УДК 539.3+539.4

ДИНАМИЧЕСКАЯ КОМПАКТНОСТЬ СВЯЗНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ ВОЛН В НЕПРЕРЫВНО-НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Ю. В. Немировский, К. М. Шлемензон

(*Новосибирск*)

В данной работе выполнен анализ динамической задачи связной термоупругости при самом общем типе неоднородности и анизотропии. Доказана гиперболичность системы уравнений связной термоупругости, исследованы эффекты гашения отдельных волн наложением упругих и термоупругих волновых фронтов, определена взаимосвязь между различными порядками разрывов напряжений, перемещений и температуры. Особо проанализирован случай несвязной задачи термоупругости. Получены достаточные условия динамической компактности для волновых процессов термоупругости, ранее исследованные для краевых задач гиперболических систем дифференциальных уравнений второго порядка [1] и упругих волн напряжений [2]. Использована общепринятая система тензорных обозначений теории термоупругости [3].

1. Полная система уравнений линейной термоупругости с учетом взаимосвязи температурных и механических полей при конечной скорости распространения тепла (см. [4]) состоит из

уравнения теплового баланса

$$\nabla_j q^j + c_\varepsilon \dot{\Theta} + \eta T_0 \beta^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} = 0; \tag{1.1}$$

закона теплопроводности

$$\tau \dot{q}^j + q^j = -k^{ij}\Theta_{,i}; \tag{1.2}$$

уравнений движения

$$\rho^{-1}\nabla_j \sigma^{ij} = \ddot{u}^i; \tag{1.3}$$

уравнений Коши

$$\varepsilon_{ij} = 0{,}5(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) \tag{1.4}$$

и закона Дюгамеля — Неймана

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl}\nabla_k u_l - \beta^{ij}\,\Theta \text{ или } \varepsilon_{ij} = E_{ijkl}\sigma^{kl} + \alpha_{ij}\Theta. \tag{1.5}$$

При $\tau = 0$, $\eta = 1$ эта система уравнений вырождается в обычную систему уравнений связной термоупругости с законом теплопроводности Фурье [3], а при $\eta = 0$ имеем несвязную задачу термоупругости. Исключая из (1.1)—(1.5) соответствующие переменные, получим разрешающую систему для напряжений и температуры

$$-\nabla_j(k^{ij}\,\nabla_i\Theta) + (c_\varepsilon + \eta T_0 H_1)(\dot{\Theta} + \tau\ddot{\Theta}) + \eta T_0 \alpha_{kl}(\dot{\sigma}^{kl} + \tau\ddot{\sigma}^{kl}) = 0, \tag{1.6}$$
$$C^{ljki}\nabla_k\left(\rho^{-1}\nabla_s \sigma^{s}_{.i}\right) = \ddot{\sigma}^{lj} + \beta^{lj}\ddot{\Theta},$$

где $H_1 = \alpha_{ij}\beta^{ij}$ — инвариант.

В отсутствие температурных эффектов вторая группа уравнений (1.6) совпадает с уравнениями, полученными в работе [2].

Рассмотрим полубесконечную покоящуюся термоупругую среду, ограниченную поверхностью S. В начальный момент времени ($t = 0$) поверхность S подвергается возмущениям температуры, на части поверхности S_u заданы скорости смещений, а на остальной части S_σ известны напряжения:

$$\sigma^{ij}\nu_j|_{S_\sigma} = N^i(x^\alpha)\,Q(t)\,H(t), \tag{1.7}$$

$$v^i|_{S_u} = V^i(x^\alpha)\,Q(t)\,H(t), \quad \Theta|_S = F(x^\alpha)\,Q(t)\,H(t),$$

$$\sigma^{ij},\ u^i,\ \Theta \to 0 \text{ при } |x| \to \infty,$$

$$\sigma^{ij} = \dot\sigma^{ij} = u^i = \dot u^i = \Theta = \dot\Theta = 0 \text{ при } t = 0,$$

где $v^i = \dot u^i$ — скорости смещения; $|x|$ — расстояние от поверхности S.

Функцию Q будем считать произвольной обобщенной функцией времени, для которой существует преобразование Лапласа. В изображениях представление для Q имеет вид [1]

$$\tilde Q = \sum_{n=n_*}^{\infty} \frac{Q_{(n)}}{p^{n+1}}. \tag{1.8}$$

Для определения решения краевой задачи (1.6), (1.7) воспользуемся представлением решения из работ [1, 2]

$$\left\{\begin{aligned} \sigma^{ij} &= z^{ij}(x^\alpha, \Omega)\,H(\Omega) = \sum_{n=n_0}^{-1} z^{ij}_{(n)}(x^\alpha)\,\delta^{-(1+n)}(\Omega) + \\ &\qquad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{ij}_{(n)}(x^\alpha)\,\Omega^n}{n!} H(\Omega), \\ u^j &= f^j(x^\alpha, \Omega)\,H(\Omega) = \sum_{n=n_1+1}^{-1} f^j_{(n)}(x^\alpha)\,\delta^{-(1+n)}(\Omega) + \\ &\qquad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^j_{(n)}(x^\alpha)\,\Omega^n}{n!} H(\Omega), \\ \Theta &= T(x^\alpha, \Omega)\,H(\Omega) = \sum_{n=n_2}^{-1} T_{(n)}(x^\alpha)\,\delta^{-(1+n)}(\Omega) + \\ &\qquad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_{(n)}(x^\alpha)\,\Omega^n}{n!} H(\Omega); \end{aligned}\right. \tag{1.9}$$

$$\Omega = t - \omega(x^\alpha) \tag{1.10}$$

или в изображениях

$$\tilde\sigma^{ij} = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{z^{ij}_{(n)}}{p^{n+1}} e^{-p\omega}, \quad \tilde u^j = \sum_{n=n_1+1}^{\infty} \frac{f^j_{(n)}}{p^{n+1}} e^{-p\omega}, \tag{1.11}$$

$$\tilde\Theta = \sum_{n=n_2}^{\infty} \frac{T_{(n)}}{p^{n+1}} e^{-p\omega}.$$

Величины n_0, n_1, n_2 могут иметь отрицательные, но конечные значения. Функция $\omega(x^\alpha)$ — заранее неизвестная гладкая функция координат; p — параметр преобразования Лапласа.

2. Определим условия динамической совместности разрывов для системы уравнений термоупругости. Подставив (1.11) в трансформированные с учетом нулевых начальных данных уравнения (1.3), собирая члены при одинаковых степенях p, получим

$$\rho f^j_{(n)} = \nabla_i z^{ij}_{(n-2)} - z^{ij}_{(n-1)}\omega_{,i}, \tag{2.1}$$

а подставив (1.11) в трансформированные уравнения (1.5), имеем

$$z^{ij}_{(n)} = C^{ijkl}(\nabla_k f_{l(n)} - \omega_{,k} f_{l(n+1)}) - \beta^{ij} T_{(n)}. \tag{2.2}$$

Будем называть минимальным порядком разрыва функции, представленной рядом типа (1.9), то значение n, с которого начинаются ненулевые члены разложения.

Из (2.1) следует $n_1 \leqslant n_0$, а из (2.2) тогда $n_2 \geqslant n_0$. Если $T_{(n_0)} = 0$, то $n_1 = n_0$. В частности, при отсутствии тепловых эффектов минимальный порядок разрыва перемещения всегда на единицу больше порядка разрыва напряжения. Если порядки минимальных разрывов напряжений и температуры совпадают, то могут быть исключительные ситуации.

Рассмотрим (2.1) для $n = n_0 + 1$:

$$\rho f^{j}_{(n_0+1)} = -\omega_{,i} z^{ij}_{(n_0)}. \tag{2.3}$$

Пусть $f^{j}_{(n_0+1)} = 0$. В соответствии с (2.3) это эквивалентно тому, что минимальный разрыв вектора напряжения [2] на фронте волны равен нулю. В этом случае из (2.2) имеем

$$z^{ij}_{(n_0)} = -\beta^{ij} T_{(n_0)}. \tag{2.4}$$

Следовательно, если поверхность волнового фронта свободна от напряжения (значение $n_0 = 0$), то разрыв скорости перемещения также отсутствует ($n_1 \geqslant n_0 + 1$), а компоненты разрыва тензора напряжения на поверхностях, не совпадающих с поверхностью фронта, определяются формулами (2.4).

Подставляя (1.11) в трансформированные с учетом нулевых начальных данных уравнения (1.6) и собирая члены при одинаковых степенях p, получим рекуррентные уравнения вида

$$\begin{gathered} B_1\left(T_{(n-2)}\right) - B_2\left(T_{(n-1)}, z^{ij}_{(n-1)}\right) = B_3\left(T_{(n)}, z^{ij}_{(n)}\right), \\ B_4^{kl}\left(z^{ij}_{(n-2)}\right) + B_5^{kl}\left(z^{ij}_{(n-1)}\right) = B_6^{kl}\left(T_{(n)}, z^{ij}_{(n)}\right), \\ n = n_0, \quad n_0 + 1, \ldots, \end{gathered} \tag{2.5}$$

где соответствующие операторы определяются по формулам

$$\begin{gathered} B_3(T, z^{ij}) = [\tau(c_\varepsilon + \eta T_0 H_1) - k^{ij}\omega_{,i}\omega_{,j}]T + \eta T_0 \tau \alpha_{kl} z^{kl}, \\ B_6^{kl}\left(T, z^{ij}\right) = \rho^{-1} C^{klij} \omega_{,i}\omega_{,s} z^{s\cdot}_{\cdot j} - z^{kl} - \beta^{kl} T, \\ B_2(T, z^{ij}) = \nabla_j(k^{ij}\omega_{,i}T) + k^{ij}\omega_{,j}T_{,i} + (c_\varepsilon + \eta T_0 H_1)T + \eta T_0 \alpha_{kl} z^{kl}, \\ B_5^{kl}\left(z^{ij}\right) = C^{klij}\left\{\nabla_i\left(\rho^{-1}\omega_{,s} z^{s\cdot}_{\cdot j}\right) + \rho^{-1}\omega_{,i}\nabla_s z^{s\cdot}_{\cdot j}\right\}, \\ B_1(T) = \nabla_j\left(k^{ij} T_{,i}\right), \quad B_4^{kl}\left(z^{ij}\right) = -C^{klij}\nabla_i\left(\rho^{-1}\nabla_s z^{s\cdot}_{\cdot j}\right). \end{gathered}$$

3. Рассмотрим уравнения (2.5) для $n = n_0$. Путем соответствующих [2] линейных преобразований самих переменных $z^{ij}_{(n_0)}$, а также строк матрица при неизвестных данных однородных алгебраических уравнений может быть приведена к виду

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \zeta^{l}_{(n_0)} & T_{(n_0)} & z^{12}_{(n_0)} & z^{13}_{(n_0)} & z^{23}_{(n_0)} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c:c:ccc} & & 0 & 0 & 0 \\ \rho^{-1} C^{ijk\cdot}_{\cdots l}\,\omega_{,j}\omega_{,k} - \delta^i_l & -\beta^{ik}\omega_{,k} & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline \rho^{-1}\eta\tau T_0 \beta^{k\cdot}_{\cdot l}\,\omega_{,k} & \tau c_\varepsilon - k^{sj}\omega_{,s}\omega_{,j} & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline \rho^{-1} C^{12k\cdot}_{\cdots l}\,\omega_{,k} & -\beta^{12} & -1 & 0 & 0 \\ \rho^{-1} C^{13k\cdot}_{\cdots l}\,\omega_{,k} & -\beta^{13} & 0 & -1 & 0 \\ \rho^{-1} C^{23k\cdot}_{\cdots l}\,\omega_{,k} & -\beta^{23} & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \end{array}. \tag{3.1}$$

Здесь

$$\zeta^l_{(n_0)} = z^{li}_{(n_0)}\omega_{,i} = R^l_{(n_0)} G_n^{-1}, \tag{3.2}$$

$R^l_{(n)}$ — коэффициенты разложения вектора напряжения на фронте волны в ряд, аналогичный рядам (1.9); G_n — скорость распространения фронта волны по нормали к фронту. В (3.1) над столбцами матрицы выписаны те переменные, которые перед ними стоят.

Преобразования (3.2) можно обратить (индекс n_0 опускаем):

$$z^{11} = \omega_{,1}^{-1}(\zeta^1 - \omega_{,2} z^{12} - \omega_{,3} z^{13}),$$

$$z^{22} = \omega_{,2}^{-1}(\zeta^2 - \omega_{,1} z^{12} - \omega_{,3} z^{23}), \quad z^{33} = \omega_{,3}^{-1}(\zeta^3 - \omega_{,1} z^{13} - \omega_{,2} z^{23}).$$

Проделав аналогичные линейные преобразования для уравнений (2.5), при значениях $n = n_0 + 1, \ldots$ приведем рекуррентные уравнения к виду

$$R^k_1(T_{(n)}, \zeta^i_{(n)}) = R^k_2(T_{(n-1)}, \zeta^i_{(n-1)}) + R^k_3(T_{(n-2)}, \zeta^i_{(n-2)}), \tag{3.3}$$

$$k = 1, 2, \ldots, 7,$$

$$\text{где} \quad R^k_m(T, \zeta^i) = F^{kl}_m(T, \zeta^i)\,\omega_{,l} \quad \text{для } k = 1, 2, 3;$$

$$R^4_1(T, \zeta^i) = \rho^{-1}\eta\tau T_0 \beta^{k\cdot}_{\cdot l}\omega_{,k}\zeta^l - (k^{sj}\omega_{,s}\omega_{,j} - \tau c_\varepsilon)\,T;$$

$$R^4_2(T, \zeta^i) = \beta^{i\cdot}_{\cdot j}\eta\tau T_0\rho^{-1}\{\nabla_i(\rho^{-1}\zeta^j) + \rho^{-1}\omega_{,i}\nabla_s z^{sj}\} - \nabla_j(k^{ij}\omega_{,i}T) -$$

$$- k^{ij}\omega_{,j}T_{,i} - (c_\varepsilon + \eta T_0 H_1)\,T - \eta T_0 \alpha_{kl} z^{kl};$$

$$R^4_3(T, \zeta^i) = \nabla_j(k^{ij}T_{,i}) - \beta^{i\cdot}_{\cdot j}\eta\tau T_0\rho^{-1}\nabla_i(\rho^{-1}\nabla_s z^{sj});$$

$$R^m_j(T, \zeta^i) = F^{kl}_j(T, \zeta^i) \quad (m = 5 \text{ при } kl = 12; \quad m = 6,$$

$$\text{при } kl = 13; \quad m = 7 \text{ при } kl = 23);$$

$$F^{kl}_1(T, \zeta^i) = \rho^{-1}C^{kls\cdot}_{\cdots j}\omega_{,s}\zeta^j - \beta^{kl}T - \delta^k_j\delta^l_r z^{jr},$$

$$F^{kl}_2(T, \zeta^i) = C^{kli\cdot}_{\cdots j}\{\nabla_i(\rho^{-1}\zeta^j) + \rho^{-1}\omega_{,i}\nabla_s z^{sj}\},$$

$$F^{kl}_3(T, \zeta^i) = -C^{kli\cdot}_{\cdots j}\nabla_i(\rho^{-1}\nabla_s z^{sj}).$$

Причем $z^{ij}_{(n)}$ рекуррентно выражаются через $\zeta^i_{(n)}, \zeta^i_{(n-1)}, \ldots$ по формуле

$$z^{ij}_{(n)} = \rho^{-1}C^{ijk\cdot}_{\cdots l}\omega_{,k}\zeta^l_{(n)} - \beta^{ij}T_{(n)} - F^{ij}_2(T_{(n-1)}, \zeta^l_{(n-1)}) - \tag{3.4}$$

$$- F^{ij}_3(T_{(n-2)}, \zeta^l_{(n-2)}).$$

Из уравнения (3.4) сразу видно, что по известным трем компонентам вектора напряжения (ζ^j) и температуре шесть компонент тензора напряжения (z^{ij}) определяются лишь посредством алгебраических операций и дифференцированием. С использованием аналогичных процедур соотношениями (2.1) определяется вектор перемещения. В связи с этим сведем решение краевой задачи (1.6), (1.7) к задаче определения $\zeta^j_{(n)}$, $T_{(n)}$ ($n = n_0, \ldots$). Уравнения движения в этих переменных уже получены — это уравнения (3.3) для значений $k = 1, 2, 3, 4$, в которых $z^{ij}_{(n)}$ выражены по формулам (3.4). Отметим, что в этих уравнениях при $n = h$ правые части в общем случае будут зависеть от коэффициентов разложения с номерами $h-1, h-2, \ldots, n_0$.

Получим краевые условия. Так как все волновые фронты образуются на поверхности S, пользуясь формулами [2]

$$\nu_j = -\omega_{,j}G_n, \quad G_n = -|\nabla\omega|^{-1},$$

краевые условия (1.7) перепишем в виде

$$\sum_{j=1}^{L} z^{ij}_{(n)}\omega^{(\gamma)}_{,j}G^{(\gamma)}_n\big|_{S_\sigma} = N^iQ_{(n)}, \tag{3.5}$$

$$\sum_{\gamma=1}^{L} \rho^{-1}\left[\nabla_j z^{ij(\gamma)}_{(n-1)} - \zeta^{i(\gamma)}_{(n)}\right]\big|_{S_u} = V^iQ_{(n)}, \quad \sum_{\gamma-1}^{L} T^{(\gamma)}_{(n)}\big|_S = FQ_{(n)},$$

где γ соответствует номеру фронта; L — число волновых фронтов задачи.

4. Для дальнейшего исследования вопросов разрешимости рекуррентных уравнений докажем гиперболичность системы уравнений термоупругости (1.1)—(1.5). Анализ будем проводить в декартовой системе координат. Можно показать, что матрица характеристического определителя системы уравнений термоупругости совпадает с матрицей (3.1) (если характеристическая поверхность ищется в виде $\Omega = 0$). Как известно [5], условие гиперболичности эквивалентно тому, чтобы в любой выбранной точке пространства вдоль любого выбранного направления существовало ровно 4 возможные скорости распространения волны (с учетом кратности скоростей). Иногда при наличии кратных характеристик системы уравнений называют слабогиперболическими [6].

Определитель матрицы (3.1) с точностью до множителя ρ^3 совпадает с определителем углового минора размерностью 4×4.

Запишем вспомогательную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных $p_i (i = 1, \ldots, 4)$

$$\sum_{j=1}^{4} \gamma_{ij}p_i = \delta_i p_i, \tag{4.1}$$

где

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji} = a_{ij} = C^{ikjl}\nu_k\nu_l; \quad \gamma_{4i} = \gamma_{i4} = \pi_i = \beta^{k\cdot}_{\cdot i}\nu_k \quad (i, j = 1, 2, 3);$$

$$\gamma_{44} = -\omega_1 = -c_\varepsilon T_0^{-1}; \quad \delta_i = \rho G_n^2; \quad \delta_4 = -\omega_2 G_n^{-2} = -(\tau T_0)^{-1}k^{sj}\nu_j\nu_s G_n^{-2}.$$

Определитель уравнений (4.1)

$$I = \left|\begin{array}{c:c} a_{ij} - \rho G_n^2\delta_{ij} & \pi_j \\ \hdashline \pi_i & \omega_2 G_n^{-2} - \omega_1 \end{array}\right| \tag{4.2}$$

с точностью до ненулевого множителя совпадает с характеристическим определителем уравнений термоупругости. Покажем, что все корни $\mu = G_n^2$ уравнения $I = 0$ вещественны.

Условие $I = 0$ эквивалентно существованию ненулевых решений p_j $(j = 1, \ldots, 4)$. Пусть $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ — комплексное значение одного из корней и ему соответствует решение p_j, которое, вообще говоря, также комплексное. Покажем, что $\mu_2 = 0$.

Выполним следующие преобразования с уравнениями (4.1):

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} \gamma_{ij}p_j\bar{p}_i = \sum_{i=1}^{4} \delta_i |p_i|^2 = \rho G_n^2 \sum_{i=1}^{3} |p_i|^2 - \omega_2 G_n^{-2}|q_4|^2. \tag{4.3}$$

Здесь черта обозначает комплексное сопряжение; $|\ldots|$ — модуль комплексного числа.

Так как матрица γ_{ij} $(i, j = 1, \ldots, 4)$ симметрична, то левая часть (4.3) вещественна. Приравняем поэтому мнимую часть правой части (4.3) нулю:

$$\left[\rho\sum_{i=1}^{3} |p_i|^2 + \omega_2 |q_4|^2 (\mu_1^2 + \mu_2^2)^{-1}\right]\mu_2 = 0.$$

Инвариант $\omega_2 = (\tau T_0)^{-1}k^{sj}\nu_j\nu_s$ — положительно определенная квадратичная форма [3]. Отсюда следует, что $\mu_2 \equiv 0$, поэтому значение G_n^2

вещественно. Покажем, что вещественно также значение G_n (т. е. $G_n^2 > 0$). Для этого умножим четвертую строку и четвертый столбец матрицы определителя (4.2) на G_n и выпишем соответствующую его матрице систему уравнений типа (4.1), для которой

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji} = a_{ij}, \quad \gamma_{4i} = \gamma_{i4} = \pi_i G_n, \quad \gamma_{44} = \omega_2, \quad \delta_i = \rho G_n^2,$$
$$\delta_4 = \omega_1 G_n^2 \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Повторим выкладки, аналогичные (4.3):

$$(4.4) \qquad \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij} p_j \bar{p}_i + G_n \sum_{i=1}^{3} \pi_i p_i \bar{p}_4 + G_n \sum_{i=1}^{3} \pi_i p_4 \bar{p}_i + \omega_2 |p_4|^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij} p_j \bar{p}_i + \omega_2 |p_4|^2 + 2G_n \sum_{i=1}^{3} \pi_i \operatorname{Re}(p_i p_4) = \rho G_n^2 \sum_{i=1}^{3} |p_i|^2 + \omega_1 G_n^2 |p_4|^2.$$

Правая часть (4.4) вещественна. Сумма в левой части также вещественна. Отсюда имеем вещественность G_n.

Таким образом, гиперболичность системы уравнений термоупругости доказана. Отметим, что если для доказательства гиперболичности системы уравнений теории упругости ($\Theta \equiv 0$) достаточно лишь выполнения первого закона термодинамики, обеспечивающего симметричность коэффициентов a_{ij}, то для термоупругости, кроме того, существенно необходимо выполнение второго закона термодинамики для положительной определенности квадратичной формы ω_2.

Так как гиперболичность системы уравнений термоупругости доказана, то практически, дословно повторяя рассуждения из работ [1, 2], можно показать, что для каждого значения n решение рекуррентных уравнений (2.5) сводится к системе, состоящей из 4-х дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Для значений $n \geqslant n_0 + 1$ уравнения будут иметь в общем случае неоднородную правую часть. Начальные условия для этих дифференциальных уравнений определяются из (3.5).

Таким образом, задача определения коэффициентов разложения рядов (1.9) свелась к задачам Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Предполагается, что выполняются все необходимые условия, обеспечивающие существование и единственность решений этих задач. Отсюда следует единственность в классе волновых решений задачи (1.6), (1.7), а при сходимости рядов (1.9) и существование решений.

Отметим, что система уравнений (1.6) сводится рекуррентным образом к решению задач Коши при самых общих правых частях условий (1.7). Единственное ограничение состоит в выполнимости условия принадлежности к пространству изображений по Лапласу.

5. Исследуем специально случай разрешимости рекуррентных уравнений (2.5) несвязной задачи ($\eta = 0$, $\tau \neq 0$), когда структура характеристического определителя имеет вид

$$(5.1) \qquad (\tau c_\varepsilon - k^{ij}\omega_{,i}\omega_{,j}) \det |C^{ij\cdot l}_{\cdot\cdot\cdot i}\omega_{,j}\omega_{,k} - \rho\delta_l^i| = 0.$$

Если находить ω из условия равенства нулю первого сомножителя, то определится фронт температурной волны. Для такого значения ω температура определяется независимо от напряжений. Если для данного ω второй сомножитель в (5.1) отличен от 0, т. е. фронт температурной волны не совпадает ни с каким фронтом упругой волны, то для определения скачков вектора напряжения для каждого значения n имеется невырожденная система линейных алгебраических уравнений с известной из решения температурной задачи правой частью. Так что на температурном фронте напряжения определяются из решения этих алгебраических уравнений. Остальные решения ω, определяемые из равенства нулю второго сомножителя уравнения (5.1), дадут фронты упругих волн. Так как первый сомножитель в (5.1) не равен нулю, то из (2.5) ($\eta = 0$) следует, что на этих фронтах $\Theta = 0$. Следовательно, разрывы напряжений на этих фронтах находятся тем же способом, что и в работе [2]. Таким образом, на фронте температурной волны разрывны напряжения и температура, тогда как на фронте упругой волны разрывны лишь напряжения. В случае совпадения температурного фронта с одним из фронтов упругой волны на этом фронте уравнение

$$(5.2)\qquad \left(C^{ijk\cdot}_{\dots l}\omega_{,k}\omega_{,j} - \delta^i_l\right)\zeta^l_{(n_0)} = \beta^{ij}\omega_{,j}T_{(n_0)}$$

с вырожденной матрицей при неизвестных $\zeta^l_{(n_0)}$ должно иметь нетривиальное решение. Для одномерной задачи $\left(\zeta^1_{(n_0)} \neq 0,\ \zeta^2_{(n_0)} = \zeta^3_{(n_0)} = 0\right)$ необходимо, чтобы $T_{(n_0)} = 0$, т. е. минимальный порядок разрыва температуры на данном фронте должен быть на единицу меньше порядка разрыва напряжения.

Для неодномерной задачи в общем случае также необходимо $T_{(n_0)} = 0$, но при определенных ситуациях это необязательно. Достаточно, чтобы решение для температуры и анизотропия среды были таковы, чтобы в (5.2) ранг матрицы при $\zeta^l_{(n_0)}$ и ранг расширенной матрицы совпадали. Можно построить простые примеры.

Особо отметим, что ограничения между значениями n_0 и n_2 в разложениях (1.9) имеют место лишь для решений (фактически для частных решений) системы рекуррентных дифференциальных уравнений (2.5), но не для краевых условий (1.8). Последние можно задавать независимо.

6. Рассмотрим условие динамической компактности связных термоупругих волн, когда на всей поверхности S краевые нагрузки задаются только для напряжений и температуры, т. е. в (1.7) $S_u = \varnothing$ — пустое множество.

Теорема. Условие динамической компактности волн для системы уравнений термоупругости (1.6) при нагрузках (1.7) (для $S_u = \varnothing$) заключается в выполнении следующей системы равенств (на всех фронтах одновременно):

$$(6.1)\qquad \begin{gathered}\left(\rho^{-1}C^{kls\cdot}_{\dots r}\omega_{,s}\omega_{,k} - \delta^l_r\right)\zeta^r - \beta^{ik}\omega_{,k}T = 0,\\ F^{kl}_2(T, \zeta^i) = F^{kl}_3(T, \zeta^i) = R^4_m(T, \zeta^i) = 0 \qquad (m = 1, 2, 3).\end{gathered}$$

Причем в соотношениях (6.1)

$$(6.2)\qquad z^{ij} = \rho^{-1}C^{ijk\cdot}_{\dots l}\omega_{,k}\zeta^l - \beta^{ij}T.$$

Доказательство. Воспользуемся леммой [1, 2], утверждающей, что условие динамической компактности эквивалентно тому, что импульсной (δ-функции от времени) краевой нагрузке на поверхности S соответствует решение — сумма волн, каждая из которых для фиксированного момента времени представляет собой δ-функцию по координате.

Пусть в разложениях (1.8) отличен от нуля лишь один член ряда — $Q_{(-1)}$. Докажем, что при выполнении условий (6.1) ряды (1.9) для напряжений и температуры будут содержать также по одному члену.

Во-первых, отметим, что формула (6.2) есть следствие соотношений (3.4), (6.1), утверждающая, что если ряд типа (1.9) для вектора напряжения состоит всего из одного коэффициента, то аналогичный ряд для тензора напряжения также содержит всего один член. Поэтому для доказательства леммы (а следовательно, и теоремы) достаточно показать, что при выполнении условий (6.1) одному члену разложения в ряд (1.8) функции $\tilde{Q}$ соответствует ряд из одного члена для вектора напряжения и температуры.

Начнем решать рекуррентную систему уравнений (3.3). После определения $\zeta^l_{(-1)}$, $T_{(-1)}$ для определения $\zeta^l_{(0)}$, $T_{(0)}$, $\zeta^l_{(1)}$, $T_{(1)}$ и т. д. на каждом этапе вычисления будем иметь задачу Коши для системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка, единственное решение которых нулевое. Таким образом, лемма верна и, следовательно, теорема доказана.

Замечание. Теорема верна лишь в том случае, если для разложений (1.9) значение $n_0 = n_2$. В случае $n_0 > n_2$ условия (6.1) примут несколько иной вид. В данной работе ввиду ограниченного объема этот вопрос не затрагивается.

7. Рассмотрим несколько преобразованные условия динамической компактности (6.1) для ортотропного неоднородного полупространства, когда несвязные волны напряжения σ^{11} и температуры Θ распространяются вдоль направления одной из осей симметрии материала x_1:

$$(\rho^{-1}a_{11}\omega_{,1}^2 - 1)\, z^{11} - \beta^{11}T = 0; \tag{7.1}$$

$$a_{11}(\rho^{-1}z^{11}\omega_{,1})_{,1} + \rho^{-1}\omega_{,1}z^{11} = 0; \tag{7.2}$$

$$(\rho^{-1}z^{11}_{,1})_{,1} = 0; \tag{7.3}$$

$$(\tau c_\varepsilon - k_{11}\omega_{,1}^2)\, T = 0; \tag{7.4}$$

$$c_\varepsilon T + (k_{11}\omega_{,1}T)_{,1} + k_{11}\omega_{,1}T_{,1} = 0; \tag{7.5}$$

$$(k_{11}T_{,1})_{,1} = 0, \tag{7.6}$$

где $a_{11} = C_{1111}$; z^{11}, T — разрывы напряжения и температуры.

Из (7.1), (7.4) получим два решения для $\omega_{,1}^2$:

$$\omega_{,1}^2 = \tau c_\varepsilon k_{11}^{-1}, \quad T = \varphi z^{11}, \quad \varphi = \frac{\rho^{-1}\omega_{,1}^2 - 1}{\beta_{11}}; \tag{7.7}$$

$$\omega_{,1}^2 = \rho a_{11}^{-1}, \quad T = 0. \tag{7.8}$$

В случае реализации соотношений (7.7) (фронт температурной волны) из (7.5) имеем

$$T = C_1 (k_{11}\omega_{,1})^{-1/2} \exp\left\{- {}^1/_2 \int c_\varepsilon (k_{11}\omega_{,1})^{-1} dx_1\right\}. \tag{7.9}$$

Здесь и далее символом C_α обозначены произвольные постоянные. Из (7.2) получим

$$z^{11} = C_2 \left(\rho\omega_{,1}^{-1}\right)^{1/2}. \tag{7.10}$$

Из (7.3), (7.6) следует

$$T = C_3 \int k_{11}^{-1} dx_1 + C_4, \quad z^{11} = C_5 \int \rho dx_1 + C_6. \tag{7.11}$$

Из требования совместности условий (7.7), (7.9)—(7.11) получим

$$C_1 (k_{11}\omega_{,1})^{-1/2} \exp\left\{- {}^1/_2 \int c_\varepsilon (k_{11}\omega_{,1})^{-1} dx_1\right\} = C_3 \int k_{11}^{-1} dx_1 + C_4; \tag{7.12}$$

$$C_2 \left(\rho\omega_{,1}^{-1}\right)^{1/2} = C_5 \int \rho dx_1 + C_6; \tag{7.13}$$

$$C_3 \int k_{11}^{-1} dx_1 + C_4 = \varphi C_2 \left(\rho\omega_{,1}^{-1}\right)^{1/2}. \tag{7.14}$$

При реализации (7.8) (случай упругой волны) совместность соотношений (7.1)—(7.6) требует выполнения лишь одного равенства

$$C_2 (\rho a_{11})^{1/4} = C_5 \int \rho dx_1 + C_6. \tag{7.15}$$

Соотношения (7.12)—(7.15) налагают ограничения на структуру среды, а за счет постоянных C_α — и на тип решения. Для динамической компактности лишь одной температурной волны достаточно выполнения уравнения (7.12), а для динамической компактности только упругой волны — равенства (7.15). Заметим, что (7.13) не может быть удовлетворено при свойствах полупространства, не зависящих от координаты x_1. Поэтому тепловая волна в однородном полупространстве распространяется с «диффузией». Упругая же одномерная волна в полупространстве распространяется без «диффузии».

8. Рассмотрим задачу об управлении числом волн. Пусть в уравнениях (3.3) $n=n_0$. Будем считать, что все скорости распространения волновых фронтов G_n некратные. Тогда на каждом решении $\omega_{(\gamma)}$ ранг углового минора матрицы (3.1) равен 3. Следовательно, система линейных алгебраических уравнений с неоднородной правой частью

$$\left(\rho^{-1}G_{n(\gamma)}^{-2}C_{\cdot\cdot\cdot l}^{ijk}\nu_{j(\gamma)}\nu_{k(\gamma)}-\delta_l^i\right)\zeta_{(\gamma)}^l=\beta^{ik}\nu_{k(\gamma)}G_{n(\gamma)}^{-1}T_{(\gamma)}$$

может быть разрешена относительно $\zeta_{(\gamma)}^l$

$$\zeta_{(\gamma)}^l=\eta_\gamma^l T_{(\gamma)} \tag{8.1}$$

(в используемых соотношениях индекс n_0 опущен, γ изменяется от 1 до 4).

Краевым условиям (в усилиях и температуре) должны удовлетворять суммы частных решений

$$\sum_{\gamma=1}^{4}\zeta_{(\gamma)}^l G_{n(\gamma)}\Big|_S=N_0^l,\quad \sum_{\gamma=1}^{4}T_{(\gamma)}\Big|_S=F_0. \tag{8.2}$$

Здесь $N_0^l=N^lQ_{(n_0)}$; $F_0=FQ_{(n_0)}$. Подставив (8.1) в (8.2), получим

$$\sum_{\gamma=1}^{4}\eta_\gamma^l G_{n(\gamma)}T_{(\gamma)}\Big|_S=N_0^l,\quad \sum_{\gamma=1}^{4}T_{(\gamma)}\Big|_S=F_0. \tag{8.3}$$

Ввиду единственности решения соответствующих задач Коши систему уравнений (8.3) можно разрешить относительно $T_{(\gamma)}|_S$ в виде

$$T_{(\gamma)}|_S=\pi_{\gamma l}N_0^l+\pi_{\gamma 4}F_0,$$

где коэффициенты $\pi_{\gamma l}$, $\pi_{\gamma 4}$ несложными соотношениями выражаются через $\eta_\gamma^l G_{n(\gamma)}$.

Вследствие некратности волновых фронтов на каждом решении существует лишь одна независимая функция $T_{(\gamma)}$. Для определения $T_{(n_0)}$ на каждом фронте имеем задачу Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка с однородной правой частью. Ввиду единственности решения задачи Коши имеем следствие: Если на поверхности S для фронта под номером γ выполняется условие

$$\pi_{\gamma l}N_0^l+\pi_{\gamma 4}F_0=0, \tag{8.4}$$

то на этом фронте минимальный порядок разрыва вектора напряжения и температуры на единицу больше, чем минимальный порядок разрыва для краевых условий. Если, кроме того, на этих фронтах выполняются условия динамической компактности (6.1), то фронты под этим номером не будут существовать. В последнем случае в (8.4) под N_0^l и F_0 следует понимать N^i и F.

Заметим, что для всех 4-х фронтов соотношение (8.4) удовлетворить невозможно.

Пусть соотношение (8.4) имеет место для $\gamma = 1, 2, 3$, т. е. $T_{(1)} = T_{(2)} = T_{(3)} = 0$. Тогда соотношение (8.3) будет иметь вид

$$\eta_4^l G_{n(4)} T_{(4)} \big|_S = N_0^l.$$

Определим выражение $\eta_4^l G_{n(4)}$. Имеем

$$-\zeta_{(4)}^i = \beta^{ik}\nu_{k(4)} G_{n(4)}^{-1} T_{(4)} - G_{n(4)}^{-2} C_{\cdots l}^{ijk}\nu_{j(4)}\nu_{k(4)}\zeta_{(4)}^l. \tag{8.5}$$

Подставив в (8.5) выражения из (8.2), имеющие вид

$$\zeta_{(4)}^l\big|_S = N_0^l G_{n(4)}^{-1}\big|_S, \quad T_{(4)}\big|_S = F_0,$$

получим

$$N_0^l = \left\{\beta^{lk}\nu_{k(4)} T_{(4)} - \rho^{-1} G_{n(4)}^{-2} C_{\cdots s}^{ljk}\nu_{j(4)}\nu_{k(4)} N_0^s\right\}\Big|_S. \tag{8.6}$$

Рассмотрим вырожденный случай. Пусть значение $\tau \to 0$. Из вида матрицы (3.1) следует, что $\omega_{(4)} \to 0$, отсюда скорость распространения фронта $G_{n(4)} \to \infty$. Тогда из (8.6) получим, что в этом предельном случае

$$N_0^l = \beta^{lk}\nu_k F_0. \tag{8.7}$$

С л е д с т в и е. Если при тепловом и механическом ударе по поверхности S для связной или несвязной задачи термоупругости (без учета конечной скорости распространения теплового потока) краевые нагрузки удовлетворяют условию (8.7), то вектор напряжения на фронте волны не терпит разрыва.

Справедливость последнего следствия можно проверить для частных примеров теплового удара по поверхности изотропного полупространства [3] и сферы [7]. Решение отдельных задач по управлению термоупругих волн сообщалось ранее [8].

Поступила 4 III 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. **Немировский Ю. В., Шлемензон К. М.** Динамическая компактность волновых процессов, описываемых гиперболическими системами дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 39. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1979.
2. **Немировский Ю. В., Шлемензон К. М.** К вопросу о распространении упругих волн напряжений в непрерывно-неоднородных анизотропных средах.— ПМТФ, 1979, № 5.
3. **Новацкий В.** Теория упругости. М., Мир, 1975.
4. **Гонсовский В. Л., Россихин Ю. А.** О волнах ускорений в анизотропных упругих средах с учетом конечной скорости распространения тепла.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 6.
5. **Петровский И. Г.** Лекции об уравнениях в частных производных. М., Физматгиз, 1961.
6. **Адамар Ж.** Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М., Наука, 1978.
7. **Новацкий В.** Динамические задачи термоупругости. М., Мир., 1971.
8. **Немировский Ю. В., Шлемензон К. М.** Особенности взаимодействия термосиловых полей в случае совместного удара по поверхности косоармированного полупространства.— В кн.: Тезисы докладов «XIV научное совещание по тепловым напряжениям в элементах конструкций». Киев, Наукова думка, 1977.