ПМТФ, № 6, 1970

К ТЕОРИИ РЕЛАКСАЦИИ ТЕМПЕРАТУРЫ ЭЛЕКТРОННО-ИОННОЙ ПЛАЗМЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В ВЫСОКОЧАСТОТНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

В. П. Силин, В. Т. Тихончук

(Москва)

Определена эффективная частота столкновений электронов и ионов, приводящая к выравниванию температур в плазме, находящейся в постоянном магнитном и слабом высокочастотном электрическом полях, в условиях, когда гироскопический радиус электронов оказывается меньше дебаевского радиуса экранирования. Соответствующие значения времени релаксации определены в широком интервале соотношений между температурами электронов и ионов, в широком интервале значений магнитного и электрического полей, а также частоты внешнего электрического поля.

Выравнивание температур электронов и ионов плазмы в сильном постоянном магнитном поле, когда радиус дебаевского экранирования оказывается больше гироскопического радиуса частиц, изучалось в работах [1,2]. В основу этих работ было положено кинетическое уравнение с интегралом столкновений, учитывающим влияние магнитного поля на движение сталкивающихся частиц [3]. В данной работе ставилась задача учесть влияние высокочастотного электрического поля на время релаксации температуры замагниченной плазмы.

Как было показано в работе [4], в замагниченной плазме возможна раскачка нарастающих колебаний в сильном высокочастотном электрическом поле. Поэтому электрические поля, в которых скорость дрейфа частиц становится больше их тепловой скорости, ниже не рассматриваются.

Исследование проведено в широком диапазоне частот внешнего электрического поля $\omega_0 > \nu_{ei}$ (ν_{ei}— частота электрон-ионных соударений, выражение для которой будет получено ниже). В низкочастотной области $\omega_0 < \nu_{ei}$ скорость дрейфа электронов вдоль магнитного поля будет определяться уже не частотой ω_0, а частотой электрон-ионных соударений, что приведет к другому выражению для проводимости вдоль магнитного поля.

Наконец показано, что время столкновения, возникающее благодаря кулоновскому взаимодействию, полученное в работе [2], остается справедливым и в том случае, когда на плазму наложено внешнее высокочастотное электрическое поле, и в некоторых областях прицельных параметров является определяющим.

1. В основу положим кинетическое уравнение (ср. [5])

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + e_a\left[\mathbf{E}(t) + \frac{1}{c}\mathbf{v}_a \times \mathbf{B}\right]\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}_a} = \tag{1.1}$$

$$= \sum_b \frac{\partial}{\partial p_a^{\,k}} \iint \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\partial U_{ab}(|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|)}{\partial r_a^{\,k}} \frac{\partial U_{ab}(|\mathbf{R}_a - \mathbf{R}_b|)}{\partial R_a^{\,j}} \times$$

$$\times \left(\frac{\partial}{\partial P_a^{\,j}} - \frac{\partial}{\partial P_b^{\,j}}\right) f_a(\mathbf{P}_a, t+\tau) f_b(\mathbf{P}_b, t+\tau)\, d^3p_b\, d^3r_b\, d\tau$$

Здесь f_a — функция распределения частиц сорта a, U_{ab} — экранированный потенциал кулоновского взаимодействия, $\mathbf{P}_a$ и $\mathbf{R}_a$ — импульс и координата в момент времени $t+\tau$ частицы a, взаимодействующей по кулоновскому закону с частицей b, если в момент времени t ее импульс и координата имеют значения $\mathbf{p}_a$ и $\mathbf{r}_a$.

Для того чтобы получить ограничение времени столкновения благодаря кулоновскому взаимодействию в соответствии с работой [2], используем для $\mathbf{P}_a$ и $\mathbf{R}_a$ не нулевое, а первое приближение по кулоновскому взаимодействию

$$\mathbf{R}_a(t+\tau, \mathbf{r}_a, \mathbf{p}_a, \mathbf{r}_b, \mathbf{p}_b) = \mathbf{r}_a + \frac{1}{m_a}\int\limits_t^{t+\tau} \mathbf{P}_a(t')\, dt'$$

$$\mathbf{R}_a \equiv \mathbf{R}_a^{(0)} + \mathbf{R}_a^{(1)}, \qquad \mathbf{P}_a \equiv \mathbf{P}_a^{(0)} + \mathbf{P}_a^{(1)}$$

$$\mathbf{P}_a^{(0)}(t+\tau, \mathbf{r}_a, \mathbf{p}_a, \mathbf{r}_b, \mathbf{p}_b) = \mathbf{b}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{p}_a) - \mathbf{b}\times\mathbf{p}_a \sin\Omega_a\tau - \mathbf{b}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{p}_a)\cos\Omega_a\tau +$$

$$+ e_a \int_t^{t+\tau} [\mathbf{b}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{E}(t')) - \mathbf{b}\times\mathbf{E}(t')\sin\Omega_a(t+\tau-t') -$$

$$- \mathbf{b}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{E}(t'))\cos\Omega_a(t+\tau-t')]\, dt'$$

$$\mathbf{P}_a^{(1)}(t+\tau, \mathbf{r}_a, \mathbf{p}_a, \mathbf{r}_b, \mathbf{p}_b) = \int_t^{t+\tau} [\mathbf{b}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{f}_{ab}) - \mathbf{b}\times\mathbf{f}_{ab}\sin\Omega_a(t+\tau-t') -$$

$$- \mathbf{b}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{f}_{ab})\cos\Omega_a(t+\tau-t')]\, dt'$$

$$\mathbf{f}_{ab}(t) = -\frac{\partial}{\partial\mathbf{R}_a^{(0)}(t)} U_{ab}(|\mathbf{R}_a^{(0)} - \mathbf{R}_b^{(0)}|) \quad \Omega_a = \frac{e_a B}{m_a c}, \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}}{B}$$

Так как релаксация импульса происходит значительно быстрее релаксации температуры, то в качестве функций распределения можно взять максвелловские функции от аргумента

$$\mathbf{p}_a - e_a \int_{-\infty}^{t} [\mathbf{b}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{E}(t')) - \mathbf{b}\times\mathbf{E}(t')\sin\Omega_a(t-t') -$$

$$- \mathbf{b}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{E}(t'))\cos\Omega_a(t-t')]\, dt'$$

Умножив уравнение (1.1) на

$$\frac{1}{2m_a}\Big\{\mathbf{p}_a - e_a \int_{-\infty}^{t} [\mathbf{b}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{E}(t')) - \mathbf{b}\times\mathbf{E}(t')\sin\Omega_a(t -$$

$$- t') - \mathbf{b}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{E}(t'))\cos\Omega_a(t-t')]\, dt'\Big\}^2$$

и проинтегрировав по импульсам частицы a, получим уравнение релаксации температуры.

Перед тем как брать интегралы в правой части получившегося уравнения, обсудим влияние кулоновского взаимодействия на движение частиц. Поправки первого приближения по кулоновскому взаимодействию к $\mathbf{R}_a$ получились такими же, как и в работе [2], поэтому не изменится и характерное время столкновения, возникающее вследствие учета влияния кулоновского взаимодействия

$$\tau_{\max}(k) \approx k^{-3/2}\left(\frac{m_e}{|ee_i|}\right)^{1/2}$$

полученное в работе [2]. Таким образом интеграл по τ в (1.1) следует брать от $-\tau_{\max}(k)$ до 0. В дальнейшем уже можно пренебречь малыми аддитивными добавками, обусловленными влиянием кулоновского поля на импульсы сталкивающихся частиц. Это оправдано для принятой логарифмической точности вычислений.

Теперь для получения окончательного выражения следует взять интегралы в правой части уравнения релаксации температур. Примем зависимость электрического поля от времени в виде

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \cos\omega_0 t$$

Действуя так же, как, например, в работе [5], можно это уравнение записать в виде

$$\frac{\partial T_a}{\partial t} = \sum_b (T_b - T_a) \frac{16 e_a^2 e_b^2 n_b}{3 m_a m_b} \int\limits_{k_{\min}}^{k_{\max}} \int\limits_0^{\tau_{\max}(k)} \int\limits_0^{1/2\pi} k^2 \tau^2 \sin\theta \exp(-X_a - X_b) \times$$
$$\times \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta \frac{\sin\Omega_a\tau}{\Omega_a\tau}\right)\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta \frac{\sin\Omega_b\tau}{\Omega_b\tau}\right) \times$$
$$\times \cos(k\rho_\parallel \cos\theta) J_0(k\rho_\perp \sin\theta)\, dk\, d\tau\, d\theta + \sum_b \frac{16 e_a^2 e_b^2 n_b}{3 m_a} \times$$
$$\times \int\limits_{k_{\min}}^{k_{\max}} \int\limits_0^{\tau_{\max}(k)} \int\limits_0^{1/2\pi} k\tau \sin\theta \exp(-X_a - X_b)\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta \frac{\sin\Omega_a\tau}{\Omega_a\tau}\right) \times \quad (1.2)$$
$$\times \Big[\rho_\parallel^{\bullet} \cos\theta \sin(k\rho_\parallel \cos\theta) J_0(k\rho_\perp \sin\theta) +$$
$$+ \frac{(\rho\times\mathbf{b})\cdot(\rho^{\bullet}\times\mathbf{b})}{\rho_\perp} \sin\theta \cos(k\rho_\parallel \cos\theta) J_1(k\rho_\perp \sin\theta)\, dk\, d\tau\, d\theta\Big]$$

где T — температура, измеренная в энергетических единицах, $k_{\min} = r_D^{-1}$, $k_{\max} = r_{\min}^{-1}$, как и в обычном интеграле столкновений Ландау, θ — угол между векторами $\mathbf{b}$ и $\mathbf{k}$

$$\rho = \rho_a - \rho_b, \quad \rho^{\bullet} = \frac{\partial}{\partial\tau}\rho, \quad \rho_\parallel = \mathbf{b}\cdot\rho, \quad \rho_\perp = |\mathbf{b}\times\rho|$$
$$\rho_a(\tau) = 2\sin\frac{\omega_0\tau}{2}\Big[\frac{e_a}{m_a\omega_0^2}\mathbf{b}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{E}_0)\sin\omega_0\left(t - \frac{\tau}{2}\right) +$$
$$+ \frac{e_a\Omega_a}{m_a\omega_0(\omega_0^2 - \Omega_a^2)}\mathbf{b}\times\mathbf{E}_0\cos\omega_0\left(t - \frac{\tau}{2}\right) +$$
$$+ \frac{e_a}{m_a(\omega_0^2 - \Omega_a^2)}\mathbf{b}\times(\mathbf{E}_0\times\mathbf{b})\sin\omega_0\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\Big]$$
$$X_a = \frac{1}{2} k^2 v_{Ta}^2 \tau^2 \left[\cos^2\theta + \frac{4}{\Omega_a^2\tau^2}\sin^2\theta \sin^2\frac{\Omega_a\tau}{2}\right]$$
$$vT_a^2 = T_a / m_a$$

J_n — бесселева функция порядка n.

Полученное выражение усредним по периоду колебаний внешнего поля. Как видно из (1.2), вследствие осцилляций бесселевых и тригонометрических функций в областях

$$k\rho_\parallel \cos\theta > 1, \qquad k\rho_\perp \sin\theta > 1$$

интеграл мал, поэтому интегрирование проводится в тех областях, где

$$k\rho_\parallel \cos\theta \lesssim 1, \qquad k\rho_\perp \sin\theta \lesssim 1$$

В этих областях можно провести разложение бесселевых и тригонометрических функций в ряд и, ограничившись первыми членами разложения, провести указанное выше усреднение. В результате, если плазма состоит из электронов и одного сорта ионов, получается следующее выражение:

$$\frac{\partial T_e}{\partial t} = (T_i - T_e)\frac{2m_e}{m_i}\nu_0\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int\limits_{\varkappa_{\min}}^{\varkappa_{\max}} \int\limits_0^{t_{\max}(\varkappa)} \int\limits_0^1$$
$$\varkappa^2 t^2 \exp\left[-\frac{\varkappa^2 t^2}{2}\psi(1/2 t)\right]\exp\left\{-\frac{\varkappa^2 t^2 x^2}{2}\left[1 + \frac{v_{Ti}^2}{v_{Te}^2} - \psi(1/2 t)\right]\right\}$$

$$\left[x^2\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)+\frac{\sin t}{t}\right]\left[x^2\left(1-\frac{\Omega_e}{\Omega_i t}\sin\frac{\Omega_i t}{\Omega_e}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\Omega_e}{\Omega_i t}\sin\frac{\Omega_i t}{\Omega_e}\right]d\varkappa\,dt\,dx+\frac{e^2\nu_0}{m_e\omega_0^2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}$$
$$\int\limits_{\varkappa_{\min}}^{\varkappa_{\max}}\int\limits_0^{t_{\max}(\varkappa)}\int\limits_0^1\varkappa^2\frac{\Omega_e}{\omega_0}t\sin\frac{\omega_0}{\Omega_e}t\exp\left[-\frac{\varkappa^2t^2}{2}\psi(^1/_2t)\right]$$
$$\exp\left\{-\frac{\varkappa^2t^2x^2}{2}\left[1+\frac{v_{Ti}^2}{v_{Te}^2}-\psi(^1/_2t)\right]\right\}\left[x^2\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\sin t}{t}\right]\left[x^2E_\parallel^2+\frac{1-x^2}{2}Z^2(\omega_0)E_\perp^2\right]d\varkappa\,dt\,dx \qquad (1.3)$$

Интегрирование по $\varkappa$ и t происходит только в тех областях, где

$$2\frac{\Omega_e}{\omega_0}\varkappa\sin\frac{\omega_0 t}{2\Omega_e}<\frac{v_{Te}}{v_{E\parallel(\perp)}} \qquad (1.4)$$

Здесь

$$\nu_0=\frac{4}{3}\frac{\sqrt{2\pi}\,e^2e_i^2n_i}{\sqrt{m_e}\,T_e^{3/2}}$$

$$\varkappa_{\min}=\frac{\rho_e}{r_D},\qquad \varkappa_{\max}=\frac{\rho_e}{r_{\min}},\qquad \rho_a=\frac{v_{Ta}}{\Omega_a}$$

$$t_{\max}(\varkappa)=\Omega_e\tau_{\max}(k)=\varkappa_{\max}^{1/2}\varkappa^{-3/2}$$

$$\psi(t)=\frac{1}{t^2}\left(\sin^2 t+\frac{\rho_i^2}{\rho_e^2}\sin^2\frac{\Omega_i t}{\Omega_e}\right)$$

$$Z(\omega_0)=\frac{\omega_0}{\Omega_e}\left[\left(\frac{\Omega_e^2}{\omega_0^2-\Omega_e^2}+\frac{\Omega_i^2}{\omega_0^2-\Omega_i^2}\right)^2+\left(\frac{\omega_0\Omega_e}{\omega_0^2-\Omega_e^2}+\frac{\omega_0\Omega_i}{\omega_0^2-\Omega_i^2}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$E_\parallel=\mathbf{b}\cdot\mathbf{E}_0,\qquad E_\perp=|\mathbf{b}\times\mathbf{E}_0|$$

$$\mathbf{v}_E=\mathbf{v}_{Ee}-\mathbf{v}_{Ei},\quad v_{E\parallel}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}_E,\quad v_{E\perp}=|\mathbf{b}\times\mathbf{v}_E|$$

Здесь $\mathbf{v}_E$ — скорость дрейфа частиц в электрическом поле. Величины $v_{E\parallel}$ и $v_{E\perp}$ можно найти из уравнений движения частицы в электрическом и магнитном полях

$$v_{E\parallel}\approx\frac{eE_\parallel}{m_e\omega_0},\qquad v_{E\perp}\approx\frac{eE_\perp}{m_e\omega_0}Z(\omega_0)$$

2. Имея ввиду возникновение больших логарифмических выражений, ограничиваемся удержанием только старших членов, т. е. пренебрегаем величинами порядка единицы по сравнению с логарифмическими и дважды логарифмическими выражениями. Запишем (1.3) в таком виде:

$$\frac{\partial T_e}{\partial t}=\frac{T_i-T_e}{\tau_T}+\sigma_{jk}E_jE_k \qquad (2.1)$$

$$\tau_T^{-1}=\frac{2m_e}{m_i}\nu_0(L_1+\delta L_1)$$

τ_T — время релаксации температуры, σ_{jk} — тензор проводимости

$$L_1=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int\limits_{\varkappa_{\min}}^{\varkappa_{\max}}\int\limits_0^1\varkappa^2t^2\exp\frac{-\varkappa^2t^2}{2}\,d\varkappa\,dt \qquad (2.2)$$

$$\delta L_1=\int\limits_{\varkappa_{\min}}^1\int\limits_{1/\varkappa}\frac{d\varkappa\,dt}{\varkappa t} \qquad (2.3)$$

где верхний предел интегрирования по t является наименьшим из следующих трех выражений:

$$\varkappa_{\max}^{1/2}\varkappa^{-3/2}, \qquad \frac{v_{Te}}{\varkappa v_{Ti}}, \quad \frac{\Omega_e}{\Omega_i}$$

В выражениях (2.2) и (2.3) интегрирование проводится только в тех областях изменения переменных $\varkappa$ и t, где выполняется неравенство:

$$2\frac{\Omega_e}{\omega_0}\varkappa\sin\frac{\omega_0 t}{2\Omega_e} < \frac{v_{Te}}{v_E}, \quad v_E = \max\{v_{E\parallel}, v_{E\perp}\}, \tag{2.4}$$

Далее будет рассматриваться только первое слагаемое выражения (2.1), пропорциональное разности температур. Второе слагаемое связано с теплом, выделяющимся в плазме под действием электрического поля $\mathbf{E}$. Поэтому тензор проводимости σ_{ik} совпадает с вычисленным в работе [5], где рассматривалась проводимость замагниченной плазмы в слабом высокочастотном электрическом поле.

Формальное отличие выражений (2.2) и (2.3) от соответствующих выражений работы [2], где рассматривалась релаксация температур в замагниченной плазме в отсутствие электрического поля, состоит в появлении дополнительного ограничения (2.4), учитывающего ограничение сверху времени взаимодействия, благодаря дрейфу частиц в электрическом поле. Заметим, что это ограничение оказывается существенным при частоте внешнего поля $\omega_0 < \Omega_e$ и $v_E > v_{Ti}$.

Приведем выражения для L_1 и δL_1, получающиеся в результате интегрирования выражений (2.2) и (2.3)

Для незамагниченной плазмы ($\rho_e > r_D$) получаем

$$L_1 = \ln(r_D/r_{\min})$$

Для замагниченной плазмы ($\rho_e < r_D$)

$$L_1 = \ln(\rho_e / r_{\min})$$

В первом случае никаких дважды логарифмических выражений не возникает; во втором случае возникают дважды логарифмические добавки, обусловленные (2.3). Как указывалось выше, в областях

$$\omega_0 > \Omega_e, \qquad v_E > v_{Ti}$$

влияние электрического поля несущественно, а потому имеют место выражения, полученные в работе [2]. В противоположном случае имеют место новые выражения, полученные в данной работе.

Для упрощения записи введем следующие обозначения:

$$r_0 = r_{\min} v_{Te}^2 / v_{Ti}^2$$

$$l_1 = \ln\frac{r_D}{\rho_e}, \quad l_2 = \ln\frac{v_E}{\Omega_i\rho_e}, \quad l_3 = \ln\frac{v_E}{\omega_0\rho_e}$$

$$l_4 = \ln\frac{v_{Te}}{v_E}, \quad l_5 = \ln\frac{v_{Te}}{v_{Ti}}, \quad l_6 = \frac{1}{2}\ln\frac{r_0 v_{Ti}^2}{\rho_e v_E^2}$$

$$l_7 = \ln\frac{\rho_i}{\rho_e}, \quad l_8 = \frac{1}{2}\ln\frac{\omega_0 r_0}{v_E}, \quad l_9 = \frac{1}{6}\ln\frac{r_0\rho_i^2\omega_0^3}{v_E^3}$$

Следует отметить, что первые шесть логарифмов линейно независимы, а остальные три могут быть выражены линейно через первые шесть.

С помощью введенных обозначений выпишем полученные выражения для δL_1

В областях $\nu_{ei} < \omega_0 < \Omega_i$ и $\Omega_i < \omega_0 < \Omega_e$

$$\delta L_1 = l_1 l_4$$
$$v_E / \omega_0,\; v_E / \Omega_i > r_D > \rho_e > r_0 v_{Ti}^2 / v_E^2, \qquad v_{Te} > v_E > v_{Ti}$$
$$\delta L_1 = l_1 l_4 - l_6^2 \tag{2.5}$$
$$v_{Te} / \Omega_i > r_D > r_0 v_{Ti}^2 / v_E^2 > \rho_e, \qquad v_{Te} > v_E > v_{Ti}$$

В области малых частот $\nu_{ei} < \omega_0 < \Omega_i$ кроме (2.5)

$$\delta L_1 = l_1 l_4 - {}^1/_2\,(l_1 - l_2)^2 \tag{2.6}$$
$$v_{Te} / \Omega_i > r_D > v_E / \Omega_i > \rho_i > \rho_e > r_0 v_{Ti}^2 / v_E^2$$
$$\delta L_1 = l_1 l_4 - {}^1/_2\,(l_1 - l_2)^2 - l_6^2$$
$$v_{Te} / \Omega_i > r_D > v_E / \Omega_i > \rho_i, \quad r_0 v_{Ti}^2 / v_E^2 > \rho_e$$
$$\delta L_1 = l_2 l_4 + {}^1/_2\, l_4^2$$
$$r_D > v_{Te} / \Omega_i > v_E / \Omega_i > \rho_i > \rho_e > r_0 v_{Ti}^2 / v_E^2$$
$$\delta L_1 = l_2 l_4 + {}^1/_2 l_4^2 - l_6^2$$
$$r_D > v_{Te} / \Omega_i > v_E / \Omega_i > \rho_i, \quad r_0 v_{Ti}^2 / v_E^2 > \rho_e$$

В области малых частот $\nu_{ei} < \omega_0 < \Omega_i$ больше никаких дважды логарифмических выражений не возникает.

В области частот $\Omega_i < \omega_0 < \Omega_e$ кроме (2.5) имеют место выражения (2.7) и (2.8)

$$\delta L_1 = l_3 l_4 + (l_1 - l_3)\, l_5$$
$$\rho_i > r_D > v_E / \omega_0 > r_0, \quad \rho_e > r_0 v_{Ti}^2 / v_E^2 \tag{2.7}$$
$$\delta L_1 = l_3 l_4 + (l_1 - l_3)\, l_5 - {}^1/_2\,(l_1 - l_7)^2$$
$$v_{Te} / \Omega_i > r_D > \rho_i > v_E / \omega_0 > r_0, \quad \rho_e > r_0 v_{Ti}^2 / v_E^2$$
$$\delta L_1 = l_3 l_4 + (l_1 - l_3)\,(l_5 - l_7) - {}^1/_2\, l_1^2 + {}^1/_2\, l_3^2$$
$$v_{Te} / \Omega_i > r_D > v_E / \omega_0 > \rho_i,\; r_0^{1/3}\rho_i^{2/3}, \quad \rho_e > r_0 v_{Ti}^2 / v_E^2$$
$$\delta L_1 = l_3 l_4 + (l_7 - l_3)\, l_5 + {}^1/_2\, l_5^2$$
$$r_D > v_{Te} / \Omega_i > \rho_i > v_E / \omega_0 > r_0, \quad \rho_e > r_0 v_{Ti}^2 / v_E^2$$
$$\delta L_1 = l_3 l_4 + {}^1/_2\,(l_5 + l_7 - l_3)^2$$
$$r_D > v_{Te} / \Omega_i > v_E / \omega_0 > \rho_i,\; r_0^{1/3}\rho_i^{2/3}, \quad \rho_e > r_0 v_{Ti}^2 / v_E^2$$
$$\delta L_1 = l_3 l_4 + (l_1 - l_3)\, l_5 - {}^1/_2\,(l_1 - l_7)^2 - l_8^2$$
$$v_{Te} / \Omega_i > r_D > \rho_i > r_0 > v_E / \omega_0 > \rho_e > r_0 v_{Ti}^2 / v_E^2$$
$$\delta L_1 = l_3 l_4 + (l_1 - l_3)\,(l_5 - l_7) - {}^1/_2\, l_1^2 + {}^1/_2\, l_3^2 - 3 l_9^2$$
$$v_{Te} / \Omega_i > r_D > r_0^{1/3}\rho_i^{2/3} > v_E / \omega_0,\; \rho_i > \rho_e > r_0 v_{Ti}^2 / v_E^2$$
$$\delta L_1 = l_3 l_4 + (l_1 - l_3)\,(l_5 - l_8) + {}^1/_4\,(l_1 - l_3)^2$$
$$r_0,\; r_0^{1/3}\rho_i^{2/3} > r_D > v_E / \omega_0 > \rho_e > r_0 v_{Ti}^2 / v_E^2$$
$$\delta L_1 = l_3 l_4 + (l_1 - l_3)\, l_5 - l_8^2$$
$$\rho_i > r_D > r_0 > v_E / \omega_0 > \rho_e > r_0 v_{Ti}^2 / v_E^2$$
$$\delta L_1 = l_3 l_4 + (l_7 - l_3)\, l_5 + {}^1/_2\, l_5^2 - l_8^2$$
$$r_D > v_{Te} / \Omega_i > \rho_i > r_0 > v_E / \omega_0 > \rho_e > r_0 v_{Ti}^2 / v_E^2$$
$$\delta L_1 = l_3 l_4 + {}^1/_2\,(l_5 + l_7 - l_3)^2 - 3 l_9^2$$
$$r_D > v_{Te} / \Omega_i > r_0^{1/3}\rho_i^{2/3} > \rho_i, \quad v_E / \omega_0 > \rho_e > r_0 v_{Ti}^2 / v_E^2$$

Общим для выражений (2.7) является то, что в области прицельных параметров $v_E / \omega_0 > r > \rho_e$ время взаимодействия ограничено дрейфом частиц в электрическом поле. Это связано с тем, что в (2.7) во всех выражениях $\rho_e > r_0 v_{Ti}^2 / v_E^2$. В противном случае имеют место выражения

$$\delta L_1 = l_3 l_4 - l_6^2 + (l_1 - l_3)\, l_5 \tag{2.8}$$
$$\rho_i > r_D > v_E / \omega_0 > r_0 > r_0 v_{Ti}^2 / v_E^2 > \rho_e$$

$$\delta L_1 = l_3 l_4 - l_6^2 + (l_1 - l_3)\, l_5 - {}^1/_2\, (l_1 - l_7)^2$$
$$v_{Te} / \Omega_i > r_D > \rho_i > v_E / \omega_0 > r_0 > r_0 v_{Ti}^2 / v_E^2 > \rho_e$$
$$\delta L_1 = l_3 l_4 - l_6^2 + (l_1 - l_3)(l_5 - l_7) - {}^1/_2\, l_1^2 + {}^1/_2\, l_3^2$$
$$v_{Te} / \Omega_i > r_D > v_E / \omega_0 > \rho_i,\ r_0^{1/3} \rho_i^{2/3},\ r_0 v_{Ti}^2 / v_E^2 > \rho_e$$
$$\delta L_1 = l_3 l_4 - l_6^2 + (l_7 - l_3)\, l_5 + {}^1/_2\, l_5^2$$
$$r_D > v_{Te} / \Omega_i > \rho_i > v_E / \omega_0 > r_0 > r_0 v_{Ti}^2 / v_E^2 > \rho_e$$
$$\delta L_1 = l_3 l_4 - l_6^2 + {}^1/_2\, (l_5 + l_7 - l_3)^2$$
$$r_D > v_{Te} / \Omega_i > v_E / \omega_0 > \rho_i,\ r_0^{1/3} \rho_i^{2/3},\ r_0 v_{Ti}^2 / v_E^2 > \rho_e$$
$$\delta L_1 = l_3 l_4 - l_6^2 + (l_1 - l_3)\, l_5 - {}^1/_2\, (l_1 - l_7)^2 - l_8^2$$
$$v_{Te} / \Omega_i > r_D > \rho_i > r_0 > v_E / \omega_0 > r_0 v_{Ti}^2 / v_E^2 > \rho_e$$
$$\delta L_1 = l_3 l_4 - l_6^2 + (l_1 - l_3)(l_5 - l_7) - {}^1/_2\, l_1^2 + {}^1/_2\, l_3^2 - 3 l_9^2$$
$$v_{Te} / \Omega_i > r_D > r_0^{1/3} \rho_i^{2/3} > v_E / \omega_0 > r_0 v_{Ti}^2 / v_E^2 > \rho_e, \qquad r_0 > \rho_i$$
$$\delta L_1 = l_3 l_4 - l_6^2 + (l_1 - l_3)(l_5 - l_8) + {}^1/_4\, (l_1 - l_3)^2$$
$$r_0,\ r_0^{1/3} \rho_i^{2/3} > r_D > v_E / \omega_0 > r_0 v_{Ti}^2 / v_E^2 > \rho_e$$
$$\delta L_1 = l_3 l_4 - l_6^2 + (l_1 - l_3)\, l_5 - l_8^2$$
$$\rho_i > r_D > r_0 > v_E / \omega_0 > r_0 v_{Ti}^2 / v_E^2 > \rho_e$$
$$\delta L_1 = l_3 l_4 - l_6^2 + (l_7 - l_3)\, l_5 + {}^1/_2\, l_5^2 - l_8^2$$
$$r_D > v_{Te} / \Omega_i > \rho_i > r_0 > v_E / \omega_0 > r_0 v_{Ti}^2 / v_E^2 > \rho_e$$
$$\delta L_1 = l_3 l_4 - l_6^2 + {}^1/_2\, (l_5 + l_7 - l_3)^2 - 3 l_9^2$$
$$r_D > v_{Te} / \Omega_i > r_0^{1/3} \rho_i^{2/3} > v_E / \omega_0 > r_0 v_{Ti}^2 / v_E^2 > \rho_e, \qquad r_0 > \rho_i$$

Общим для выражений (2.8) является то, что в области прицельных параметров

$$r_0 v_{Ti}^2 / v_E^2 > r > \rho_e$$

время взаимодействия ограничено эффектом кулоновского ускорения частиц, а в области прицельных параметров

$$v_E / \omega_0 > r > r_0 v_{Ti}^2 / v_E^2$$

время взаимодействия ограничено дрейфом частиц в электрическом поле.

3. Полученные результаты справедливы, как указано выше, при таких значениях напряженности электрического поля, когда скорость дрейфа частиц v_E меньше тепловой скорости электронов. Однако из результатов Н. Е. Андреева и А. Ю. Кирия, любезно предоставленных авторам до опубликования, следует, что и в случае $v_E < v_{Te}$ возможен параметрический резонанс, если частота электрического поля близка к частотам электронных плазменных колебаний в постоянном магнитном поле

$$(\omega_{1,2})^2 = {}^1/_2\ \{(\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2) \pm [(\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2)^2 - 4\omega_{Le}^2 \Omega_e^2 \cos^2\theta]^{1/2}\}$$
$$\omega_{Le} = (4\pi e^2 n_e / m_e)^{1/2}$$

Здесь ω_{Le} — ленгмюровская частота электронов, θ — угол между направлением распространения колебаний и направлением постоянного магнитного поля **B**.

В замагниченной плазме верхняя ветвь заключена в пределах

$$\Omega_e \leqslant \omega_1 \leqslant (\Omega_e^2 + \omega_{Le}^2)^{1/2}$$

а нижняя — в пределах

$$\Omega_e [(\omega_{Li}^2 + \Omega_i^2) / (\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2)]^{1/2} \leqslant \omega_2 \leqslant \omega_{Le}$$

Поэтому полученные результаты следует применять в таких областях частот

$$\nu_{ei} < \omega_0 < \Omega_i, \quad \Omega_i < \omega_0 < \Omega_e \left(\frac{\omega_{Li}^2 + \Omega_i^2}{\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2}\right)^{1/2}$$
$$\omega_{Le} < \omega_0 < \Omega_e, \quad (\Omega_e^2 + \omega_{Le}^2)^{1/2} < \omega_0 \qquad (3.1)$$

Это те области, в которых невозможен параметрический резонанс. В областях параметрического резонанса, например на нижней ветви ω_2, полученные результаты имеют смысл только в том случае, если напряженность электрического поля E_0 меньше пороговой E_*, определяемой следующим выражением:

$$\frac{E_*^2}{4\pi n_e T_e} = \sqrt{8\pi}\,\frac{\nu_{ei}\omega_{Li}}{\omega_{Le}^2}\,\frac{\Omega_e^2}{\Omega_e^2\cos^2\chi + \omega_{Le}^2\sin^2\chi}\,|\cos\theta(\omega_0)|$$

где χ — угол между направлениями векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}_0$, а $\theta(\omega_0)$ определяется следующим выражением:

$$\cos^2\theta(\omega_0) = \frac{\omega_0^2(\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2 - \omega_0^2)}{\omega_{Le}^2\Omega_e^2}$$

Приведенное выражение справедливо в длинноволновом пределе ($\omega_s < < \Omega_i$) в замагниченной плазме ($\omega_s = k\omega_{Li}r_D$ — частота ионно-звуковых колебаний). Более подробные выражения для порогов можно будет найти в указанной выше работе после ее опубликования.

4. Проведенное выше исследование показывает, что в замагниченной плазме в электрическом высокочастотном поле появляются дважды логарифмические добавки ко времени релаксации температуры, зависящие от напряженности и частоты электрического поля. Такая зависимость была исследована при следующих ограничениях:

1) скорость дрейфа частиц в электрическом поле не превышает тепловую скорость электронов ($v_E < v_{Te}$) — это ограничение на величину напряженности электрического поля;

2) циклотронный радиус электронов не должен быть больше такового для ионов ($\rho_e < \rho_i$), и тепловая скорость ионов меньше тепловой скорости электронов ($v_{Ti} < v_{Te}$) — это ограничение на величину отношения температур электронов и ионов, так как последние два неравенства могут быть записаны так:

$$\frac{m_i}{m_e} > \frac{T_i}{T_e} > z^2\frac{m_e}{m_i}$$

(z — заряд иона в единицах e)

3) частота электрического поля лежит в областях, удовлетворяющих неравенствам (3.1).

Заметим, что в этих условиях зависимость от частоты и напряженности электрического поля появляется во времени релаксации температуры только в случае $\omega_0 < \Omega_e$. В противном случае электрическое поле никакого влияния на первое слагаемое уравнения (2.1) не оказывает.

Поступила 8 V 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Силин В. П. О релаксации температур электронов и ионов плазмы, находящейся в сильном магнитном поле. ЖЭТФ, 1962, т. 43, вып. 5.
2. Силин В. П., Черный Г. П. К теории релаксации температур электронов и ионов плазмы, находящейся в сильном магнитном поле. Ж. техн. физ., 1969, т. 39, № 5.
3. Силин В. П. Кинетическое уравнение для быстропеременных процессов. ЖЭТФ, 1960, т. 38, вып. 6.
4. Алиев Ю. М., Силин В. П., Уотсон Х. Параметрический резонанс в плазме, находящейся в магнитном поле. ЖЭТФ, 1966, т. 50, вып. 4.
5. Силин В. П., Шистер А. Р. К теории поперечной диффузии, статической и высокочастотной проводимости плазмы, находящейся в сильном магнитном поле. ЖЭТФ, 1965 т. 49, вып. 1 (7).