ПМТФ, № 2, 1969

О ФУНКЦИИ РАУСА ТОНКОГО ПЛАЗМЕННОГО ШНУРА

М. Г. Никулин

(Москва)

Один из возможных методов исследования устойчивости плазменного проводника с током, находящегося во внешнем магнитном поле, состоит в том, что такой проводник рассматривается как электромеханическая система с бесконечным числом степеней свободы. Если удается в явном виде найти функцию Лагранжа, описывающую движение проводника вблизи положения равновесия, то затем исследование устойчивости может быть проведено известными способами. В частности, для тонких плазменных шнуров, испытывающих длинноволновые возмущения типа змеек и перетяжек, удается найти функцию Лагранжа при весьма общих предположениях относительно геометрии полей. Это дает возможность исследовать устойчивость плазмы по отношению к наиболее опасным с магнитогидродинамической точки зрения возмущениям в ряде устройств со сложными магнитными полями, где плазма имеет вид тонкого прямого или замкнутого шнура.

Впервые данный метод был применен М. Л. Левиным и М. С. Рабиновичем [1] для исследования предложенной С. М. Осовцом [2] динамической стабилизации плазменного шнура высокочастотным квадрупольным магнитным полем. При помощи развитого в [1] аппарата были затем рассмотрены и некоторые другие варианты квадрупольной динамической стабилизации [3]. В предлагаемой работе данный метод обобщается на случай магнитных полей произвольной геометрии. В п. 1 доказывается теорема, согласно которой идеальная (в смысле отсутствия диссипации) электромеханическая система с замкнутыми токами в квазистационарном приближении описывается функцией Рауса, представляющей собой разность механического лагранжиана системы и магнитной энергии токов в собственном магнитном поле. По отношению к механическим переменным эта функция играет роль обычной функции Лагранжа. В п. 2 в общем виде найдено выражение собственной магнитной энергии тонкого замкнутого плазменного проводника, испытывающего плавные (длинноволновые) возмущения типа змеек и перетяжек [1].

1. Как известно (см., например, [4]), объединение электрических и механических уравнений движения подвижных проводников с токами в общую динамическую форму осуществляется простым сложением механической L_M и электромагнитной L_E функций Лагранжа

$$L = L_M + L_E \tag{1.1}$$

$$L_M = T - U, \qquad L_E = W_m - W_e \tag{1.2}$$

Здесь L — полный лагранжиан, а T, U, W_m и W_e — соответственно кинетическая, потенциальная, магнитная и электрическая энергии системы. В квазистационарном приближении в системе с замкнутыми токами электрической энергией по сравнению с магнитной можно пренебречь [4] и тогда

$$L_E = W_m \tag{1.3}$$

Если подвижный проводник с током находится во внешнем магнитном поле, то его магнитную энергию W_m можно представить в виде

$$W_m = \frac{1}{2c}\int \mathbf{A}\cdot\mathbf{j}\,dV + \frac{1}{c}\int \mathbf{A}^e\cdot\mathbf{j}\,dV \tag{1.4}$$

---

[1] Выражение для механического лагранжиана в случае кругового кольца получено в [1].

Здесь $\mathbf{j}$ — плотность тока в проводнике, $\mathbf{A}$ — вектор-потенциал магнитного поля тока $\mathbf{j}$, $\mathbf{A}^e$ — вектор-потенциал внешнего магнитного поля, а интегрирование ведется по объему проводника. Очевидно, первое слагаемое в (1.4) представляет собой энергию проводника в собственном магнитном поле, второе — его энергию во внешнем поле.

Удобно ввести дискретное описание системы. Будем предполагать, что рассматриваемый объемный проводник обладает счетным множеством «механических» степеней свободы, которым соответствуют обобщенные координаты ξ_m и скорости $\xi^{\boldsymbol{\cdot}}_m$. Плотность тока $\mathbf{j}$ представим в виде ряда по некоторой полной по отношению к допустимым функциям распределения тока системе соленоидальных векторных функций $\mathrm{S}_i\,(\mathbf{r})$

$$\mathbf{j}\,(\mathbf{r},\, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i^{\boldsymbol{\cdot}}\,(t)\, \mathrm{S}_i\,(\mathbf{r}) \tag{1.5}$$

Коэффициенты этого разложения $q_i^{\boldsymbol{\cdot}}$ представляют собой отдельные «ветви» плотности тока. Принимая $q_i^{\boldsymbol{\cdot}}$ за обобщенные скорости, можно рассматривать проводник с током как дискретную динамическую систему со счетным множеством «механических» (ξ_m и $\xi_m^{\boldsymbol{\cdot}}$) и «электрических» ($q_i$ и $q_i^{\boldsymbol{\cdot}}$) координат и скоростей.

Векторный потенциал $\mathbf{A}$ согласно уравнению

$$\mathrm{rot}\,\frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j} \tag{1.6}$$

есть функция обобщенных скоростей $q^{\boldsymbol{\cdot}}$ и геометрических координат $\mathbf{r}$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}\,(\mathbf{r},\, q^{\boldsymbol{\cdot}})$, причем в силу линейности уравнения (1.6)

$$\mathbf{A}\,(\mathbf{r},\, q^{\boldsymbol{\cdot}}) = \frac{1}{c} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{A}_j\,(\mathbf{r})\, q_j^{\boldsymbol{\cdot}}\,(t) \tag{1.7}$$

Введем обобщенные потоки Φ_i соотношением

$$\Phi_i\,(\xi,\, q^{\boldsymbol{\cdot}}) = \int \mathbf{A}\,(\mathbf{r},\, q^{\boldsymbol{\cdot}}) \cdot \mathrm{S}_i\,(\mathbf{r})\, dV = \frac{1}{c} \sum_{j=1}^{\infty} L_{ij}\,(\xi)\, q_j^{\boldsymbol{\cdot}}\,(t) \tag{1.8}$$

Коэффициенты

$$L_{ij}\,(\xi) = \int \mathbf{A}_j\,(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{S}_i\,(\mathbf{r})\, dV$$

по аналогии с линейными проводниками можно назвать обобщенными коэффициентами само- и взаимоиндукции соответствующих ветвей тока $\mathbf{j}$ в разложении (1.5).

Учитывая (1.5), (1.7) и (1.8), преобразуем слагаемые магнитной энергии (1.4)

$$W_{ms} \equiv \frac{1}{2c} \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{j}\, dV = \frac{1}{2c^2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} L_{ij}\,(\xi)\, q_i^{\boldsymbol{\cdot}}\,(t)\, q_j^{\boldsymbol{\cdot}}\,(t) \tag{1.9}$$

$$W_{me} \equiv \frac{1}{c} \int \mathbf{A}^e \cdot \mathbf{j}\, dV = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^{\infty} q_i^{\boldsymbol{\cdot}}\,(t)\, \Phi_i^e\,(t,\, \xi) \tag{1.10}$$

В (1.10) по аналогии с определением (1.8) введены обобщенные потоки внешнего поля

$$\Phi_i^e\,(t,\, \xi) = \int \mathbf{A}^e\,(t,\, \mathbf{r}) \cdot \mathrm{S}_i\,(\mathbf{r})\, dV$$

в которых вместо зависимости от $q^{e\boldsymbol{\cdot}}\,(t)$ явно отмечена зависимость от t

Суммируя (1.9) и (1.10), находим магнитную энергию

$$W_m(t, \xi, q^{\cdot}) = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^{\infty} q_i^{\cdot}(t) \left[\frac{1}{2c} L_{ij}(\xi) q_i^{\cdot}(t) + \Phi_i^e(t, \xi) \right] \qquad (1.11)$$

С учетом (1.1), (1.3) и (1.11) полный лагранжиан системы запишется в виде

$$L(t, \xi, \xi^{\cdot}, q^{\cdot}) = L_M(\xi, \xi^{\cdot}) + \frac{1}{c} \sum_{i=1}^{\infty} q_i^{\cdot} \left[\frac{1}{2c} L_{ij}(\xi) q_j^{\cdot} + \Phi_i^e(t, \xi) \right] \qquad (1.12)$$

Функция L не зависит явно от q_i, т. е. координаты q_i — циклические, и, значит, сохраняются обобщенные импульсы, соответствующие этим координатам

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i^{\cdot}} = \text{const}$$

Поэтому удобно описывать систему при помощи функции Рауса $R = R(t, \xi, \xi^{\cdot}, p)$, определяемой равенством

$$R = L - \sum_{i=1}^{\infty} p_i q_i^{\cdot} \qquad (1.13)$$

в котором правая часть должна быть выражена через переменные Рауса t, ξ, $\xi^{\cdot}$, p. Для позиционных координат ξ_m функция R играет роль функции Лагранжа, а для циклических координат q_i функция $-R$ играет роль функции Гамильтона.

В рассматриваемом случае обобщенный импульс

$$p_i = \frac{1}{c}(\Phi_i + \Phi_i^e) = \text{const} \qquad (1.14)$$

т. е. сохраняется полный поток магнитного поля через контур ветви тока $\dot{q}_i$

$$\Phi_{i0} = \Phi_i + \Phi_i^e \qquad (1.15)$$

Функцию Рауса (1.13) с помощью (1.12) и (1.14) можно представить в виде

$$R = L_M - \frac{1}{2c^2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} L_{ij} q_i^{\cdot} q_j^{\cdot} \qquad (1.16)$$

Последнее слагаемое в (1.16) есть взятая с обратным знаком собственная магнитная энергия проводника (1.9), и, следовательно,

$$R = L_M - W_{ms} \qquad (1.17)$$

Таким образом, динамика рассматриваемой электромеханической системы описывается с помощью функции Рауса (1.17), являющейся разностью обычного механического лагранжиана и собственной магнитной энергии системы.

Если ввести обобщенную потенциальную энергию (потенциал Рауса [5]) $W = U + W_{ms}$, то функцию R с учетом (1.2) можно записать в виде

$$R = T - W \qquad (1.18)$$

Выразим R в переменных Рауса. Для этого, очевидно, надо преобразовать только магнитную энергию W_{ms}.

В силу положительной определенности квадратичной формы (1.9) $\det \| L_{ij} \| \neq 0$, поэтому из соотношения (1.8) находим

$$q_i^{\cdot} = c \sum_{j=1}^{\infty} L_{ij}^{-1} \Phi_j \tag{1.19}$$

Здесь $\| L_{ij}^{-1} \|$ — обратная матрица для матрицы $\| L_{ij} \|$. Используя (1.19), запишем W_{ms} в переменных Рауса

$$W_{ms} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} L_{ij}^{-1} \Phi_i \Phi_j \tag{1.20}$$

В простейшем случае линейного проводника (1.20) принимает вид $W_{ms} = \Phi^2 / 2L$, где L — коэффициент самоиндукции, а Φ — поток собственного магнитного поля через апертуру проводника, причем Φ удовлетворяет соотношению типа (1.15).

2. Рассмотрим теперь тонкий замкнутый плазменный проводник (кольцо), радиус поперечного сечения которого a мал по сравнению с характерным размером осевой линии. Плазма предполагается невязкой и идеально проводящей. Кольцо удерживается в равновесии и стабилизируется относительно плавных возмущений типа змеек и перетяжек магнитным полем, являющемся в общем случае комбинацией постоянного и квазистационарного высокочастотного полей. Текущий по кольцу поверхностный ток, как и магнитное поле, может иметь высокочастотную составляющую.

Рассматривая проводник как электромеханическую систему, будем описывать его движение около положения равновесия функцией Рауса (1.17). Механический лагранжиан будем считать известным (см. примечание), ограничиваясь, таким образом, нахождением собственной магнитной энергии (1.9). Последняя должна быть выражена через переменные Рауса, т. е. в конечном счете через время t и геометрические координаты ξ_m, описывающие возмущение кольца.

Предположим сначала, что поля в плазме нет, и, следовательно, кольцо можно считать сверхпроводящим. Однако для упрощения выкладок наводимый в сверхпроводнике внешним магнитным полем ток и его собственное магнитное поле будем считать распределенными в некотором тонком поверхностном слое, переходя к пределу лишь в конечных выражениях. При этом магнитную энергию можно записать в виде

$$W_{ms}^{ext} = \frac{1}{2c} \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} \, dV \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{j}$ — объемная плотность тока в шнуре, $\mathbf{A}$ — вектор-потенциал магнитного поля этого тока, а интегрирование ведется по объему проводника.

Представим плотность тока $\mathbf{j}$ в виде

$$\mathbf{j} = c \operatorname{rot} \mathbf{M} + \mathbf{j}_I \tag{2.2}$$

где $\mathbf{M}$ — формально введенный вектор намагниченности, отличный от нуля только внутри проводника. Первый член, связанный с намагниченностью среды, не дает вклада в полный ток, текущий через поперечное сечение шнура, так что полный ток I определяется только вторым членом (2.1)

$$I = \int \mathbf{j} \cdot d\mathfrak{f} = \int \mathbf{j}_I \cdot d\mathfrak{f}$$

В силу линейности уравнений поля

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_M + \mathbf{A}_I \tag{2.3}$$

где $\mathbf{A}_M$ и $\mathbf{A}_I$ суть вектор-потенциалы магнитных полей тока намагничивания и тока $\mathbf{j}_I$ соответственно. Подставляя (2.2) и (2.3) в (2.1), получим

$$W_{ms}^{ext} = \frac{1}{2c}\int \mathbf{A}_I \cdot \mathbf{j}_I \, dV + \frac{1}{2}\int \mathbf{A}_M \cdot \operatorname{rot} \mathbf{M} \, dV + \\ + \frac{1}{2}\int \mathbf{A}_I \cdot \operatorname{rot} \mathbf{M} \, dV + \frac{1}{2c}\int \mathbf{A}_M \cdot \mathbf{j}_I \, dV \tag{2.4}$$

Первое слагаемое можно записать в виде

$$\frac{1}{2c}\int \mathbf{A}_I \cdot \mathbf{j}_I \, dV = \frac{\Phi^2}{2L} \tag{2.5}$$

Здесь Φ — поток магнитного поля тока I через кольцо, а L — самоиндукция кольца для тока I. Поток Φ находится из соотношения типа (1.15)

$$\Phi + \Phi_e = \Phi_0 = \text{const} \tag{2.6}$$

Здесь Φ_e — поток внешнего поля через контур тока I, а Φ_0 — полный поток поля через кольцо, сохраняющийся в силу идеальной проводимости. С формальной точки зрения Φ_0 / c есть сохраняющийся обобщенный импульс, соответствующий циклической координате

$$q = \int I dt$$

Второе слагаемое в (2.4) преобразуется к виду

$$\frac{1}{2}\int \mathbf{A}_M \cdot \operatorname{rot} \mathbf{M} \, dV = \frac{1}{2}\oint (\mathbf{M} \times \mathbf{A}_M) \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{2}\int \mathbf{M} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A}_M \, dV$$

Интеграл по поверхности, охватывающей проводник и проходящей везде вне его, равен нулю. Подставив в объемный интеграл $\mathbf{B}_M = \operatorname{rot} \mathbf{A}_M$, получим

$$\frac{1}{2}\int \mathbf{A}_M \cdot \operatorname{rot} \mathbf{M} \, dV = \frac{1}{2}\int \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_M \, dV \tag{2.7}$$

с интегрированием по объему проводника (только там $\mathbf{M} \neq 0$). Но внутри сверхпроводника индукция магнитного поля, складывающаяся из индукции внешнего поля $\mathbf{B}_e$ и индукции поля токов намагничивания $\mathbf{B}_M$, равна нулю, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_e + \mathbf{B}_M = 0$. Следовательно, внутри проводника $\mathbf{B}_M = -\mathbf{B}_e$.

Таким образом

$$\frac{1}{2}\int \mathbf{A}_M \cdot \operatorname{rot} \mathbf{M} \, dV = -\frac{1}{2}\int \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_e \, dV \tag{2.8}$$

Третье слагаемое в (2.4) после преобразования принимает вид, аналогичный (2.8)

$$\frac{1}{2}\int \mathbf{A}_I \cdot \operatorname{rot} \mathbf{M} \, dV = \frac{1}{2}\int \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_I \, dV \quad (\mathbf{B}_I = \operatorname{rot} \mathbf{A}_I) \tag{2.9}$$

Здесь интегрирование по-прежнему ведется по объему проводника. Однако поле $\mathbf{B}_I$ в проводнике, как и ток $\mathbf{j}_I$, сосредоточено в тонком поверхностном слое, причем имеет там конечную величину. Поэтому в пределе бесконечно тонкого слоя интеграл справа в (2.9) равен нулю и, значит,

$$\frac{1}{2}\int \mathbf{A}_I \cdot \operatorname{rot} \mathbf{M} \, dV = 0 \tag{2.10}$$

Четвертое слагаемое в (2.4) после подстановки $\mathbf{j}_I = (c/4\pi)\operatorname{rot}\mathbf{B}_I$ можно представить в виде

$$\frac{1}{2c}\int \mathbf{A}_M\cdot\mathbf{j}_I\,dV = \int \operatorname{div}(\mathbf{B}_I\times\mathbf{A}_M)\,dV + \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{B}_I\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A}_M\,dV$$

Интеграл от $\operatorname{div}(\mathbf{B}_I\times\mathbf{A}_M)$ преобразуется в интеграл по бесконечно удаленной поверхности и обращается в нуль. Подставляя во второй интеграл $\mathbf{B}_M = \operatorname{rot}\mathbf{A}_M$, находим, что

$$\frac{1}{2c}\int \mathbf{A}_M\cdot\mathbf{j}_I\,dV = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{B}_I\cdot\mathbf{B}_M\,dV \tag{2.11}$$

Интегрирование в (2.11) должно вестись по всему пространству. Однако, как уже отмечалось, поле $\mathbf{B}_I$ в проводнике отлично от нуля только в тонком поверхностном слое, поэтому фактически интегрирование можно вести только по пространству вне проводника.

Так как шнур тонкий, а его возмущения плавные, на участках, малых по сравнению с длиной волны возмущения, его можно считать цилиндром и при этом пользоваться для $\mathbf{M}$, $\mathbf{B}_I$ и $\mathbf{B}_M$ выражениями, имеющими место в случае цилиндрического проводника. Будем также считать, что внешнее поле мало меняется на расстоянии порядка радиуса шнура a.

Поле $\mathbf{B}_M$ вне сверхпроводящего цилиндра, находящегося в однородном внешнем поле, имеет вид [6] $\mathbf{B}_M = (a/r)^2[\mathbf{B}_{e\perp} - 2\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_{e\perp})]$. Здесь $\mathbf{n}$ — единичная нормаль к поверхности цилиндра, а $\mathbf{B}_{e\perp}$ — компонента внешнего поля, перпендикулярная осевой линии проводника. С другой стороны, $\mathbf{B}_I = B_a(a/r)(\boldsymbol{\tau}\times\mathbf{n})$, где $B_a = 2I/ca$, а $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор касательной к осевой линии шнура. Из этих формул следует, что

$$\mathbf{B}_I\cdot\mathbf{B}_M = -(a/r)^3 B_a B_{e\perp}\sin\theta \tag{2.12}$$

где θ — угол в плоскости поперечного сечения шнура, отсчитываемый от вектора $\mathbf{B}_{e\perp}$. Интегрирование выражения (2.12) по θ от 0 до 2π в объемном интеграле (2.11) дает нуль, так что в «локально-цилиндрическом» приближении

$$\frac{1}{2c}\int \mathbf{A}_M\cdot\mathbf{j}_I\,dV = 0 \tag{2.13}$$

Ввиду (2.10) и (2.13) собственная магнитная энергия сверхпроводящего кольца W_{ms}^{ext} в локально-цилиндрическом приближении определяется только первыми двумя слагаемыми выражения (2.4). Суммируя (2.5) и (2.8) с учетом (2.6), находим, что

$$W_{ms}^{ext} = \frac{(\Phi_0-\Phi_e)^2}{2L} - \frac{1}{2}\int \mathbf{M}\cdot\mathbf{B}_e\,dV \tag{2.14}$$

Коэффициент самоиндукции L как функция геометрических координат ξ_m может быть найден по формуле [6]

$$L = \iint\limits_{R>a/2} \frac{d\mathbf{l}_1\cdot d\mathbf{l}_2}{R} \tag{2.15}$$

где $d\mathbf{l}_1$, $d\mathbf{l}_2$ — элементы дуги осевой линии возмущенного проводника, а R — рассеяние между ними. В частности, для возмущенного кругового кольца коэффициент L получен в работе [1]. Поток Φ_e выражается через ξ_m и заданное внешнее поле

$$\Phi_e = \int \mathbf{A}^e\cdot d\mathbf{l} \tag{2.16}$$

Что же касается вектора намагниченности $\mathbf{M}$, то в рассматриваемом приближении его можно найти по известной формуле для намагниченности цилиндра в однородном внешнем поле [6]

$$\mathbf{M} = -\mathbf{B}_e / 4\pi (1 - n) \tag{2.17}$$

где $n = 0$ для продольного поля и $^1/_2$ — для поперечного.

Если теперь в плазме имеется вмороженное поле $\mathbf{B}_i$, то его энергия

$$W_{ms}^{int} = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{B}_i^2\, dV$$

что в сумме с W_{ms}^{ext} (2.14) составит полную собственную магнитную энергию плазменного кольца. Пусть поле $\mathbf{B}_i$ в начальный момент направлено вдоль осевой линии шнура, $\mathbf{B}_i = B_i \boldsymbol{\tau}$, и почти однородно в каждом поперечном сечении. Тогда вследствие идеальной проводимости и при возмущении оно будет оставаться почти однородным и коллинеарным осевой линии. Поток этого поля через поперечное сечение шнура сохраняется, т. е.

$$\int \mathbf{B}_i \cdot d\mathbf{S} = \langle B \rangle_i S = \Phi_i = \mathrm{const}$$

где $\langle B \rangle_i$ — среднее по сечению шнура значение поля B_i, а S—площадь сечения. Так как шнур тонкий, можно принять, что $B_i = \langle B \rangle_i$. Тогда

$$W_{ms}^{int} = \frac{\Phi_i^2}{8\pi}\int \frac{dl}{S}$$

с интегрированием по осевой линии шнура.

Полная собственная магнитная энергия кольца дается выражением

$$W_{ms} = \frac{(\Phi_0 - \Phi_e)^2}{2L} - \frac{1}{2}\int \mathbf{M}\cdot\mathbf{B}_e\, dV + \frac{\Phi_i^2}{8\pi}\int \frac{dl}{S} \tag{2.18}$$

где L, Φ_e и $\mathbf{M}$ — определяются посредством (2.15) — (2.17). Подчеркнем, что W_{ms} представлено, хотя пока еще не явно, в переменных Рауса, так как каждое слагаемое в (2.18) выражается через заданное магнитное поле, зависящее в общем случае от времени, и геометрические координаты.

Таким образом, если механический лагранжиан известен, то, определяя по заданным внешнему полю и возмущению шнура собственную магнитную энергию, можем найти функцию Рауса, описывающую движение шнура около положения равновесия.

Автор благодарит М. Л. Левина за постоянное внимание к работе и ценные советы.

Поступила 6 I 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин М. Л., Рабинович М. С. Метод сильной фокусировки для стабилизации прямых и тороидальных разрядов. Ж. техн. физ., 1963, т. 33, № 2.
2. Осовец С. М. Динамическая стабилизация плазменного витка. ЖЭТФ, 1960, т. 39, № 2.
3. Никулин М. Г. Стабилизация плазменного шнура с переменным током квадрупольным магнитным полем. ПМТФ, 1968, № 6.
4. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. М., «Наука», 1967.
5. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М., Физматгиз, 1960.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Физматгиз, 1959.