

УДК 532.5.031 + 51.72

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ПУЗЫРЬКОВ В АКУСТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Ю. А. Питюк*, Н. А. Гумеров**, О. А. Абрамова*,
И. А. Зарафутдинов*, И. Ш. Ахатов***

* Центр микро- и наномасштабной динамики дисперсных систем
Башкирского государственного университета, 450076 Уфа, Россия

** Институт передовых компьютерных исследований Мэрилендского университета,
21075 Колледж-Парк, США

*** Сколковский институт науки и технологий (Сколтех), 143026 Москва, Россия
E-mails: pityukyulia@gmail.com, gumerov@umiacs.umd.edu,
olgasolnyshkina@gmail.com, ilnurzaraf2@gmail.com, i.akhatov@skoltech.ru

С использованием метода граничных элементов для потенциальных течений исследуется трехмерная деформация двух пузырьков и пузырьков в кластере в идеальной несжимаемой жидкости под действием акустического поля. Изучается зависимость динамики двух взаимодействующих пузырьков от частоты и амплитуды акустического поля, расстояния между ними. Определены значения параметров акустического поля и кластера, при которых образуются струи, пузырьки деформируются или остаются сферическими. Исследуется поведение двух центральных пузырьков в структурированном кластере под действием акустического поля с различной частотой и амплитудой в зависимости от расстояния между пузырьками кластера. Проведен сравнительный анализ процесса деформации исследуемых пузырьков при наличии и отсутствии соседних пузырьков.

Ключевые слова: деформация пузырька, взаимодействие пузырьков, численное моделирование, метод граничных элементов, потенциальное течение.

DOI: 10.15372/PMTF20190409

Введение. В настоящее время большой интерес к исследованию пузырьков жидкостей наблюдается в биомедицине. Например, они используются при удалении зубного камня, разрушении камней в почках, доставке лекарств к пораженным органам, в качестве контрастного агента при ультразвуковом сканировании. Более того, пузырьковые жидкости могут применяться в качестве микронасосов в микромеханических устройствах, а также для очистки поверхностей микрочипов. Таким образом, пузырьковые среды используются для создания новых и совершенствования существующих технологических процессов. Для понимания проблем, связанных с применением газожидкостных систем,

Разработка программного кода выполнена в рамках партнерской программы Центра Сколтеха, изучение динамики двух отдельных пузырьков проведено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-31-00074), исследование динамики кластера пузырьков выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 18-71-00068).

© Питюк Ю. А., Гумеров Н. А., Абрамова О. А., Зарафутдинов И. А., Ахатов И. Ш., 2019

необходимо детальное изучение особенностей поведения пузырьков. В зависимости от исследуемых процессов выбираются различные математические модели и методы расчета, описывающие поведение пузырьков в жидкости.

В работе [1] исследуются сферически-симметричный рост и коллапс одиночного пузырька. При радиальных осцилляциях сферического пузырька в вязкой несжимаемой жидкости из дифференциальных уравнений Рэлея — Плессета [2] можно определить изменение радиуса пузырька и его радиальную скорость.

Взаимодействие двух пузырьков газа в акустическом поле описано В. Бьеркнесом в работе [3]. Сила, действующая на пузырек со стороны “первичного” (внешнего) акустического поля, называется первичной силой Бьеркнеса, а сила между двумя пузырьками, действующая со стороны “вторичного” акустического поля, — вторичной силой Бьеркнеса. После открытия Бьеркнеса появилось множество работ (см., например, [4, 5]), посвященных экспериментальному и теоретическому исследованию этих сил. В [4] показано, что характер взаимодействия пузырьков на расстоянии, соизмеримом с их размером, не описывается теорией Бьеркнеса [3], которая верна только для пузырьков, взаимодействующих на значительном расстоянии друг от друга. Нелинейные осцилляции двух взаимодействующих сферических пузырьков в несжимаемой жидкости исследовались в работе [5], в которой показано, что наличие нелинейных эффектов может привести к изменению знака силы взаимодействия, предсказанного линейной теорией [4].

Описанию коллективного поведения сферических пузырьков в акустических полях посвящено большое количество работ (см., например, [6, 7]). Однако пузырьки могут терять сферическую форму под действием первичных или вторичных сил Бьеркнеса. Динамика несферических пузырьков, особенно в трехмерном случае, изучена значительно меньше, поэтому является актуальным создание математических моделей и соответствующих программных модулей на основе эффективных методов и алгоритмов, наиболее точно описывающих деформацию пузырьков. Трехмерные задачи со свободными границами, для решения которых требуется высокая степень дискретизации поверхности, имеют большую вычислительную сложность. Для решения данной проблемы разработан вариант метода граничных элементов для моделирования динамики пузырьков в случае потенциального течения [8].

Метод граничных элементов (МГЭ) для потенциальных течений представлен в [9] и применялся для исследования динамики одиночного пузырька в двумерном случае вблизи твердой стенки и свободной поверхности в работах [10, 11], в которых изучался процесс образования и распространения струи в пузырьке. В трехмерном случае МГЭ применяется реже, несмотря на значительный интерес к трехмерному моделированию динамики реальных объектов. Работы [12, 13] посвящены изучению процесса взрыва под водой пузырьков, индуцированных лазером или искрой, в пренебрежении поверхностными и гравитационными силами. МГЭ применялся для потенциальных течений при изучении поверхностных колебаний одиночного пузырька [14] и динамики пузырька, находящегося в контакте с твердой поверхностью [15].

В настоящей работе проводится численный анализ взаимодействия двух пузырьков и динамики одиночных пузырьков в кластере при больших значениях числа Рейнольдса под действием акустического поля на основе метода граничных элементов.

1. Математическая модель. Рассматривается динамика газового пузырька в идеальной несжимаемой жидкости, течение которой описывается уравнениями Эйлера

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla. \quad (1.1)$$

Здесь p — давление; \mathbf{v} — скорость; ρ — плотность; \mathbf{g} — ускорение свободного падения. В предположении, что течение является потенциальным, уравнение (1.1) можно записать

в форме интеграла Коши — Лагранжа. В случае жидкости, покоящейся на бесконечности, имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + \frac{p}{\rho} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} + \frac{p_\infty(t)}{\rho}, \quad \varphi = \varphi(\mathbf{x}, t), \quad (1.2)$$

где φ — потенциал скорости; $p_\infty(t)$ — давление в жидкости на бесконечности, зависящее от действующего акустического поля:

$$p_\infty(t) = p_0 + p_a(t), \quad p_a(t) = P_a \sin(\omega t + \varphi),$$

p_0 — давление в жидкости в момент времени $t = 0$; $p_a(t)$ — давление акустического поля; P_a , ω , φ — амплитуда, частота, фазовый сдвиг колебаний акустического поля.

На межфазной границе S_b выполняется граничное условие

$$p(\mathbf{x}, t) = p_g(t) - 2\gamma k(\mathbf{x}, t), \quad (1.3)$$

где γ — коэффициент поверхностного натяжения; $k(\mathbf{x}, t)$ — средняя кривизна поверхности; $p_g(t)$ — давление в газе, которое определяется некоторым политропным процессом:

$$p_g(t) = p_{g0} \left(\frac{V_0}{V} \right)^\kappa, \quad p_{g0} = p_0 + \frac{2\gamma}{a_0},$$

κ — показатель политропы; V — объем пузырька; a — радиус пузырька; индекс “0” соответствует начальным значениям при $t = 0$.

Движение точек на поверхности пузырька S_b описывается кинематическим уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_b. \quad (1.4)$$

Динамическое условие для изменения потенциала скорости на границе S_b определяется из уравнений (1.2), (1.3):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \frac{p_\infty(t) - p_g(t) + 2\gamma k(\mathbf{x}, t) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}}{\rho}, \quad \mathbf{x} \in S_b. \quad (1.5)$$

2. Численный метод. Задача решается с использованием МГЭ, который заключается в переходе от уравнений в частных производных, описывающих поведение неизвестной функции внутри и на границе области, к гранично-интегральным уравнениям. В случае потенциального течения ($\varphi|_{|\mathbf{y}| \rightarrow \infty} = 0$) уравнения (1.1) сводятся к тождествам Грина

$$L[q](\mathbf{y}) - M[\varphi](\mathbf{y}) = \begin{cases} -\varphi(\mathbf{y}), & \mathbf{y} \notin S_b, \mathbf{y} \notin V, \\ -\varphi(\mathbf{y})/2, & \mathbf{y} \in S_b, \\ 0, & \mathbf{y} \in V, \end{cases}$$

где $L[q]$, $M[\varphi]$ — потенциалы простого и двойного слоя соответственно:

$$L[q](\mathbf{y}) = \int_S q(\mathbf{x}) G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \quad q = \frac{\partial \varphi}{\partial n},$$

$$M[\varphi](\mathbf{y}) = \int_S \varphi(\mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} dS(\mathbf{x}),$$

$G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, $\partial G(\mathbf{y}, \mathbf{x})/\partial n(\mathbf{x})$ — функция Грина для уравнения Лапласа и ее нормальная производная, которые определяются следующим образом:

$$G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi r}, \quad \frac{\partial G(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{x}, \quad r = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|.$$

Поверхность пузырьков дискретизируется с помощью треугольной сетки. Для вычисления поверхностных интегралов используются квадратурные формулы. Сингулярные интегралы определяются с использованием интегральных тождеств. Для вычисления средней кривизны поверхности в каждом узле сетки применяется метод параболической аппроксимации. Для стабилизации сетки используются поправка на касательную составляющую скорости и сферический фильтр, представленные в работе [11], где также содержится подробная информация об особенностях реализации численного метода. С использованием метода коллокаций в узлах сетки второе уравнение в граничных интегралах сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестной нормальной производной потенциала скорости на границе. Таким образом, для расчета динамики пузырьков необходимо на каждом временном шаге решать задачу Дирихле. Решение задачи Неймана может потребоваться для инициализации процесса, когда неизвестен потенциал скорости, но известна нормальная скорость. Однако в случае, когда жидкость покоится на бесконечности, необходимость решать задачу Неймана для инициализации процесса отсутствует, так как потенциал скорости при $t = 0$ равен нулю. Кинематическое (1.4) и динамическое (1.5) условия на начальном интервале времени решаются с помощью метода Рунге — Кутты четвертого порядка, а затем метода Адамса — Башфорга шестого порядка.

3. Валидация численного метода. С использованием разработанного численного подхода анализировалась деформация пузырьков воздуха в воде ($\rho = 1000$ кг/м³, $\kappa = 1,4$, $\gamma = 0,073$ Н/м). Результаты расчетов представлены в безразмерных координатах $x' = x/a_0$, $y' = y/a_0$, $z' = z/a_0$ ($a_0 = 10$ мкм — начальный радиус пузырьков).

Для валидации метода рассматривалось взаимодействие двух пузырьков, расположенных на значительном расстоянии друг от друга. Предполагается, что расстояние между центрами пузырьков d изменяется незначительно и пузырьки остаются сферическими. Тогда динамика двух сферических пузырьков с одинаковыми радиусами в идеальной несжимаемой жидкости описывается уравнением Рэлея — Плессета с учетом вторичных сил Бьеркнеса:

$$a\ddot{a} + \frac{3}{2}\dot{a}^2 = \frac{1}{\rho} \left[p_{g0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 - p_{\infty}(t) - \frac{2\gamma}{a} \right] - \frac{1}{d} (2\dot{a}^2 a + a^2 \ddot{a}), \quad (3.1)$$

$$a(0) = a_0, \quad \dot{a}(0) = 0.$$

Результаты численного моделирования, полученные с помощью МГЭ, сравнивались с результатами решения задачи Коши (3.1) для случаев, когда пузырьки расположены на расстоянии $d > 10a_0$. На рис. 1 представлены результаты сравнения численных расчетов изменения радиуса двух одинаковых пузырьков в акустическом поле с амплитудой $P_a = p_0$ и частотой $\omega/(2\pi) = 200$ кГц, расположенных на расстоянии друг от друга $d = 12a_0$. Рассматривались два варианта решения уравнения (3.1): с учетом и без учета вторичных сил Бьеркнеса. Во втором случае в уравнении (3.1) пренебрегается последним слагаемым в квадратных скобках. На рис. 1 видно, что результаты численных расчетов динамики двух пузырьков хорошо согласуются с решением, полученным с учетом первичных и вторичных сил Бьеркнеса (кривая 2 на рис. 1). Таким образом, используемый подход учитывает влияние акустического поля и силы взаимодействия пузырьков на их объемы.

4. Анализ деформации двух взаимодействующих пузырьков. При уменьшении расстояния между пузырьками в результате взаимодействия пузырьки теряют сферическую форму. Проведены многопараметрические расчеты взаимодействия двух пузырьков при различных значениях параметров акустического поля P_a , ω и расстояния между центрами пузырьков d . Рассматривалось пять периодов колебаний акустического поля и анализировалась деформация пузырьков. На рис. 2 показана зависимость формы пузырьков от амплитуды акустического поля и расстояния между ними для двух значений частоты

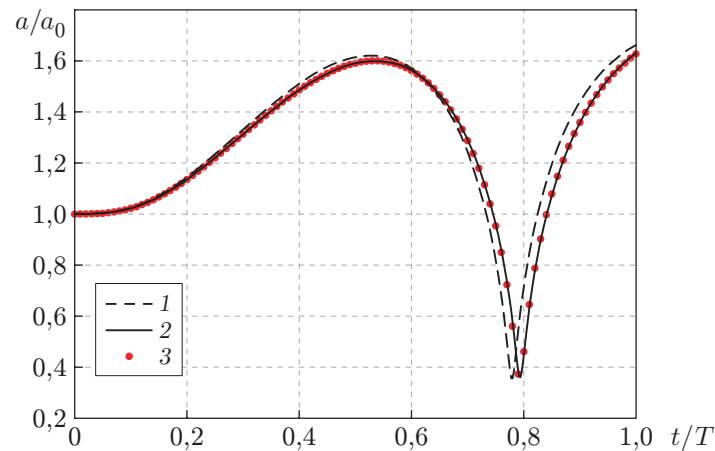


Рис. 1. Зависимость радиуса двух одинаковых пузырьков от времени при $P_a = p_0$, $\omega/(2\pi) = 200$ кГц, $d = 12a_0$:

1 — решение (3.1) без учета вторичных сил Бьеркнеса, 2 — решение (3.1) с учетом вторичных сил Бьеркнеса, 3 — численное решение с помощью МГЭ

$\omega/(2\pi) = 200, 360$ кГц. Для построения диаграммы было проведено 100 расчетов на сетке размером 10×10 . Области, показанные на рис. 2, позволяют определить значения параметров (расстояние между пузырьками, частоту и амплитуду акустического поля), при которых пузырьки остаются сферическими (область 3), деформируются (область 2) или образуют струи (область 1). Видно, что при увеличении амплитуды акустического поля и уменьшении расстояния между пузырьками пузырьки начинают деформироваться, а при достижении критических значений образуются струи. Однако динамика пузырьков зависит также от частоты акустического поля. На рис. 2 видно, что с увеличением частоты акустического поля площади областей 1 и 2, где пузырьки деформируются и образуются струи, уменьшаются. Таким образом, при увеличении частоты акустического поля струи не успевают формироваться.

На рис. 3 показаны полученные в результате моделирования формы пузырьков, расположенных на расстоянии $d = 4a_0$, в различные моменты времени в акустическом поле с частотой $\omega/(2\pi) = 200$ кГц и амплитудой $P_a = 0,7p_0$. Анализ деформации пузырьков показывает, что при данных значениях параметров акустического поля и пузырьков за один период колебаний в фазе сжатия пузырьков формируются струи, которые продолжают развиваться при их расширении.

5. Анализ деформации двух пузырьков, находящихся в центре кластера.

При наличии других пузырьков характер взаимодействия двух пузырьков при одних и тех же значениях параметров акустического поля и расстояния между ними может существенно измениться. Влияние других пузырьков на динамику двух взаимодействующих пузырьков, рассмотренных выше, исследовалось на примере структурированного пузырькового кластера в форме прямоугольного параллелепипеда. Для этого генерировались кластеры из 36 пузырьков с расстоянием d между ними, чтобы объекты исследования (два взаимодействующих пузырька) находились в центре кластера.

Как и в случае двух пузырьков, проведены расчеты для пузырькового кластера при различных значениях параметров акустического поля P_a , ω и расстояния между пузырьками кластера d . Варианты взаимодействия двух центральных пузырьков кластера представлены на рис. 4. Аналогично случаю с двумя изолированными пузырьками можно определить значения параметров акустического поля и кластера, при которых центральные пузырьки остаются сферическими (область 3), деформируются (область 2) или образуют

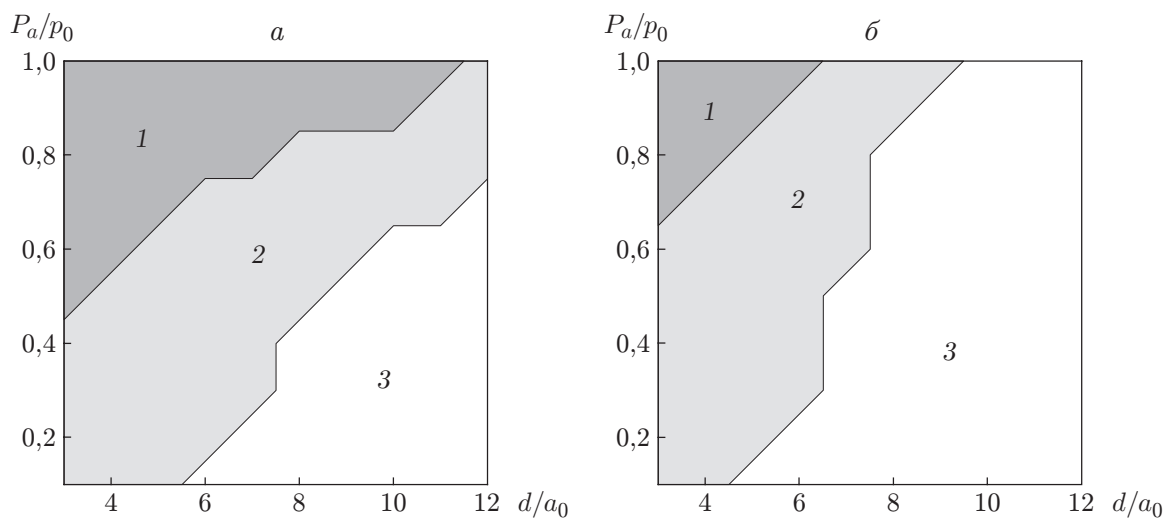


Рис. 2. Зависимость характера взаимодействия двух пузырьков от амплитуды акустического поля и расстояния между пузырьками при различных значениях частоты:

a — $\omega/(2\pi) = 200$ кГц, b — $\omega/(2\pi) = 360$ кГц; 1 — образование струи в пузырьке, 2 — существенные деформации пузырька без образования струи, 3 — сохранение сферической формы пузырька

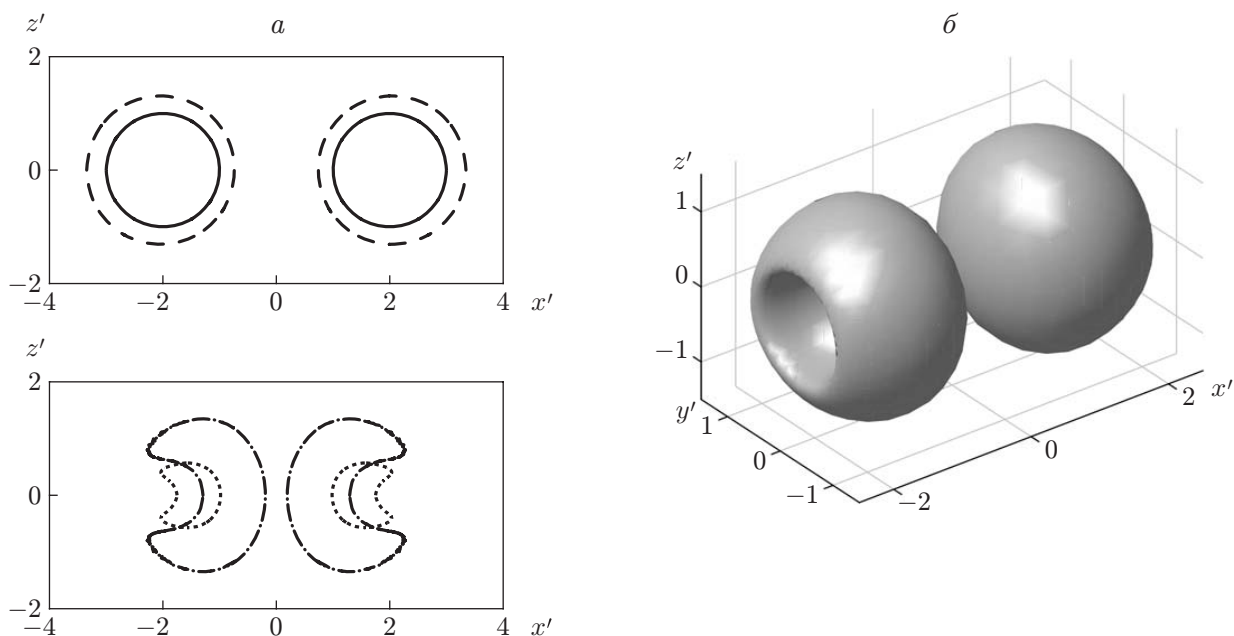


Рис. 3. Этапы деформации двух взаимодействующих пузырьков в акустическом поле с амплитудой $P_a = 0,7p_0$ и частотой $\omega/(2\pi) = 200$ кГц при $d = 4a_0$:

a — двумерная проекция в различные моменты времени (сплошные линии — $t = 0$, штриховые — $t = 0,6T$, пунктирные — $t = 0,8T$, штрихпунктирные — $t = T$), b — трехмерная проекция в момент времени $t = T$

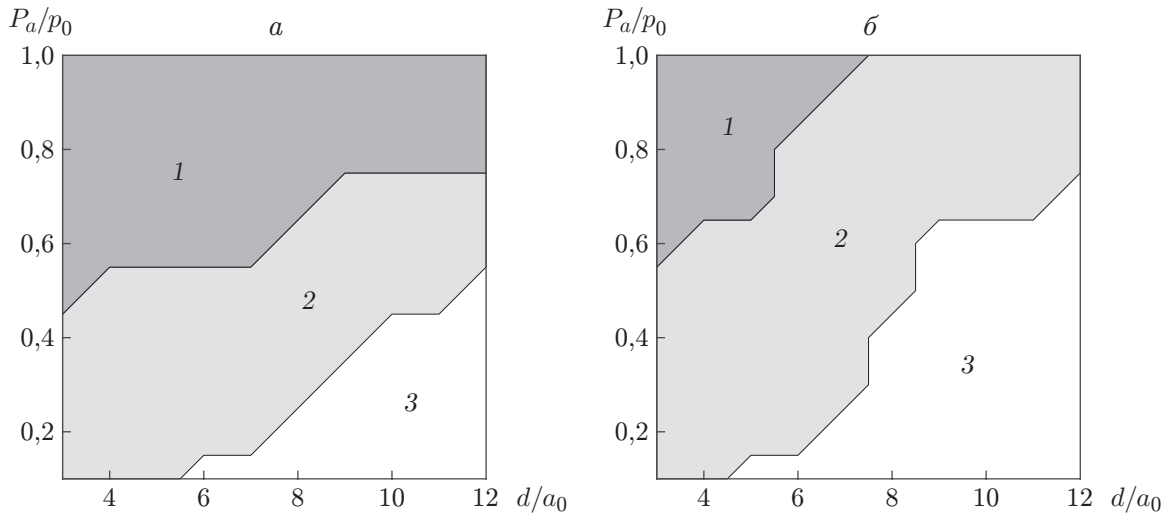


Рис. 4. Зависимость характера взаимодействия двух центральных пузырьков кластера от амплитуды акустического поля и расстояния между пузырьками при различных значениях частоты:

a — $\omega/(2\pi) = 200$ кГц, *б* — $\omega/(2\pi) = 360$ кГц; 1 — образование струи в пузырьке, 2 — существенные деформации пузырька без образования струи, 3 — сохранение сферической формы пузырька

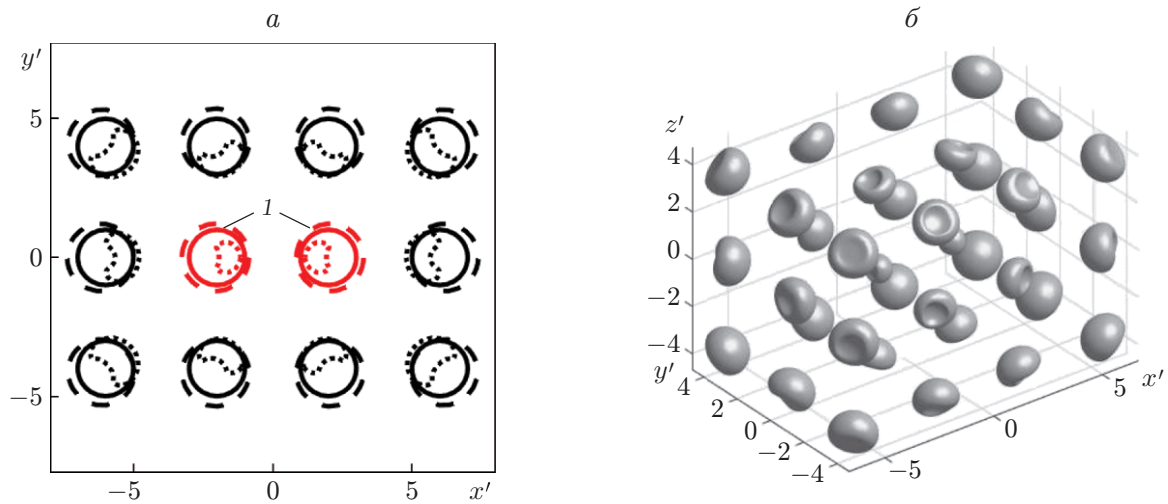


Рис. 5. Этапы деформации пузырьков кластера в акустическом поле с амплитудой $P_a = 0,7p_0$ и частотой $\omega/(2\pi) = 200$ кГц при $d = 4a_0$:

a — двумерная проекция в различные моменты времени (сплошные линии — $t = 0$, штриховые — $t = 0,6T$, пунктирные — $t = 1,1T$), *б* — трехмерная проекция в момент времени $t = 1,1T$; 1 — исследуемые пузырьки

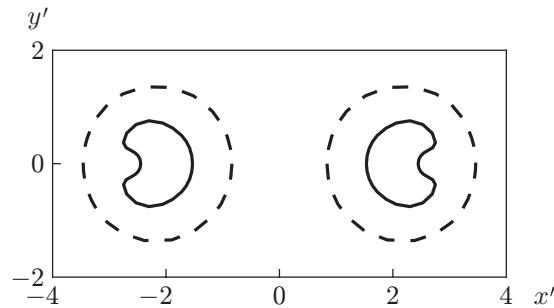


Рис. 6. Формы двух пузырьков в акустическом поле с амплитудой $P_a = 0,6p_0$ в момент времени $t = 1,1T$ при наличии (сплошная линия) и отсутствии (штриховая линия) соседних пузырьков

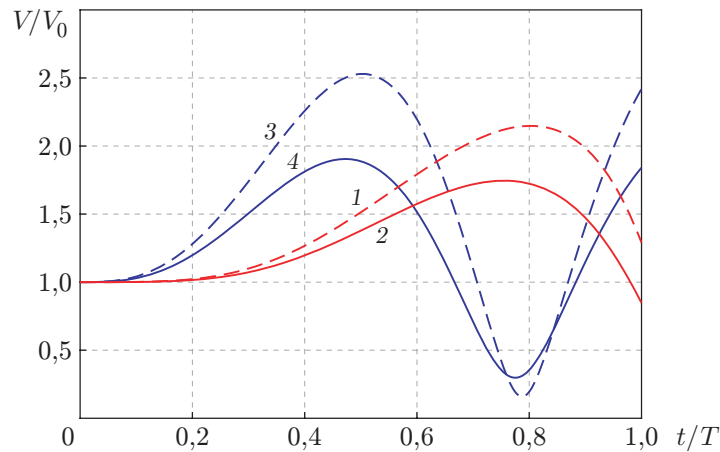


Рис. 7. Изменение объема левого пузырька при наличии (1, 2) и отсутствии (3, 4) соседних пузырьков в акустическом поле с различной амплитудой: 1, 3 — $P_a = 0,7p_0$, 2, 4 — $P_a = 0,5p_0$

струи (область 1). На рис. 5 представлены этапы деформации пузырьков кластера (расстояние между пузырьками $d = 4a_0$) в акустическом поле с частотой $\omega/(2\pi) = 200$ кГц и амплитудой $P_a = 0,7p_0$. В плоскости $Ox'y'$ показаны деформации пузырьков в кластере, центры которых находятся в этой плоскости (второй ряд пузырьков по оси z на рис. 5, а). Анализ деформации пузырьков в кластере показывает, что для данных значений параметров акустического поля и кластера к моменту времени $t = 1,1T$ во всех пузырьках формируются струи, при этом крайние пузырьки испытывают большие деформации.

Сравнительный анализ деформации двух центральных пузырьков кластера (см. рис. 4) с деформацией двух изолированных пузырьков (см. рис. 2) показывает, что при наличии других пузырьков характер взаимодействия рассматриваемых пузырьков существенно меняется. Площади областей 1 и 2, характеризующие отклонение формы пузырька от сферической и образование струи, увеличиваются. Например, в акустическом поле с частотой $\omega/(2\pi) = 200$ кГц, амплитудой $P_a = 0,6p_0$ и расстоянием между пузырьками $d = 5a_0$ в момент времени $t = 1,1T$ при наличии соседних пузырьков в исследуемых пузырьках образуются струи, чего не наблюдается при взаимодействии двух изолированных пузырьков (рис. 6). Более того, существенно отличается динамика объема центральных пузырьков в кластере и в виде одиночных включений (рис. 7). На рис. 7 видно, что максимальное значение объема левого центрального пузырька $f_V(t) = V(t)/V_0$ увеличивается с увели-

чением амплитуды акустического поля и достигается при большем значении времени и наличии соседних пузырьков.

Заключение. Разработан и реализован метод граничных элементов для расчета динамики взаимодействующих пузырьков в идеальной несжимаемой жидкости под действием акустического поля.

Показано, что результаты численных расчетов хорошо согласуются с результатами, полученными при решении задачи Коши для двух сферических пузырьков с учетом вторичных сил Бьеркнеса. Исследована зависимость деформации двух взаимодействующих пузырьков от частоты и амплитуды акустического поля, а также от расстояния между ними. Определены значения параметров, при которых пузырьки остаются сферическими, деформируются или образуют струи. Изучена динамика структурированного кластера пузырьков и проанализирована деформация одиночных пузырьков в нем при различных значениях расстояния между ними, амплитуды и частоты акустического поля. Проведено сравнение деформации и изменения объема двух центральных пузырьков в кластере и двух изолированных пузырьков. Показано, что при одних и тех же значениях параметров акустического поля и расстояния между пузырьками деформация центральных пузырьков кластера существенно отличается от деформации двух изолированных пузырьков. При наличии соседних пузырьков критические значения расстояния между пузырьками и амплитуды акустического поля, при которых в исследуемых пузырьках формируются струи, меньше. Установлено, что наибольшие деформации испытывают крайние пузырьки кластера.

Разработанный метод может быть использован для решения широкого класса задач о динамике пузырьков в акустическом поле, а также для изучения взаимодействия пузырьков.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Besant W. H.** Hydrostatics and hydrodynamics. L.: Cambridge Univ. Press, 1859.
2. **Plesset M. S., Prosperetti A.** Bubble dynamics and cavitation // J. Fluid Mech. 1977. V. 9. P. 145–185.
3. **Bjerknes V. F. K.** Fields of force. N. Y.: Columbia Univ. Press, 1906.
4. **Doinikov A. A., Zavtrak S. T.** On the mutual interaction of two gas bubbles in a sound field // Phys. Fluids. 1995. V. 7, N 8. P. 1923–1930.
5. **Oguz H. N., Prosperetti A.** Bubble oscillations in the vicinity of a nearly plane free surface // J. Acoust. Soc. Amer. 1990. V. 87. P. 2085–2092.
6. **Lauterborn W., Kurz T.** Physics of bubble oscillations // Rep. Progress Phys. 2010. V. 73. 106501. [Электрон. ресурс]. Режим доступа: <http://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/73/10/106501>.
7. **Gumerov N. A., Akhatov I. Sh.** Modes of self-organization of diluted bubbly liquids in acoustic fields: One-dimensional theory // J. Acoust. Soc. Amer. 2017. V. 141, N 2. P. 1190–1202.
8. **Иткулова (Питюк) Ю. А., Абрамова О. А., Гумеров Н. А., Ахатов И. Ш.** Моделирование динамики пузырьков в трехмерных потенциальных течениях на гетерогенных вычислительных системах быстрым методом мультиполей и методом граничных элементов // Вычисл. методы и программирование. 2014. Т. 15. С. 239–257.
9. **Canot E., Achard J.-L.** An overview of boundary integral formulations for potential flows in fluid-fluid systems // Arch. Mech. 1991. V. 43. P. 453–498.
10. **Blake J. R., Gibson D. C.** Cavitation bubbles near boundaries // Annual Rev. Fluid Mech. 1987. V. 19. P. 99–123.

11. **Аганин А. А., Косолапова Л. А., Малахов В. Г.** Численное моделирование эволюции пузырька газа в жидкости вблизи стенки // *Мат. моделирование*. 2017. Т. 29, № 7. С. 15–28.
12. **Chahine G. L., Duraiswami R.** Dynamical interactions in a multibubble cloud // *Trans. ASME. J. Fluids Engng.* 1992. V. 114. P. 680–686.
13. **Zhang Y. L., Yeo K. S., Khoo B. C., Wang C.** 3D jet impact and toroidal bubbles // *J. Comput. Phys.* 2001. V. 166. P. 336–360.
14. **Itkulova (Pityuk) Yu. A., Abramova O. A., Gumerov N. A., Akhatov I. S.** Boundary element simulations of free and forced bubble oscillations in potential flow // *Proc. of the Intern. mech. engng congress and exposition, Montreal (Canada), 14–20 Nov. 2014.* S. l.: Amer. Soc. Mech. Engng, 2014. V007T09A059. [Электрон. ресурс]. Режим доступа: <http://dx.doi.org/10.1115/IMECE2014-36972>.
15. **Абрамова О. А., Ахатов И. Ш., Гумеров Н. А. и др.** Численно-экспериментальное изучение динамики пузырька, контактирующего с твердой поверхностью // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*. 2018. № 3. С. 3–13.

*Поступила в редакцию 13/IX 2018 г.,
после доработки — 21/XII 2018 г.
Принята к публикации 24/XII 2018 г.*
