partial n} v d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial r} v d\Omega, \\ & - \int_{\omega} \text{grad} \varphi \text{grad} v d\Omega + \int_{s_2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} v d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\varphi}{r^2} v d\Omega = \int_{\Omega} \omega v d\Omega, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial t} v d\Omega + \int_{\Omega} \left[u_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right] v d\Omega = \\ & = - \frac{1}{\text{Pr} \sqrt{Gr}} \int_{\Omega} \text{grad} T \text{grad} v \cdot v d\Omega + \frac{1}{\text{Pr} \sqrt{Gr}} \int_{s_2} \frac{\partial T}{\partial n} v d\Omega. \end{aligned}$$

Учитывая (3), имеем:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} v d\Omega + \int_{\Omega} \left[u_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + v_z \frac{\partial \omega}{\partial z} - \frac{u_r \omega}{r} \right] v d\Omega =$$

$$\begin{aligned}
&= -\int_{\Omega} \left[\frac{1}{\sqrt{Gr}} \left(\text{grad} \omega \text{grad} v - \frac{\omega}{r^2} v \right) \right] d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial r} v d\Omega, \\
&\quad - \int_{\Omega} \text{grad} \phi \text{grad} v d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\Psi}{r^2} v d\Omega = \int_{\Omega} \omega v d\Omega, \\
&\quad \int_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial t} v d\Omega + \int_{\Omega} \left[u_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right] v d\Omega = \\
&= -\frac{1}{\text{Pr} \sqrt{Gr}} \int_{\Omega} \text{grad} T \text{grad} v \cdot v d\Omega + \frac{1}{\text{Pr} \sqrt{Gr}} \int_{S_2} \theta v d\Omega. \tag{17}
\end{aligned}$$

Проведем аппроксимацию по времени. Будем использовать неявную трехслойную схему:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \eta_0(t) T^j + \eta_1(t) T^{j-1} + \eta_2(t) T^{j-2}, \tag{18}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \eta_0(t) \omega^j + \eta_1(t) \omega^{j-1} + \eta_2(t) \omega^{j-2}, \tag{19}$$

где функции T^{j-2} , ω^{j-2} , T^{j-1} , ω^{j-1} , T^j , ω^j , являются значениями искомых функций T и ω в моменты времени $t = t_{j-2}$, $t = t_{j-1}$, $t = t_j$ соответственно.

Подставляя (18) и (19) в (17), получаем:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \eta_0 \omega^j v d\Omega + \int_{\Omega} \left[\frac{1}{\sqrt{Gr}} \left(\text{grad} \omega \text{grad} v - \frac{\omega}{r^2} v \right) \right] d\Omega = \\
&= \int_{\Omega} \left[u_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + v_z \frac{\partial \omega}{\partial z} - \frac{u_r \omega}{r} \right] v d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial r} v d\Omega - \int_{\Omega} \eta_1 \omega^{j-1} v d\Omega - \int_{\Omega} \eta_2 \omega^{j-2} v d\Omega, \\
&\quad - \int_{\Omega} \text{grad} \phi \text{grad} v \cdot v d\Omega - \int_{\Omega} \omega v d\Omega = \int_{\Omega} \omega v d\Omega, \tag{20} \\
&\int_{\Omega} \eta_0 T^j v d\Omega + \frac{1}{\text{Pr} \sqrt{Gr}} \int_{\Omega} \text{grad} T \text{grad} v \cdot v d\Omega = - \int_{\Omega} \left[u_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right] v d\Omega + \\
&= -\frac{1}{\text{Pr} \sqrt{Gr}} \int_{S_2} \theta v d\Omega - \int_{\Omega} \eta_1 T^{j-1} v d\Omega - \int_{\Omega} \eta_2 T^{j-2} v d\Omega.
\end{aligned}$$

Проведем конечномерную аппроксимацию задачи. Перейдем к конечномерному подпространству V^h пространства H^1 . Базисные функции V^h — $\{\Psi_n, \dots, \Psi_n\}$. Для

$T \in V^h$, $\omega \in V^h$, $\phi \in V^h$ $T = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Psi_i$, $\omega = \sum_{i=1}^n \beta_i \Psi_i$, $\phi = \sum_{i=1}^n \gamma_i \Psi_i$, и положим $v(x) =$

$= \Psi_j$. В качестве конечных элементов Ω^l возьмем треугольники. Пространственная сетка структурированная, однородная, равномерная. Ее шаблон показан на рис. 2. Шаг разбиения $\Delta h = \Delta h_r = \Delta h_z = 0,025$. Общее количество узлов в расчетной области равно 2745. Такой тип сетки облегчает исследование процесса, взятие пространственных производных, расчет тепловых потоков. Тем не менее, в дальнейшем предполагается перейти к расчетам на неструктурированных треугольных

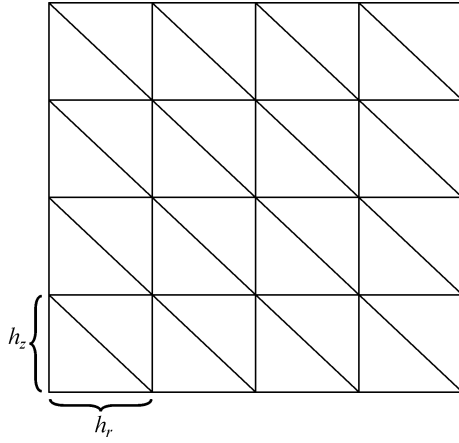


Рис. 2. Шаблон расчетной сетки.

сетках с локальными сгущениями в подобластях большого градиента. На конечном элементе Ω^l базисные функции:

$$\begin{cases} \hat{\Psi}_1(r, z) = L_1, \\ \hat{\Psi}_2(r, z) = L_2, \\ \hat{\Psi}_3(r, z) = L_3, \end{cases} \quad (21)$$

$$\text{где } \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \hat{r}_1 & \hat{r}_2 & \hat{r}_3 \\ \hat{z}_1 & \hat{z}_2 & \hat{z}_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ r \\ z \end{pmatrix}, \quad \hat{r}_i, \hat{z}_i —$$

вершины Ω^l или $L_i = \alpha_0^i + \alpha_1^i r + \alpha_2^i z$, $i = \overline{1,3}$ и

$$\begin{pmatrix} \alpha_0^1 & \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_0^2 & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \\ \alpha_0^3 & \alpha_1^3 & \alpha_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \hat{r}_1 & \hat{r}_2 & \hat{r}_3 \\ \hat{z}_1 & \hat{z}_2 & \hat{z}_3 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Локальные матрицы жесткости, массы и вектор правой части имеют вид:

$$\hat{\beta}^l = \frac{\bar{\lambda}}{6} |D| [\hat{r}_1 + \hat{r}_2 + \hat{r}_3] \begin{pmatrix} [\alpha_1^1 \alpha_1^1 + \alpha_2^1 \alpha_2^1] & [\alpha_1^1 \alpha_1^2 + \alpha_2^1 \alpha_2^2] & [\alpha_1^1 \alpha_1^3 + \alpha_2^1 \alpha_2^3] \\ [\alpha_1^2 \alpha_1^1 + \alpha_2^2 \alpha_2^1] & [\alpha_1^2 \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \alpha_2^2] & [\alpha_1^2 \alpha_1^3 + \alpha_2^2 \alpha_2^3] \\ [\alpha_1^3 \alpha_1^1 + \alpha_2^3 \alpha_2^1] & [\alpha_1^3 \alpha_1^2 + \alpha_2^3 \alpha_2^2] & [\alpha_1^3 \alpha_1^3 + \alpha_2^3 \alpha_2^3] \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$\hat{C}^l = \frac{|D|}{120} \begin{pmatrix} 6\hat{r}_1 + 2\hat{r}_2 + 2\hat{r}_3 & 2\hat{r}_1 + 2\hat{r}_2 + \hat{r}_3 & 2\hat{r}_1 + \hat{r}_2 + 2\hat{r}_3 \\ 2\hat{r}_1 + 2\hat{r}_2 + \hat{r}_3 & 2\hat{r}_1 + 6\hat{r}_2 + 2\hat{r}_3 & \hat{r}_1 + 2\hat{r}_2 + 2\hat{r}_3 \\ \hat{r}_1 + 2\hat{r}_2 + 2\hat{r}_3 & \hat{r}_1 + 2\hat{r}_2 + 2\hat{r}_3 & 2\hat{r}_1 + 2\hat{r}_2 + 6\hat{r}_3 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$\hat{C}^l = \frac{|D|}{120} \begin{pmatrix} [6\hat{r}_1 + 2\hat{r}_2 + 2\hat{r}_3] \hat{f}_1 & [2\hat{r}_1 + 2\hat{r}_2 + \hat{r}_3] \hat{f}_2 & [2\hat{r}_1 + \hat{r}_2 + 2\hat{r}_3] \hat{f}_3 \\ [2\hat{r}_1 + 2\hat{r}_2 + \hat{r}_3] \hat{f}_1 & [2\hat{r}_1 + 6\hat{r}_2 + 2\hat{r}_3] \hat{f}_2 & [\hat{r}_1 + 2\hat{r}_2 + 2\hat{r}_3] \hat{f}_3 \\ [\hat{r}_1 + 2\hat{r}_2 + 2\hat{r}_3] \hat{f}_1 & [\hat{r}_1 + 2\hat{r}_2 + 2\hat{r}_3] \hat{f}_2 & [2\hat{r}_1 + 2\hat{r}_2 + 6\hat{r}_3] \hat{f}_3 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

Вклады в локальную матрицу от конвективных членов вычисляются по следующим формулам:

$$\hat{K}_{i,j}^l = \int_{\Omega^l} \left\{ \sum_{k=1}^3 u_{rk} \hat{\Psi}_k^l \hat{\Psi}_j^l \frac{\partial \hat{\Psi}_i^l}{\partial r} \right\} dr dz + \int_{\Omega^l} \left\{ \sum_{k=1}^3 v_{zk} \hat{\Psi}_k^l \hat{\Psi}_j^l \frac{\partial \hat{\Psi}_i^l}{\partial z} \right\} dr dz, \quad (25)$$

$$\hat{P}_{i,j}^l = \int_{\Omega^l} \sum_{k=1}^3 u_{rk} \hat{\Psi}_k^l \hat{\Psi}_j^l \hat{\Psi}_i^l \frac{1}{r_j} r dr dz, \quad (26)$$

$$\hat{Q}_i^l = \int_{\Omega^l} \hat{\Psi}_i^l \hat{\Psi}_j^l \frac{1}{r_j^2} r dr dz. \quad (27)$$

Используя неявную трехслойную схему на интервале (t_{j-2}, t_j) , учитывая (20), (25)–(27), получаем СЛАУ следующего вида:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{dt_{02} + dt_{01}}{dt_{02}dt_{01}} \hat{C} + \hat{B} \right) \omega^j + \hat{K} \omega^j - \hat{P} \omega^j - \hat{Q} \omega^j = \\ & = \hat{G}^j + \frac{dt_{02}}{dt_{12}dt_{01}} \hat{C} \omega^{j-1} - \frac{dt_{01}}{dt_{12}dt_{02}} \hat{C} \omega^{j-2}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\hat{B} \varphi^j - Q \varphi^j = \hat{G}^j, \quad (29)$$

$$\left(\frac{dt_{02} + dt_{01}}{dt_{02}dt_{01}} \hat{C} + \hat{B} \right) T^j + \hat{K} T^j = \hat{G}^j + \frac{dt_{02}}{dt_{12}dt_{01}} \hat{C} T^{j-1} - \frac{dt_{01}}{dt_{12}dt_{02}} \hat{C} T^{j-2}, \quad (30)$$

где $dt_{02} = t^j - t^{j-2}$, $dt_{12} = t^{j-1} - t^{j-2}$, $dt_{01} = t^j - t^{j-1}$.

На первом шаге по времени для нахождения T^1 , ω^1 будем использовать двух-слойную неявную схему (T^0 , ω^0 известны из начального условия (13)).

$$\left(\frac{1}{\Delta t} \hat{C} + \hat{B} \right) \omega^j + \hat{K} \omega^j - \hat{P} \omega^j - \hat{Q} \omega^j = \hat{G}^j + \frac{1}{\Delta t} C \omega^{j-1}, \quad (31)$$

$$\left(\frac{1}{\Delta t} \hat{C} + \hat{B} \right) T^j + \hat{K} T^j = \hat{G}^j + \frac{1}{\Delta t} \hat{C} T^{j-1}, \quad (32)$$

где $\Delta t = t^j - t^{j-1}$.

Для учета теплоты фазового перехода будем использовать метод, изложенный в [8], основанный на корректировке удельной энтальпии в каждом узле сетки в области кристаллизации.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Сравниваются результаты расчетов полей температуры в режимах нестационарной теплопроводности и при тепловой гравитационно-капиллярной конвекции в зависимости от времени. Расчеты выполнены для фиксированной геометрии, соответствующей относительной высоте расплава $H_p/R_T = 1$. На рис. 3–9 представлены результаты расчетов для режима со скоростью перемещения тигля из горячей зоны в холодную $V_T = 2,8126$ [см/ч]. Падение температуры на дне тигля происходит по закону $T(t) = 1723,16 - \hat{\kappa} \cdot t$, где $\hat{\kappa} = 0,1$ (то есть остывание со скоростью 0,1 К за размерный шаг). В безразмерных переменных имеем $T(t) = 1 - \kappa \cdot t$, где $\kappa = 0,0002$. Распределения температуры на внешней поверхности боковой стенки тигля в различные моменты времени показаны на рис. 3, *a*. Соответствующие им распределения на внутренней стенке тигля при $r = 1,0$ в те же моменты времени представлены на рис. 3, *b* для режима теплопроводности и на рис. 3, *c* для конвективного режима. Здесь *I* — момент времени через 2,1 мин с начала процесса (100 шаг по времени), 2 — через 10,67 (500 шаг) и 3 — через 21,34 мин (1000 шаг). В начале процесса система была изотермической. Использован равномерный шаг по времени $\Delta t = 0,5$, что соответствует размерному интервалу 1,28 с. Распределения температуры на внутренней поверхности стенки являются результатом сопряженного теплообмена между стенкой и расплавом.

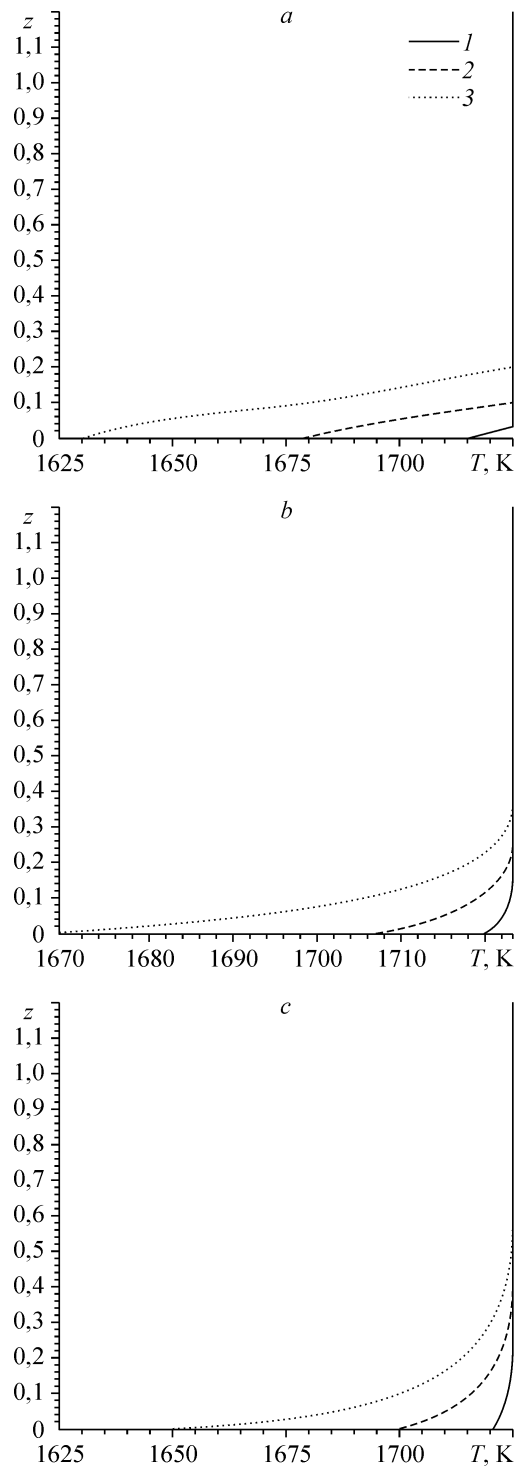


Рис. 3. Распределение температуры на внутренней поверхности стенки тигля.

Режим нестационарной теплопроводности можно представить как гипотетический в состоянии невесомости. Анализ распределений температуры в этом режиме позволяет, в частности, понять, почему система абсолютно неустойчива при включении силы тяжести и учете сил плавучести и термокапиллярного эффекта. Перетечки тепла в осевом направлении сильно отличаются вблизи оси симметрии из расплава через дно тигля и через боковые стенки тигля. Остывание области с расплавом в диффузионном режиме происходит неравномерно (рис. 4, *a, b*, 5, *a, b*), из-за отличия коэффициентов теплопроводности графита и кремния более чем в два раза. Поскольку большой участок боковой стенки поддерживается при начальной высокой температуре, тепло из верхней зоны откачивается по графитовой стенке к дну. Вследствие чего расплав в пристеночной области перегрет. В то же время кремний эффективно охлаждается в приосевой области за счет отвода тепла через дно тигля. Поэтому нарастает корка затвердевшего вещества, выпуклая в расплав в приосевой области (рис. 6, *a*). На рис. 4, 5 представлены поля изотерм во всей расчетной области через 10,67 мин (500 шаг по времени) и 21,34 мин (1000 шаг) с начала процесса в режиме нестационарной теплопроводности. Поскольку для рассматриваемого класса задач наибольший интерес представляет начало формирования кристалла, то на рис. 5, *a, b* показаны в большем масштабе распределения температуры в стенке тигля и в расплаве в придонной области. Температура на изотермах указана в градусах Кельвина. Фронт кристаллизации определяется изотермой, соответствующей температуре кристаллизации. На рис. 6, *a* показана эволюция формы фронта кристаллизации со временем для теплопроводного режима.

При учете сил плавучести и термокапиллярного эффекта перегретая относительно приосевой области жидкость образует восходящий конвективный поток вдоль боковой стенки тигля. В верхней части области, за счет хорошо известного механизма теплового расслоения неизотермической жидкости в поле тяжести, накапливается слой горячей жидкости [6, 7]. Для сравнения на рис. 4, *c, d* и рис. 5, *c, d* представлены поля изотерм в те же моменты времени с начала процесса, что и в режиме нестационарной теплопроводности.

Соответственно, опускной поток, в данном случае, локализован в центре области, но только до определённого момента времени, зависящего от темпа изменения температуры. Для данного эксперимента опускной поток наблюдается до того шага по времени. Вихрь существует на периферии дна в угловых областях. Дальше по времени, за счет вязкого трения, в приосевой области формируется вихрь с обратной циркуляцией по контуру и меньшей интенсивности. Соответствующие изолинии функции тока показаны на рис. 4, *e, f*. Подъемный поток в центре на оси симметрии. Радиальные градиенты температуры в конвективном режиме резко сглаживаются в сравнении с диффузионным. В конвективном режиме температура вблизи фронта кристаллизации выравнивается за счет притока разогретого относительно дна тигля вещества из верхней зоны тигля. В результате чего радиальные распределения тепловых потоков к дну тигля более однородные. Вследствие этого фронт кристаллизации, соответствующий конвективному режиму, достаточно плоский (рис. 6, *b*). Термокапиллярная конвекция на свободной

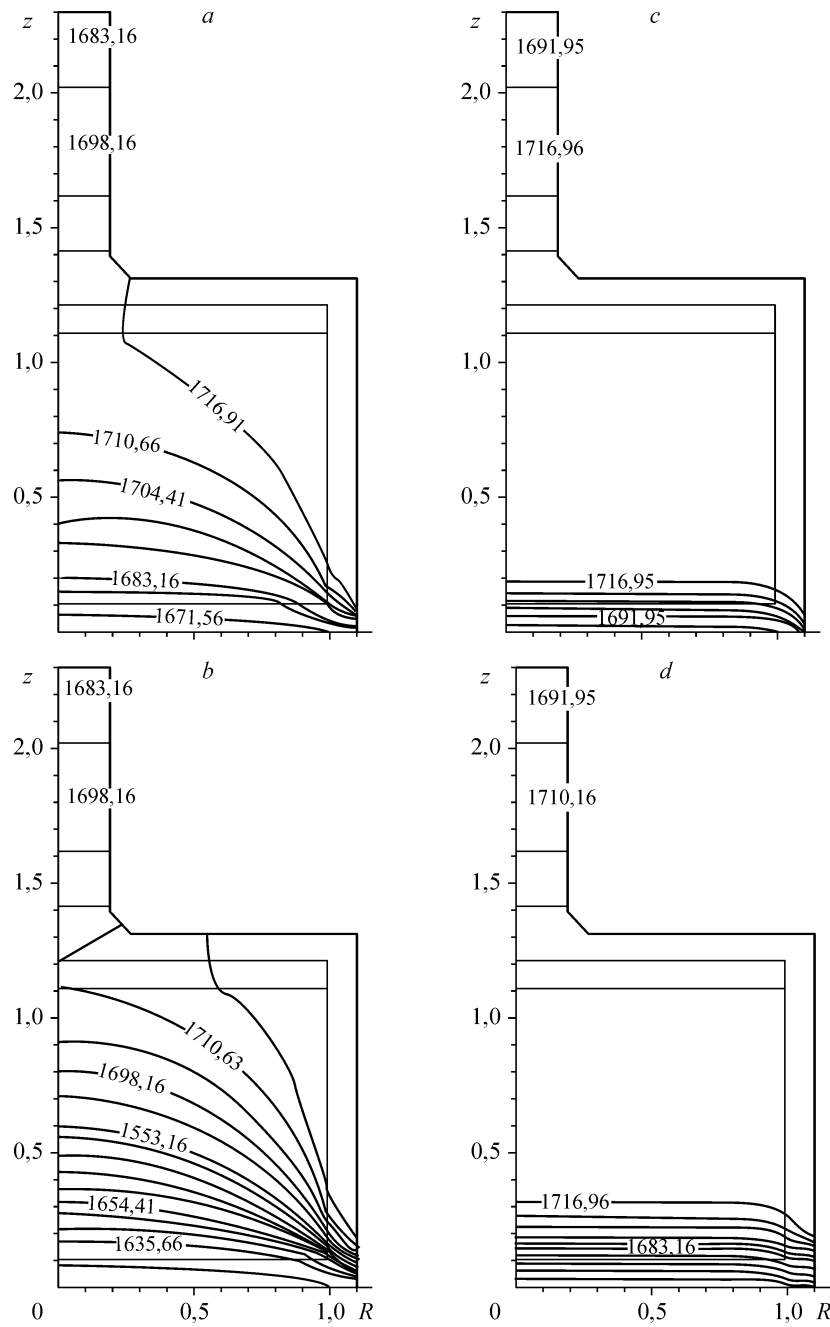
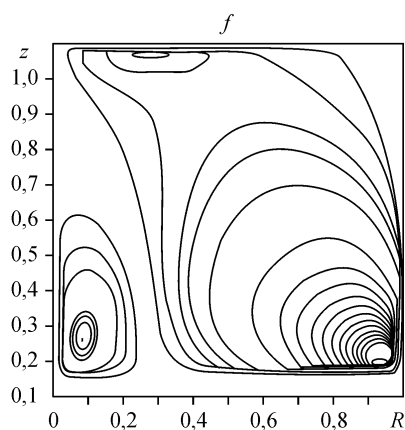
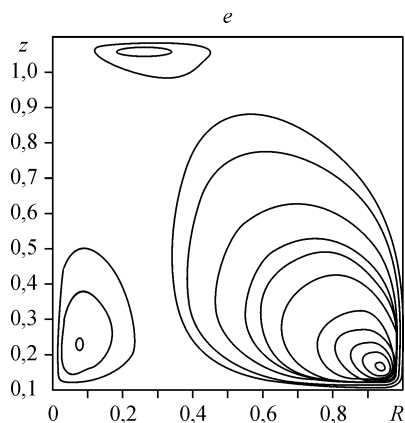


Рис. 4. Поля температуры и функции тока.

границе газ–жидкость в данном случае из-за заметных радиальных градиентов температуры $\partial T/\partial r$ достаточно интенсивная.

Развитие конвективного течения во времени и его интенсивность характеризуются полем скорости. На рис. 7, *a, c, e* показаны профили радиальной компоненты скорости u_r в сечениях $r = 0,25; 0,5$ и $0,75$ через 2,13 мин от начала процесса до 21,34 мин развития процесса. В тех же сечениях на рис. 7, *b, d, f* показаны профили



температуры. На рис. 8, *a*, *c*, *e* показаны профили осевой компоненты скорости v_z в сечениях при $z = 0,85; 0,6; 0,35$ и в те же моменты времени, а на рис. 8, *b*, *d*, *f* — соответствующие профили температуры.

Прирост массы твердого вещества во времени показан на рис. 9 (здесь кривая 1 соответствует режиму теплопроводности, 2 — конвективному режиму). Начало процесса кристаллизации в режиме теплопроводности отмечено на четырехсотом шаге (т. е. через 512 с или 8,53 мин от начала процесса охлаждения дна), а в конвективном режиме на восьмьсот пятидесятом шаге (т. е. только через 1088 с или 18,13 мин от начала охлаждения дна).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведены исследования процесса роста кристаллов мультикремния методом Бриджмена. Выполнен сравнительный анализ процессов кристаллизации в режиме нестационарной теплопроводности и в условиях гравитационно-капиллярной конвекции. Показано, что возникающие в режиме нестационарной теплопроводности градиенты температур вызывают появление конвективных течений в тигле, которые, в свою очередь, в сравнении с режимом теплопроводности, оказывают существенное влияние на перераспределение тепла в системе тигель–расплав. Показано, что конвекция существенно влияет на форму фронта кристаллизации. Фронт сильно выполаживается в сравнении с режимом теплопроводности. Начало процесса кристаллизации в конвективном режиме сильно затягивается. При этом темпы кристаллизации в конвективном режиме $0,086$ г/с, а в теплопроводном — $0,176$ г/с. Расчеты темпов кристаллизации проведены для характерного размера $R_r = 5$ см в интервале времени от девятисотого до тысячного шага (с 19,2 до 21,34 мин).

Таким образом, предположение разработчиков технологии, что за счет охлаждения контейнера с расплавом со дна можно подавить свободную конвекцию и обеспечить условия роста кристалла в диффузионном режиме с плоским фронтом кристаллизации, не обоснованно.

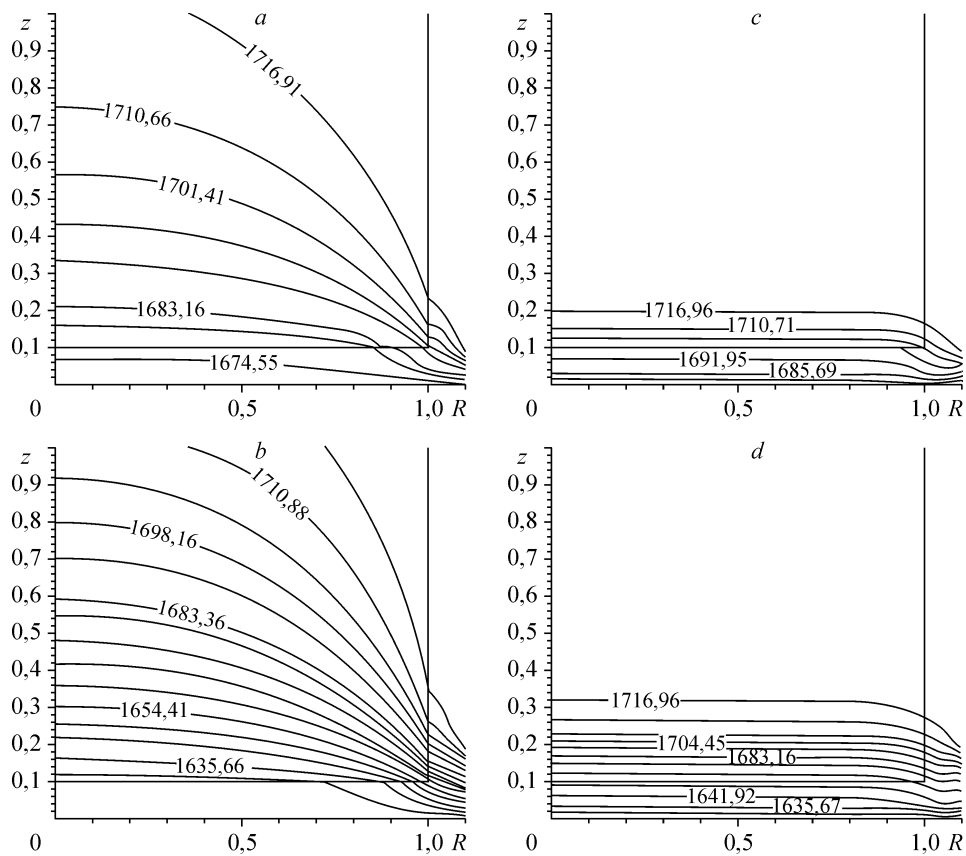


Рис. 5. Поля температуры в придонной области.

Сравнительный анализ процессов кристаллизации в режиме нестационарной теплопроводности и в условиях гравитационно-капиллярной конвекции показал, что конвективные режимы менее производительны, но более технологичны, поскольку способствуют формированию более плоского фронта кристаллизации.

Показано, что с помощью численного моделирования можно резко ограничить диапазон поиска параметров, определяющих условия формирования плоского фронта кристаллизации и роста моноблока.

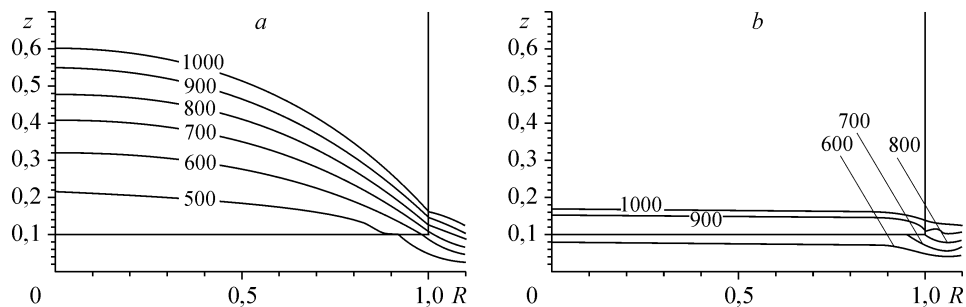


Рис. 6. Эволюция формы фронта кристаллизации для режимов конвективного (а) и теплопроводности (б) (положения фронта соответствуют указанным шагам по времени).

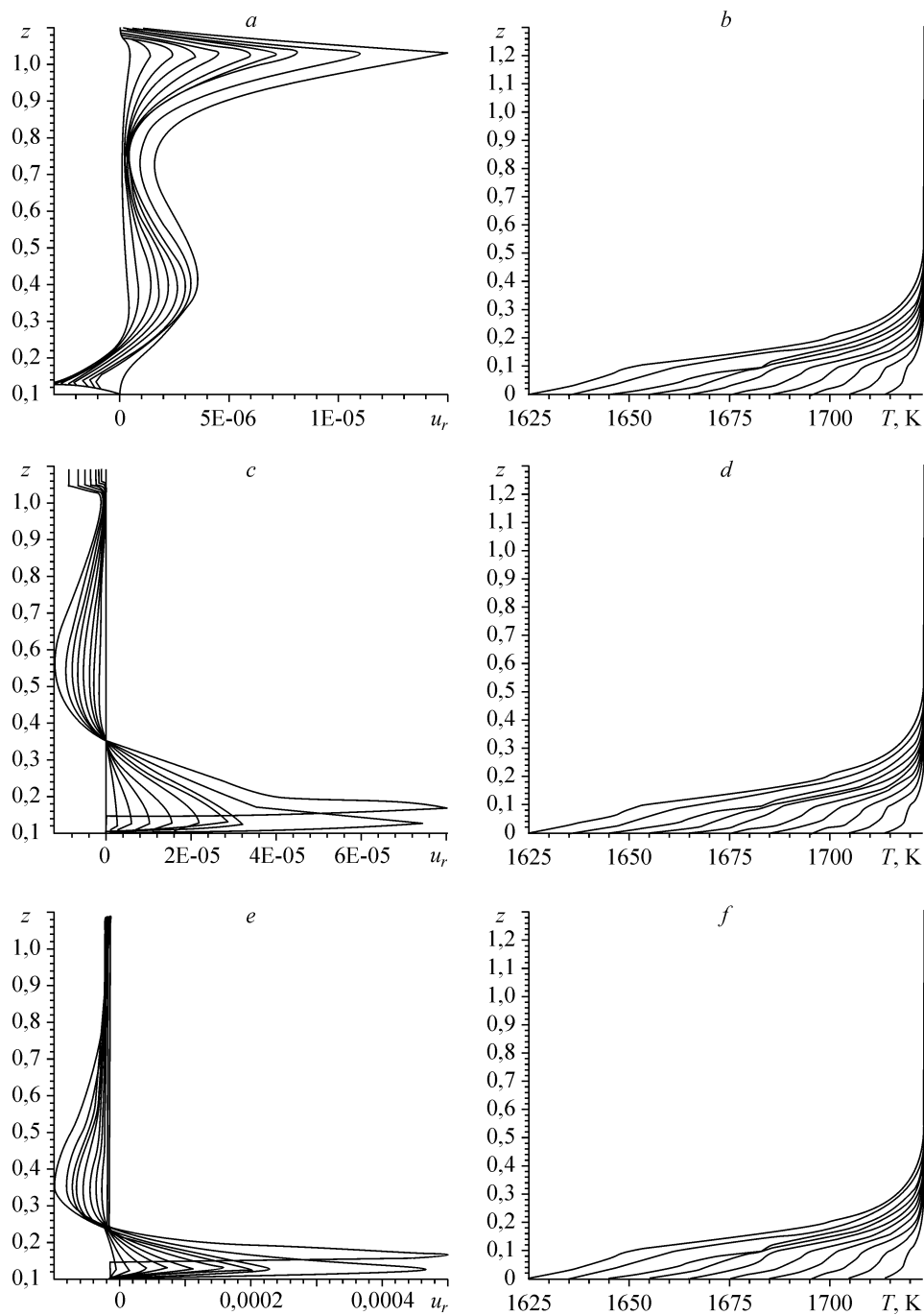


Рис. 7. Эволюция профилей радиальной составляющей скорости u_r и соответствующих профилей температуры при $r = 0,25$ (*a, b*), $0,5$ (*c, d*) и $0,75$ (*e, f*) в различные моменты времени ($t_0 = 2,13$ мин, $t_0 = 21,34$ мин, с шагом $\Delta t = 128$, с = $2,13$ мин) от начала процесса.

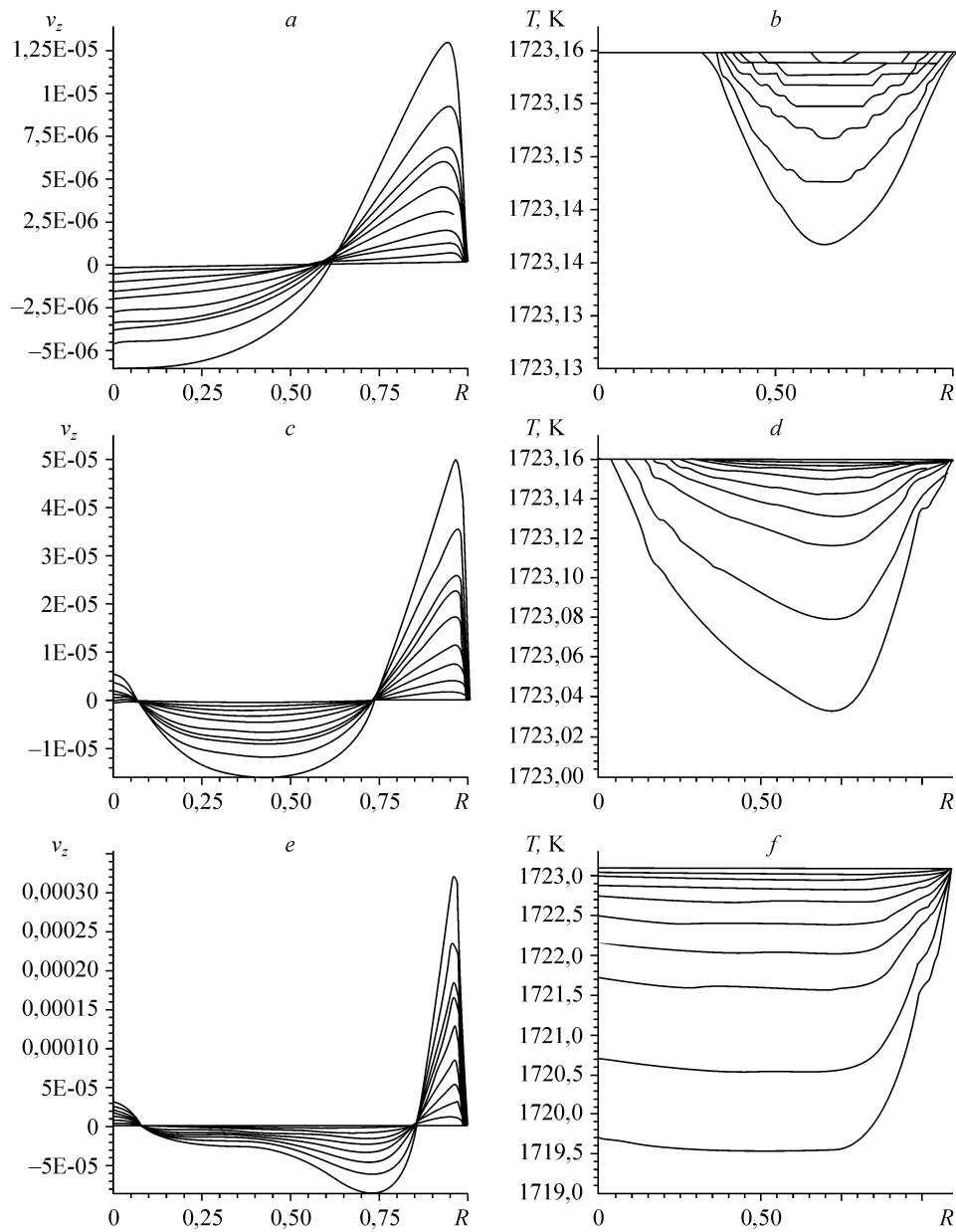


Рис. 8. Эволюция профилей осевой составляющей скорости и соответствующих профилей температуры при $z = 0,85$ (*a, b*), $0,6$ (*c, d*) и $0,35$ (*e, f*) в различные моменты времени ($t_0 = 2,13$ мин, $t_0 = 21,34$ мин, с шагом $\Delta t = 128$, $s = 2,13$ мин) от начала процесса.

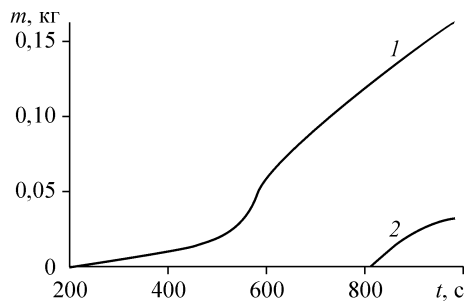


Рис. 9. Нарастание массы затвердевшего вещества во времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ванке В.А., Лопухин В.М., Саввин В.Л. Проблемы солнечных космических электростанций // УФН. — 1977. — Т. 123, вып. 4. — С. 633–655.
2. Фаренбух А., Бьюб Р. Солнечные элементы: Теория и эксперимент. — М.: Энергоатомиздат, 1987.
3. Стребков Д.С., Кошкин Н.Л. О развитии фотоэлектрической энергетики в России // Теплоэнергетика. — 1996. — № 5. — С. 23–26.
4. Васильева И.Е., Елисеев И.А., Еремин В.П., Золотайко А.В., Красин Б.А., Непомнящих А.И., Попов С.И., Сеницкий В.В. Мультикристаллический кремний для солнечной энергетики. // Изв.ВУЗов. Материалы электронной техники. — 2002. — Т. 4, № 2. — С. 16–24.
5. Красин Б.А., Непомнящих А.И., Токарев А.С., Шамирзаев Т.С., Пресняков Р.В., Максиков А.П. Структура и электрофизические свойства мультикристаллического кремния // Изв.ВУЗов. Материалы электронной техники. — 2005. — Т. 4, № 1. — С. 28–34.
6. Полежаев В.И., Бунз А.В., Везуб Н.А. и др. Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье–Стокса. — М.: Наука, 1987.
7. Berdnikov V.S., Vinokourov V.A., Vinokourov V.V., Garonov V.A. Mixed convection flow of the melt and heat transfer during Czochralski crystal growth // Proceedings of the Fifth International Conference “Single crystal growth and heat & mass transfer”. — Obninsk-2003, 22-26 September. — Vol. 1. — P. 43–67.
8. Бердников В.С., Филиппова М.В., Непомнящих А.И., Красин Б.А. Гидродинамика расплава и теплообмен при получении мультикремния методом Бриджмена // Сб. тр. VI Междунар. конф. 25-30 сент. 2005 г. Рост монокристаллов и теплообмен. — Обнинск. — Т. 3. — С. 556–569.
9. Марченко М.П., Фрязинов И.В. Комплекс программ КАРМА 1 решения нестационарных задач выращивания монокристаллов в ампулах // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 1997. — Т. 37, № 8. — С. 988–998.
10. Carl L. Yaws, Larry L. Dickens, Ralph Lutwak, George Hsu. Semiconductor Industry Silicon: Physical and Thermodynamic Properties // Solid State Technol. — 1981. — Vol. 24, No. 1. — P. 87–92.
11. Свойства элементов: Справ. изд. Кн. 1 / Под ред. Дрица М.Е. — М.: Металлургия, 1997. — 432 с.
12. Станкус С.В., Хайрулин Р.А., Тягельский П.В. Термические свойства германия и кремния в конденсированном состоянии // Теплофиз. высоких температур. — 1999. — Т. 37, № 4. — С. 559–564.
13. Mühlbauer A., Erdmann W., Keller W. Electrodynamical convection in silicon floating zones. J. Crystal Growth. — 1983. — Vol. 64. — P. 529–545.
14. Раскатов В.М., Чуенков В.С., Бессонова Н.Ф. и др. Машиностроительные материалы: Краткий справочник. — М.: Машиностроение, 1980. — 512 с.
15. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. — М.: Наука, 1972. — 720 с.

Статья поступила в редакцию 29 сентября 2005 г.