

УДК 534

СИНХРОНИЗАЦИЯ ХОДА МАЯТНИКОВЫХ ЧАСОВ, ПОДВЕШЕННЫХ НА УПРУГОЙ БАЛКЕ

А. Ю. Канунников, Р. Е. Лампер

Новосибирский государственный технический университет, 630091 Новосибирск

Исследуется синхронный режим в задаче Гюйгенса при нелинейном взаимодействии балки и маятников. Показано, что указанный Гюйгенсом режим с движением разных маятников точно в противофазе невозможен. Рассчитан режим, в котором движения маятников синхронны и близки к противофазным.

Ключевые слова: синхронизация, параметрическое возбуждение, метод гармонического баланса.

Синхронизация хода двух маятниковых часов, висящих на одной упругой балке, впервые отмечена, по-видимому, Х. Гюйгенсом [1]. В литературе это явление анализировалось достаточно подробно [2–5], при этом имеющиеся постановки задачи предполагали линейное взаимодействие балки и маятников. Колебания последних поддерживаются часовыми механизмами, приближенно представленными переменным демпфированием типа Ван-дер-Поля.

В данной работе рассматривается нелинейное взаимодействие балки и часов, также моделируемых системами Ван-дер-Поля. Колебания балки создают параметрическое возбуждение колебаний маятников за счет вибраций точек подвеса. Наибольшее возбуждение соответствует зонам главного параметрического резонанса, в которых происходит синхронизация хода часов с частотой, равной половине частоты колебаний балки. Таким образом, предполагается синхронизация путем захвата частоты двух систем Ван-дер-Поля при параметрическом возбуждении. Колебания маятников, в свою очередь, поддерживают колебания балки за счет центробежных сил, при которых частота маятников увеличивается в два раза.

1. Предположим, что часы висят симметрично относительно середины балки (рис. 1). Прогиб балки от положения равновесия описан вертикальным перемещением x одной из точек подвеса при заданной симметричной функции прогиба. Положения маятников часов характеризуются углами φ_i ($i = 1, 2$), которые отсчитываются от вертикальных осей x_i в противоположных направлениях и считаются малыми. Массы маятников m примем одинаковыми, а длины l_i — близкими, но различными.

Кинетическую энергию системы запишем в виде

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^2 (\dot{x}^2 - 2l_i \sin(\varphi_i) \dot{x} \dot{\varphi}_i + l_i^2 \dot{\varphi}_i^2),$$

где M — эффективная масса балки с присоединенными массами часовых механизмов и корпусов (без маятников). Потенциальная энергия системы равна

$$\Pi = \frac{1}{2} M \omega_6^2 x^2 - mg \sum_{i=1}^2 l_i \cos \varphi_i,$$

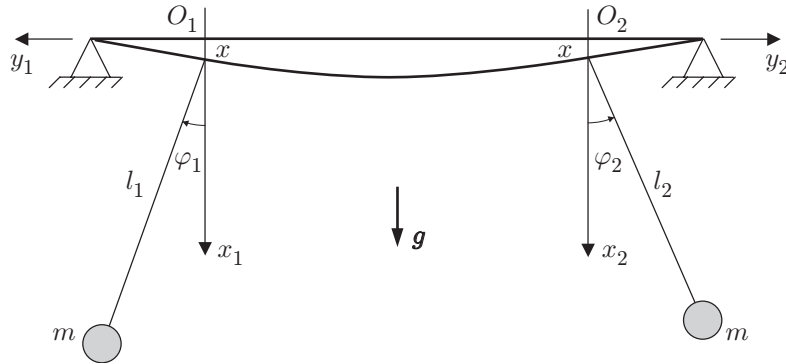


Рис. 1

где ω_0 — частота свободных колебаний балки с присоединенными массами без маятников; g — ускорение свободного падения. Уравнения движения принимают вид

$$(M + 2m)\ddot{x} - m \sum_{i=1}^2 l_i (\varphi_i \ddot{\varphi}_i + \dot{\varphi}_i^2) = -M\omega_0^2 x + Q_x, \quad (1)$$

$$ml_i^2 \ddot{\varphi}_i - ml_i \varphi_i \ddot{x} = -mgl_i \varphi_i + Q_i, \quad i = 1, 2.$$

Здесь Q_x — сила линейного трения в балке; Q_i — силы нелинейного трения по Ван-дер-Полю. Эти обобщенные силы представим в форме

$$\frac{Q_x}{M + 2m} = -\varepsilon_0 \dot{x}, \quad \frac{Q_i}{l_i m} = \varepsilon_i \left(1 - \frac{S_i^2}{S_0^2}\right) \dot{S}_i,$$

где $\varepsilon_0, \varepsilon_i$ — коэффициенты трения; $S_i = l_i \varphi_i$; S_0 — отклонения маятников, при которых демпфирование меняет знак.

Уравнения (1) запишем в виде

$$x'' + 2 \frac{\varepsilon_0}{\omega} x' + 4 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} x = \mu [(y_1^2)'' + (y_2^2)''], \quad y_i'' + \left(a_i - \frac{x''}{l_i}\right) y_i = \delta (1 - y_i^2) y_i', \quad (2)$$

где

$$\frac{M}{M + 2m} \omega_0^2 = \omega_0^2, \quad \frac{m S_0^2}{2l_1(M + 2m)} \approx \frac{m S_0^2}{2l_2(M + 2m)} = \mu,$$

$$\frac{S_i}{S_0} = y_i, \quad a_i = \frac{4\omega_i^2}{\omega^2}, \quad \frac{g}{l_i} = \omega_i^2, \quad 2 \frac{\varepsilon_1 S_0^2}{\omega l_1} \approx 2 \frac{\varepsilon_2 S_0^2}{\omega l_2} = \delta.$$

В уравнениях (2) штрих означает дифференцирование по безразмерному времени $z = \omega t/2$ (ω — неизвестная частота колебаний балки). В коэффициентах при малых нелинейных слагаемых и в коэффициентах демпфирования по Ван-дер-Полю принято $l_1 \approx l_2$.

2. Синхронный режим целесообразно искать, применяя принцип гармонического баланса. Предположим, что колебания балки происходят по гармоническому закону: $x = -X \cos 2z$. Подставив представление для x в уравнения (2), получим

$$(1 - \omega_0^2/\omega^2)q \cos 2z + \delta_0 q \sin 2z = \nu [(y_1^2)'' + (y_2^2)'']; \quad (3)$$

$$y_i'' + (a_i - 2q \cos 2z) y_i = \delta (1 - y_i^2) y_i', \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

Здесь $q = 2X/l$, $\delta_0 = \varepsilon_0/\omega$, $\nu = 32\mu/l$ ($l_1 \approx l_2 = l$).

Уравнения (4) без правой части являются уравнениями Матье. Непосредственное применение к подобным уравнениям принципа гармонического баланса затруднительно, так как переменные коэффициенты после умножения на гармонические функции приближенного решения дают комбинационные гармоники. Чтобы учесть параметрическое возбуждение, необходимо внести комбинационные гармоники в приближенное решение, что усложняет выкладки. Поэтому здесь применяется прием предварительного освобождения в уравнении от слагаемого с переменным коэффициентом [6]. Решения уравнений (4) — установившиеся движения в области предполагаемого главного параметрического резонанса — будем искать в форме

$$y_i \approx C_i \operatorname{ce}_1(z, q) + D_i \operatorname{se}_1(z, q). \quad (5)$$

Здесь $\operatorname{ce}_1(z, q)$, $\operatorname{se}_1(z, q)$ — функции Матье первого порядка; C_i , D_i — постоянные, подлежащие определению. Подстановка этого решения в уравнения (4) дает

$$(C_i \operatorname{ce}_1(z, q) + D_i \operatorname{se}_1(z, q))'' + (a_i - 2q \cos 2z)(C_i \operatorname{ce}_1(z, q) + D_i \operatorname{se}_1(z, q)) = \delta(1 - y_i^2)y_i'.$$

Учитывая, что функции Матье первого порядка удовлетворяют уравнению Матье при собственных значениях $a_c^{(1)}$ и $a_s^{(1)}$, найдем

$$(a_i - a_c^{(1)})C_i \operatorname{ce}_1(z, q) + (a_i - a_s^{(1)})D_i \operatorname{se}_1(z, q) = \delta(1 - y_i^2)y_i'. \quad (6)$$

Представим здесь и в приближенном решении (5) функции Матье начальными функциями их разложения по степеням q

$$\operatorname{ce}_1(z, q) \approx \cos z, \quad \operatorname{se}_1(z, q) \approx \sin z$$

и введем в колебания маятников фазовые сдвиги α_i :

$$y_i = A_i \cos(z - \alpha_i).$$

Приравнявая, согласно принципу гармонического баланса, в (6) коэффициенты при одинаковых гармониках и учитывая, что

$$C_i = A_i \cos \alpha_i, \quad D_i = A_i \sin \alpha_i,$$

для каждого маятника получим систему двух уравнений

$$(a_i - a_c^1) \cos \alpha_i = \delta(1 - A_i^2/4) \sin \alpha_i, \quad (a_i - a_s^1) \sin \alpha_i = -\delta(1 - A_i^2/4) \cos \alpha_i. \quad (7)$$

Используя известные ряды для собственных значений функций Матье, полагаем

$$a_c^{(1)} = 1 + q - q^2/8 - \dots \approx 1 + q, \quad a_s^{(1)} = 1 - q - q^2/8 + \dots \approx 1 - q.$$

Исключая α_i из уравнений (7), получим

$$(a_i - 1)^2 - q^2 + \delta^2(1 - A_i^2/4)^2 = 0.$$

Отсюда следует, что при малом параметрическом возбуждении q и $a_i \approx 1$ относительные амплитуды колебаний маятников близки к значениям $A_i \approx 2$.

Подставляя представления для y_i в уравнение (3) и определяя коэффициенты при $\cos 2z$ и $\sin 2z$, находим

$$(1 - \omega_0^2/\omega^2)q = -\nu(\cos 2\alpha_1 + \cos 2\alpha_2)/2, \quad \delta_0 q = -\nu(\sin 2\alpha_1 + \sin 2\alpha_2)/2. \quad (8)$$

Таким образом, система уравнений для синхронного режима состоит из четырех уравнений (7) ($i = 1, 2$) и двух уравнений (8).

3. Среди возможных синхронных режимов попытаемся обнаружить режим Гюйгенса $\alpha_1 = \alpha_2$. Введем обозначения

$$A_i^2 = 4(1 + \gamma_i), \quad \omega^2 = \omega_0^2/(1 + \beta), \quad 4\omega_i^2 = \omega_0^2(1 + \tau_i).$$

Тогда $a_i = 1 + \beta + \tau_i + \beta\tau_i = 1 + \Delta_i$. Система уравнений (7) примет вид

$$(\Delta_i - q) \cos \alpha_i = -\delta\gamma_i \sin \alpha_i, \quad (\Delta_i + q) \sin \alpha_i = \delta\gamma_i \cos \alpha_i. \quad (9)$$

Разделив первое уравнение (9) на второе для каждого i и используя формулу двойного аргумента для косинуса, получим

$$\cos 2\alpha_i = \Delta_i/q, \quad \sin 2\alpha_i = -\sqrt{1 - \Delta_i^2/q^2}. \quad (10)$$

Для обоих маятников величины $\sin 2\alpha_i$ должны быть отрицательными, чтобы второе уравнение (8) выполнялось для не слишком малых δ_0 и не приводило к вырожденному случаю $\delta_0 = 0$ при движении одинаковых маятников.

При строгом равенстве начальных фаз из соотношений (10) следует $\Delta_1 = \Delta_2$, что соответствует тривиальному случаю движения одинаковых маятников ($\tau_1 = \tau_2$). Пусть малая величина χ характеризует различие хода отдельных изолированных часов. Введем малую разность начальных фаз маятников η :

$$\tau_1 = \tau + \chi/2, \quad \alpha_1 = \alpha + \eta/2, \quad \tau_2 = \tau - \chi/2, \quad \alpha_2 = \alpha - \eta/2.$$

Тогда из формул (10) следует

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha_1 &= \cos 2\alpha - \eta \sin 2\alpha = \Delta/q + (1 + \beta)\chi/(2q), \\ \cos 2\alpha_2 &= \cos 2\alpha + \eta \sin 2\alpha = \Delta/q - (1 + \beta)\chi/(2q), \end{aligned} \quad (11)$$

где $\Delta = \beta + \tau + \beta\tau$.

Из выражений (11) получим зависимость между χ и η

$$\eta = -(1 + \beta)\chi/(2q \sin 2\alpha) \quad \text{или} \quad \eta = k(\alpha)\chi \quad (12)$$

и выражения для определения среднего значения начальных фаз

$$\cos 2\alpha = \Delta/q, \quad \sin 2\alpha = -\sqrt{1 - \Delta^2/q^2}, \quad \alpha < 0. \quad (13)$$

Учитывая, что

$$\sin 2\alpha_1 = \sin 2\alpha + \eta \cos 2\alpha, \quad \sin 2\alpha_2 = \sin 2\alpha - \eta \cos 2\alpha,$$

из уравнений (8) найдем

$$\beta q = \nu \cos 2\alpha, \quad \delta_0 q = -\nu \sin 2\alpha.$$

Отсюда

$$\beta = -\delta_0 \operatorname{ctg} 2\alpha, \quad q = -(\nu/\delta_0) \sin 2\alpha. \quad (14)$$

При расчете синхронного режима выберем некоторое значение δ_0 . При известном коэффициенте ε_0 это значение δ_0 может быть уточнено после определения частоты колебаний ω . Задавая среднее значение начальных фаз α , последовательно из соотношений (14), (13) и (11) найдем величины β , q , Δ , τ , а также коэффициент $k(\alpha)$ в (12). Для конкретных данных можно считать известными средние значения собственных частот маятников и собственную частоту балки, т. е. величину $\tau(\alpha)$. На практике представляет интерес случай $\tau < 0$ ($|\alpha| < \pi/4$), когда собственная частота балки более чем в два раза превышает среднюю собственную частоту маятников. На рис. 2 приведена расчетная зависимость $\beta(\alpha)$, из которой следует, что частота колебаний балки необязательно совпадает с ее собственной частотой. В расчете принято $\delta_0 = 0,02$.

4. Оценим величины χ и η . Пусть $T = 86\,400$ с — продолжительность суток, T_i — период колебаний i -го маятника. Для определенности примем $\omega_1 > \omega_2$. Тогда суточная разность хода n (разность числа колебаний маятников за сутки) составляет

$$n = T/T_1 - T/T_2 = T(\omega_1 - \omega_2)/(2\pi).$$

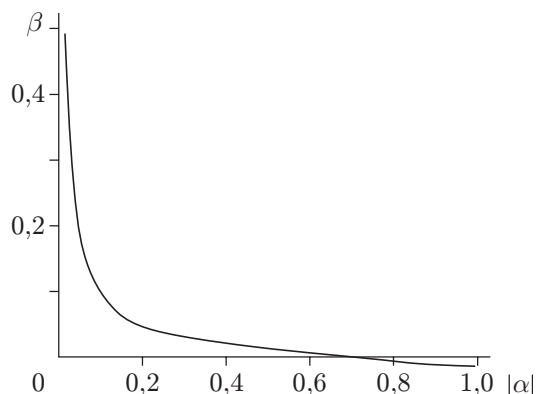


Рис. 2

Учитывая, что

$$\omega_i = \frac{\omega_0}{2} (1 + \tau_i)^{1/2} = \frac{\omega_0}{2} (1 + \tau)^{1/2} \pm \frac{\omega_0}{4} \frac{\chi}{(1 + \tau)^{1/2}},$$

найдем

$$\chi = (1 + \tau)nT_{\text{ср}}/T,$$

где $T_{\text{ср}}$ — средний период колебаний маятников. По данным Гюйгенса [1] $T_{\text{ср}} \approx 1$ с. Если ограничиться неположительными значениями τ , то при $n = 1$ $\max \chi \approx 1,15 \cdot 10^{-5}$.

В работе [1] рассматриваются два судовых хронометра в футлярах, отягощенных приблизительно 100 фунтами свинца. Такие массы должны значительно уменьшать собственную частоту балки, что способствует приближению ее к удвоенной частоте маятников. Заметим, что хронометры использовались для определения положения судна по долготе, при этом ошибка хода часов, равная одному колебанию секундного маятника за сутки, соответствует погрешности определения долготы, равной примерно 500 м за сутки (на экваторе). Таким образом, число n не может превышать нескольких единиц.

Из расчета коэффициента $k(\alpha)$ по формуле (12) получаем $175 < k(\alpha) < 1600$ при $0,175 < |\alpha| < \pi/4$. При этом разность начальных фаз маятников находится в интервале $0,002 < \eta < 0,018$ ($n = 1$). При различии хода часов, равном нескольким колебаниям маятников за сутки, разность начальных фаз останется практически незаметной.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гюйгенс Х.** Три мемуара по механике: Пер. с лат. / Под ред. К. К. Баумгарта. М.: Изд-во АН СССР, 1951. С. 30, 31.
2. **Минорский Н.** О синхронизации. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1961.
3. **Блехман И. И., Марченко Ю. И.** Синхронизация квазилинейных осцилляторов, связанных посредством сложной колебательной системы // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1973. № 6. С. 30–35.
4. **Лурье А. И.** Некоторые задачи самосинхронизации // Тр. V Междунар. конф. по нелинейным колебаниям, Киев, 25 авг. — 4 сент. 1969 г. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1970. Т. 3. С. 440–455.
5. **Вибрации** в технике: Справ. М.: Машиностроение, 1979. Т. 2. С. 229–233.
6. **Лампер Р. Е.** Введение в теорию нелинейных колебаний авиаконструкций. М.: Машиностроение, 1985.