

УДК 534.18

Метод Рунге–Кутты/WENO для расчета уравнений волн малой амплитуды в насыщенной упругой пористой среде*

А.С. Романьков¹, Е.И. Роменский²

¹Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090

²Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. В.А. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090

E-mails: anton.romankov@gmail.com (Романьков А.С.), evrom@math.nsc.ru (Роменский Е.И.)

Романьков А.С., Роменский Е.И. Метод Рунге–Кутты/WENO для расчета уравнений волн малой амплитуды в насыщенной упругой пористой среде // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд.-ние. — Новосибирск, 2014. — Т. 17, № 3. — С. 259–271.

Для численного моделирования волн малой амплитуды в неподвижной насыщенной пористой упругой среде разработан метод Рунге–Кутты/WENO высокого порядка точности до четвертого порядка по времени и до пятого порядка по пространству. Система определяющих уравнений получена из общих уравнений термодинамически согласованной модели течения сжимаемой жидкости в насыщенной пористой упругой среде, представляющей собой гиперболическую систему законов сохранения, моделирующую процессы в случае конечных деформаций среды. Тестовые расчеты одномерных и двумерных волновых полей показали эффективность метода.

Ключевые слова: *методы высокого порядка точности, гиперболические системы законов сохранения, насыщенные пористые упругие среды, распространение волн.*

Romankov A.S., Romenski E.I. The Runge–Kutta/WENO method for solving equations for small-amplitude wave propagation in a saturated porous medium // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2014. — Vol. 17, № 3. — P. 259–271.

A high-accuracy Runge–Kutta/WENO method up to fourth order with respect to time and fifth order with respect to space is developed for the numerical modeling of the small-amplitude wave propagation in a steady fluid-saturated porous medium. The system of governing equations is derived from the general thermodynamically compatible model of a compressible fluid flow through a saturated elastic porous medium, which is described by the hyperbolic system of conservation laws with allowance for finite deformations of the medium. The results of numerical solution of one- and two-dimensional wavefields demonstrate efficiency of the method developed.

Key words: *high-accuracy methods, hyperbolic system of conservation laws, saturated elastic porous media, wave propagation.*

1. Введение

Моделирование течений сжимаемой жидкости в деформируемой пористой среде является актуальной задачей во многих задачах естествознания и, в частности, в геофизике. До настоящего времени, однако, отсутствует общепринятая математическая модель конечных деформаций насыщенной пористой среды, которая обладает математическими свойствами, обеспечивающими эффективное применение современных высокоточных

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 11-01-00147, № 11-05-00947, № 13-05-00076, № 13-05-12051), Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 2 (проект 121), Интеграционных междисциплинарных проектов СО РАН № 127 и № 30 и при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (ГК-07.514.11.4156).

численных методов. Мы будем рассматривать уравнения течения сжимаемой жидкости в упругой пористой среде, которые были предложены в [1], с использованием теории термодинамически согласованных систем законов сохранения [2]. Дифференциальные уравнения данной модели образуют гиперболическую систему уравнений в дивергентной форме и, кроме того, ее решения удовлетворяют законам неравновесной термодинамики. Упомянутые свойства дают несомненные преимущества для изучения начально-краевых задач, возникающих при исследовании прикладных задач, и применения эффективных численных методов.

В последние годы широкое распространение для численного решения гиперболических систем законов сохранения получили методы высокого порядка точности, использующие WENO-реконструкцию (см., например, [3] и цитируемую там литературу). Широко применяется, в частности, метод Рунге–Кутты/WENO, который оказывается весьма эффективным при расчете разрывных решений, точно локализуя положения разрывов и сохраняя монотонность решения. Поскольку изучаемые уравнения насыщенной упругой пористой среды принадлежат классу гиперболических законов сохранения, возникает естественное желание применить для их решения метод Рунге–Кутты/WENO.

В настоящей работе сделан первоначальный шаг в этом направлении и разработан высокоточный численный метод Рунге–Кутты/WENO четвертого порядка точности по времени и пятого порядка точности по пространству для решения уравнений волн малой амплитуды в пористой насыщенной упругой среде. Проведен анализ сходимости метода и сравнение с точным решением для одномерных волн. Решена серия тестовых двумерных задач, в том числе о распространении волн в области с внутренней границей раздела сред. Исследовано влияние межфазного трения на характер распространения волн.

2. Термодинамически согласованная система законов сохранения течения сжимаемой жидкости в упругой пористой среде

Уравнения распространения волн малой амплитуды, для которых будет конструироваться численный метод, выводятся из общей термодинамически согласованной системы законов сохранения, предложенной в [1] для моделирования течений сжимаемой жидкости в упругой насыщенной пористой среде. В данной модели предполагается, что элемент среды в декартовой системе координат x_i характеризуется следующими параметрами состояния: α_1 — объемная концентрация упругой фазы, ρ_1 , ρ_2 — массовые плотности упругой фазы и насыщающей жидкости, u_i^1 , u_i^2 — скорости упругой и жидкой фаз соответственно, F_{ij} — градиент деформации (тензор дисторсии) смеси. Рассматриваются процессы, в которых тепловыми процессами можно пренебречь, поэтому предполагается, что процессы, происходящие в среде, являются изоэнтропическими. Полная система уравнений движения насыщенной пористой среды имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \alpha_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho \alpha_1 u_k}{\partial x_k} &= \lambda(p_1 - p_2), & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_k}{\partial x_k} &= 0, & \frac{\partial \rho_1 \alpha_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 \alpha_1 u_k^1}{\partial x_k} &= 0, \\ \frac{\partial (u_k^1 - u_k^2)}{\partial t} + \frac{\partial \left(\frac{u_i^1 u_i^1}{2} - \frac{u_i^2 u_i^2}{2} + e^1 + \frac{p_1}{\rho_1} - e^2 - \frac{p_2}{\rho_2} \right)}{\partial x_k} &= -e_{klj} u_l \omega_j - \chi (u_k^1 - u_k^2), \\ \frac{\partial (\alpha_1 \rho_1 u_i^1 + \alpha_2 \rho_2 u_i^2)}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_1 \rho_1 u_i^1 u_k^1 + \alpha_2 \rho_2 u_i^2 u_k^2 + (\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2) \delta_{ik} - \alpha_1 \tilde{\sigma}_{ik})}{\partial x_k} &= 0, \\ \frac{\partial \rho F_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho F_{ij} u_k - \rho F_{kj} u_i)}{\partial x_k} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\rho = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2$ — плотность смеси; $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$ — объемная концентрация насыщающей жидкости; $u_k = c_1 u_k^1 + c_2 u_k^2$ — скорость смеси; $c_1 = \alpha_1 \rho_1 / \rho$, $c_2 = 1 - c_1$ — массовые концентрации упругой и жидкой фаз; $p_1 = \rho_1^2 e_{\rho_1}^1$, $p_2 = \rho_2^2 e_{\rho_2}^2$ — давления упругой и жидкой фаз; $\tilde{\sigma}_{ik} = \rho_1 F_{kj} e_{F_{ij}}^1$ — сдвиговые напряжения упругой фазы; e^1 , e^2 — внутренние энергии фаз; $\lambda \geq 0$, $\chi \geq 0$ — коэффициенты, характеризующие соответственно скорость релаксации давлений и межфазное трение. Предполагается, что функциональные зависимости плотности внутренней энергии каждой фазы известны:

$$e^1 = e^1(\rho_1, F_{11}, \dots, F_{33}), \quad e^2 = e^2(\rho_2).$$

При этом зависимость внутренней энергии упругой фазы от градиента деформации $F = \{F_{ij}\}$ для изотропной среды задана посредством зависимости от какого-либо тензора деформаций, например тензора деформаций Фингера $G = \{g_{ij}\} = f^\top f$, где $f = F^{-1}$.

Решения системы (1) должны удовлетворять дополнительным уравнениям — условиям совместности:

$$\frac{\partial w_k}{\partial x_i} - \frac{\partial w_i}{\partial x_k} = -e_{k i \alpha} \omega_\alpha, \quad \frac{\partial \omega_k}{\partial t} + \frac{\partial (u_l \omega_k - u_k \omega_l + e_{kl \alpha} \chi E_{w_\alpha})}{\partial x_l} = 0, \quad \frac{\partial \rho F_{kj}}{\partial x_k} = 0.$$

Важными свойствами вышеприведенной системы дифференциальных уравнений являются ее гиперболичность и дивергентная форма всех уравнений. Кроме этого, система является термодинамически согласованной, т. е. ее решения удовлетворяют законам термодинамики. В нашем случае это означает, что для решений выполнен закон баланса энергии, который имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\alpha_1 \rho_1 \left(e^1 + \frac{u_i^1 u_i^1}{2} \right) + \alpha_2 \rho_2 \left(e^2 + \frac{u_i^2 u_i^2}{2} \right) \right) + \\ & \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\alpha_1 \rho_1 u_k^1 \left(e^1 + \frac{u_i^1 u_i^1}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} \right) + \alpha_2 \rho_2 u_k^2 \left(e^2 + \frac{u_i^2 u_i^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} \right) - \alpha_1 u_i \tilde{\sigma}_{ik} \right) \\ & = -\frac{\lambda}{\rho} (p_1 - p_2)^2 - \chi \rho (u_k^1 - u_k^2) (u_k^1 - u_k^2) \leq 0. \end{aligned}$$

В этом уравнении имеется источник — правая часть, возникающая за счет учета диссипативных процессов межфазного взаимодействия (релаксация давлений и межфазное трение). Эта правая часть является неположительной, что приводит к диссипации энергии в процессах межфазного взаимодействия.

Нас будет интересовать моделирование волн малой амплитуды в неподвижной насыщенной пористой ненапряженной среде в равновесном состоянии. Уравнения для таких процессов выведены в [1] с использованием системы (1), при этом предполагалось, что параметры среды, по которой распространяются волны возмущений $\Delta \alpha_1$, $\Delta \rho_1$, $\Delta \rho_2$, Δu_k^1 , Δu_k^2 , ΔF_{ij} , таковы:

$$(u_k^1)^0 = 0, \quad (u_k^2)^0 = 0, \quad p_1^0 = 0, \quad p_2^0 = 0, \quad \tilde{\sigma}_{ik}^0 = 0, \quad F_{ij}^0 = \delta_{ij}.$$

Предполагая, кроме того, что деформация среды характеризуется тензором малых деформаций $\varepsilon_{ij} = 1/2(\Delta F_{ij} + \Delta F_{ji})$ и, опуская знак Δ перед обозначениями возмущений, непосредственно из (1) получим систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\alpha_1^0 \rho_1^0 u_i^1 + \alpha_2^0 \rho_2^0 u_i^2)}{\partial t} + \frac{\partial(\delta_{ik}(\alpha_1^0 p_1 + \alpha_2^0 p_2) - \alpha_1^0 \tilde{\sigma}_{ik})}{\partial x_k} = 0, \\
& \frac{\partial(u_i^1 - u_i^2)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\frac{p_1}{\rho_1^0} - \frac{p_2}{\rho_2^0}\right)}{\partial x_i} = -\chi(u_i^1 - u_i^2), \\
& \frac{\partial(\alpha_1^0 \rho_1 + \rho_1^0 \alpha_1)}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_1^0 \rho_1^0 u_k^1}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial(\alpha_2^0 \rho_2 + \rho_2^0 \alpha_2)}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_2^0 \rho_2^0 u_k^2}{\partial x_k} = 0, \quad (2) \\
& \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(c_1^0 u_i^1 + c_2^0 u_i^2)}{\partial x_j} + \frac{\partial(c_1^0 u_j^1 + c_2^0 u_j^2)}{\partial x_i} \right) = 0, \\
& \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} = \lambda \frac{p_1 - p_2}{\rho_0},
\end{aligned}$$

которая эквивалентна системе:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u_i^1}{\partial t} + \frac{1}{\rho_1^0} \frac{\partial p_1}{\partial x_i} - \frac{\alpha_1^0}{\rho^0} \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ik}}{\partial x_k} = -\frac{\alpha_2^0 \rho_2^0}{\rho^0} \chi(u_i^1 - u_i^2), \\
& \frac{\partial u_i^2}{\partial t} + \frac{1}{\rho_2^0} \frac{\partial p_2}{\partial x_i} - \frac{\alpha_1^0}{\rho^0} \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\alpha_1^0 \rho_1^0}{\rho^0} \chi(u_i^1 - u_i^2), \\
& \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_1^0 \frac{\partial u_k^1}{\partial x_k} = \lambda \frac{\rho_1^0}{\alpha_1^0 \rho^0} (p_2 - p_1), \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \rho_2^0 \frac{\partial u_k^2}{\partial x_k} = -\lambda \frac{\rho_2^0}{\alpha_1^0 \rho^0} (p_2 - p_1), \quad (3) \\
& \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} - \frac{c_1^0}{2} \left(\frac{\partial u_i^1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^1}{\partial x_i} \right) - \frac{c_2^0}{2} \left(\frac{\partial u_i^2}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^2}{\partial x_i} \right) = 0, \\
& \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} = \lambda \frac{p_1 - p_2}{\rho^0}.
\end{aligned}$$

Здесь $p_1 = K_1 \rho_1$, $p_2 = K_2 \rho_2$, $\sigma_{ik} = 2\mu \left(\varepsilon_{ik} - \delta_{ik} \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}}{3} \right)$, $\alpha_2 = -\alpha_1$; K_1 , K_2 — объемные модули упругой и жидкой фаз, μ — модуль сдвига упругой среды.

В данной статье для решения одномерных и двумерных уравнений распространения волн малой амплитуды в насыщенной пористой среде будет использован метод Рунге–Кутты/WENO. Рассматриваемые уравнения могут быть записаны формально в векторном виде в двумерном случае как

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} = \mathbf{S}(\mathbf{U}), \quad (4)$$

а в одномерном случае как

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{U}). \quad (5)$$

Векторы \mathbf{U} , $\mathbf{F}(\mathbf{U})$, $\mathbf{G}(\mathbf{U})$ называются, соответственно, векторами консервативных переменных и векторами потоков в направлении осей x и y . Вектор \mathbf{S} называется вектором источников (правых частей). Мы имеем дело с линейными уравнениями, поэтому потоки и правые части \mathbf{F} , \mathbf{G} , \mathbf{S} — линейные векторные функции консервативных переменных \mathbf{U} .

В двумерном случае вектор консервативных переменных \mathbf{U} связан с вектором примитивных физических переменных (знак \top означает транспонирование)

$$\mathbf{u} = (u_1^1, u_1^2, u_2^1, u_2^2, \rho_1, \rho_2, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}, \alpha_1)^\top$$

следующим образом:

$$\mathbf{U} = (\alpha_1^0 \rho_1^0 u_1^1 + \alpha_2^0 \rho_2^0 u_1^2, \alpha_1^0 \rho_1^0 u_2^1 + \alpha_2^0 \rho_2^0 u_2^2, u_1^1 - u_1^2, u_2^1 - u_2^2, \alpha_1^0 \rho_1 + \rho_1^0 \alpha_1, \alpha_2^0 \rho_2 + \rho_2^0 \alpha_2, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}, \alpha_1)^\top.$$

Потоки \mathbf{F} и \mathbf{G} являются линейными комбинациями примитивных переменных:

$$\mathbf{F} = \left(\alpha_1^0 K_1 \rho_1 + \alpha_2^0 K_2 \rho_2 - \frac{4}{3} \alpha_1^0 \mu \varepsilon_{11} + \frac{2}{3} \alpha_1^0 \mu \varepsilon_{22}, -2\alpha_1^0 \mu \varepsilon_{12}, \frac{K_1}{\rho_1^0} \rho_1 - \frac{K_2}{\rho_2^0} \rho_2, 0, \right. \\ \left. \alpha_1^0 \rho_1^0 u_1^1, \alpha_2^0 \rho_2^0 u_2^1, -c_1^0 u_1^1 - c_2^0 u_1^2, -\frac{1}{2} c_1^0 u_2^1 - \frac{1}{2} c_2^0 u_2^2, 0 \right)^\top,$$

$$\mathbf{G} = \left(-2\alpha_1^0 \mu \varepsilon_{12}, \alpha_1^0 K_1 \rho_1 + \alpha_2^0 K_2 \rho_2 + \frac{2}{3} \alpha_1^0 \mu \varepsilon_{11} - \frac{4}{3} \alpha_1^0 \mu \varepsilon_{22}, 0, \frac{K_1}{\rho_1^0} \rho_1 - \frac{K_2}{\rho_2^0} \rho_2, \right. \\ \left. \alpha_1^0 \rho_1^0 u_1^2, \alpha_2^0 \rho_2^0 u_2^2, 0, -\frac{1}{2} c_1^0 u_1^1 - \frac{1}{2} c_2^0 u_1^2, -c_1^0 u_2^1 - c_2^0 u_2^2, 0 \right)^\top.$$

Вектор правых частей, в свою очередь, выражается как

$$\mathbf{S} = \left(0, 0, -\chi(u_1^1 - u_1^2), -\chi(u_2^1 - u_2^2), 0, 0, 0, 0, 0, \lambda \frac{K_1 \rho_1 - K_2 \rho_2}{\rho_0} \right)^\top.$$

Для одномерной системы уравнений (5), которая получается из (4) в предположении, что скорость движения среды направлена вдоль оси x и имеется только одна компонента тензора деформаций ε_{11} , связь вектора консервативных переменных \mathbf{U} и вектора примитивных переменных

$$\mathbf{u} = (u_1^1, u_1^2, \rho_1, \rho_2, \varepsilon_{11}, \alpha_1)^\top$$

такова:

$$\mathbf{U} = (\alpha_1^0 \rho_1^0 u_1^1 + \alpha_2^0 \rho_2^0 u_1^2, u_1^1 - u_1^2, \alpha_1^0 \rho_1 + \rho_1^0 \alpha_1, \alpha_2^0 \rho_2 + \rho_2^0 \alpha_2, \varepsilon_{11}, \alpha_1)^\top,$$

а поток $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ и правая часть $\mathbf{S}(\mathbf{U})$ выражаются как

$$\mathbf{F} = \left(\alpha_1^0 K_1 \rho_1 + \alpha_2^0 K_2 \rho_2 - \frac{4}{3} \alpha_1^0 \mu \varepsilon_{11}, \frac{K_1}{\rho_1^0} \rho_1 - \frac{K_2}{\rho_2^0} \rho_2, \alpha_1^0 \rho_1^0 u_1^1, \alpha_2^0 \rho_2^0 u_2^1, -c_1^0 u_1^1 - c_2^0 u_1^2, 0 \right)^\top,$$

$$\mathbf{S} = \left(0, -\chi(u_1^1 - u_1^2), 0, 0, 0, \lambda \frac{K_1 \rho_1 - K_2 \rho_2}{\rho_0} \right)^\top.$$

Отметим, что в некоторых численных примерах, приведенных ниже, предполагалась мгновенная релаксация давлений. Это предположение справедливо в случае, когда релаксация давлений в среде, описываемой системой, происходит значительно быстрее, чем интересующие нас времена процесса. А это, в свою очередь, имеет место в пористой среде, масштаб пор в которой значительно меньше характерных длин изучаемых волн. Данное предположение выражается дополнительным условием на решение, имеющим вид $p_1 = K_1 \rho_1 = p_2 = K_2 \rho_2$. Особенность численного метода, необходимого для реализации мгновенной релаксации давления, будет описана ниже.

3. Метод Рунге–Кутты/WENO для одно- и двумерных уравнений насыщенной упругой среды

Алгоритмы типа Рунге–Кутты/WENO успешно применяются для решения различных уравнений механики сплошных сред. В частности, в виде метода конечных объемов такой алгоритм использовался для моделирования волновых полей уравнениями линейной теории упругости [4]. Далее мы используем метод Рунге–Кутты/WENO конечных

разностей для решения одно- и двумерных уравнений (5) и (4), которые были сформулированы в предыдущем пункте. Рассматриваемый здесь алгоритм WENO-реконструкции является стандартным и широко применяется для решения гиперболических систем законов сохранения. Для интегрирования по времени в данной работе будут использоваться так называемые оптимальные методы SSPRK (Strong Stability Preserving Runge–Kutta), применявшиеся, в частности, для решения нелинейных гиперболических систем [5, 6].

Будем рассматривать прямоугольную область $(x, y) \in [X_1, X_2] \times [Y_1, Y_2]$ (в одномерном случае отрезок $x \in [X_1, X_2]$). В области строится сетка, ячейки которой образуют прямоугольники $I_{ij} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$ (в одномерном случае — отрезки $I_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$). Здесь

$$\begin{aligned} x_{i\pm 1/2} &= x_i \pm \Delta x, & x_i &= X_1 + (i - 1/2)\Delta x, & \Delta x &= \frac{(X_2 - X_1)}{N_x}, \\ y_{j\pm 1/2} &= y_j \pm \Delta y, & y_j &= Y_1 + (j - 1/2)\Delta y, & \Delta y &= \frac{(Y_2 - Y_1)}{N_y}, \end{aligned}$$

N_x, N_y — число шагов сетки вдоль осей x и y соответственно. Таким образом, уравнение (5) с использованием разностных отношений записывается в виде

$$\frac{dU_i}{dt} + \frac{F_{i+1/2} - F_{i-1/2}}{\Delta x} = S_i, \quad (6)$$

а уравнение (4) в виде

$$\frac{dU_{ij}}{dt} + \frac{F_{i+1/2,j} - F_{i-1/2,j}}{\Delta x} + \frac{G_{i,j+1/2} - G_{i,j-1/2}}{\Delta y} = S_{ij}. \quad (7)$$

Итак, законы сохранения сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям по времени (для величин в ячейках U_{ij} в двумерном случае и U_i в одномерном случае) при условии, если известны значения потоков $F_{i\pm 1/2,j}$, $G_{i,j\pm 1/2}$ на боковых гранях ячеек в двумерном случае и $F_{i\pm 1/2}$ в одномерном случае. Для формул метода Рунге–Кутты удобно использовать операторную запись уравнений (6) и (7), которая для величин в ячейке имеет вид

$$\frac{dU}{dt} = L(U), \quad (8)$$

где в двумерном случае

$$L(U) = -\frac{F_{i+1/2,j} - F_{i-1/2,j}}{\Delta x} - \frac{G_{i,j+1/2} - G_{i,j-1/2}}{\Delta y} + S_{ij},$$

а в одномерном случае

$$L(U) = -\frac{F_{i+1/2} - F_{i-1/2}}{\Delta x} + S_i.$$

В приведенных ниже тестовых расчетах для интегрирования (8) использовался метод SSPRK четвертого порядка точности, формулы которого из [6] имеют вид:

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= U^n + 0.391752226571890 \cdot \Delta t \cdot L(U^n), \\ U^{(2)} &= 0.444370493651235 \cdot U^n + 0.555629506348765 \cdot U^{(1)} + 0.368410593050371 \cdot \Delta t \cdot L(U^{(1)}), \\ U^{(3)} &= 0.620101851488403 \cdot U^n + 0.379898148511597 \cdot U^{(2)} + 0.251891774271694 \cdot \Delta t \cdot L(U^{(2)}), \\ U^{(4)} &= 0.178079954393132 \cdot U^n + 0.821920045606868 \cdot U^{(3)} + 0.544974750228521 \cdot \Delta t \cdot L(U^{(2)}), \\ U^{n+1} &= 0.517231671970585 \cdot U^{(2)} + 0.096059710526147 \cdot U^{(3)} + 0.063692468666290 \cdot \Delta t \cdot L(U^{(3)}) + \\ &\quad 0.386708617503269 \cdot U^{(4)} + 0.226007483236906 \cdot \Delta t \cdot L(U^{(4)}). \end{aligned}$$

Здесь U^n, U^{n+1} — значения решения на n и $n + 1$ временных слоях. Шаг по времени Δt вычисляется из условия устойчивости Куранта–Фридрихса–Леви для (6), (7). Для двумерного случая это условие формулируется как

$$\Delta t \leq K_{\text{CFL}} \min_{ij} \left(\frac{\Delta x}{S_{ij}^x}, \frac{\Delta y}{S_{ij}^y} \right),$$

S_{ij}^x и S_{ij}^y — максимальные скорости распространения волн в ячейке I_{ij} в направлении осей x и y соответственно. Для одномерного случая

$$\Delta t \leq K_{\text{CFL}} \min_i \left(\frac{\Delta x}{S_i^x} \right),$$

S_i^x — максимальная скорость распространения волн в направлении оси x , K_{CFL} — число Куранта–Фридрихса–Леви, которое выбирается из условий устойчивости как $K_{\text{CFL}} < 1$ в одномерном случае и $K_{\text{CFL}} < 1/2$ в двумерном случае.

Пространственная аппроксимация разностных законов баланса основывается на использовании WENO-реконструкции в методе конечных разностей [7]. Этот метод был, например, успешно применен к решению задачи о распространении волн малой амплитуды в модели Доровского насыщенной пороупругой среды [8].

Суть метода заключается в аппроксимации потоков с высоким порядком точности с помощью полиномиальной WENO-реконструкции характеристических переменных. В двумерном случае вычисление потоков производится с помощью расщепления по пространственным переменным, а именно, потоки в направлении осей x и y вычисляются на основе решения одномерной задачи Римана о распаде разрыва для соседних ячеек. Другими словами, при аппроксимации (7) для вычисления потоков $F_{i\pm 1/2}$ рассматривается система уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0,$$

а для аппроксимации потоков $G_{j\pm 1/2}$ в направлении оси y рассматривается система:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} = 0.$$

Поэтому ниже описан способ вычисления потоков только в направлении оси x , который применим как к одномерным, так и к двумерным уравнениям (потоки в направлении оси y вычисляются точно таким же образом).

Рассмотрим одномерную систему с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0.$$

Для вычисления потока $F = AU$ существуют разные методы, но основная идея заключается в расщеплении потока на сумму “положительного” F^+ и “отрицательного” F^- потоков, которые должны удовлетворять следующим свойствам:

$$\frac{\partial F^+}{\partial U} \geq 0, \quad \frac{\partial F^-}{\partial U} \leq 0.$$

Мы для такого расщепления будем использовать приведение системы к характеристическим переменным. Пусть система приводится к диагональной форме заменой переменных $U = TV$, где V — вектор характеристических переменных, T — невырожденная матрица, такая что $A = T^{-1}DT$, здесь D — диагональная матрица. Преобразованная система примет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + D \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = 0. \tag{9}$$

Предполагая, что матрица D имеет структуру

$$D = \begin{pmatrix} D^+ & 0 \\ 0 & D^- \end{pmatrix},$$

где D^+ , D^- — также диагональные матрицы с положительными и отрицательными элементами на диагонали (нули могут включаться в обе матрицы), систему (9) можно записать в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{V}^+}{\partial t} + D^+ \frac{\partial \mathbf{V}^+}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{V}^-}{\partial t} + D^- \frac{\partial \mathbf{V}^-}{\partial x} = 0.$$

Таким образом, на границу, разделяющую ячейки с номерами i и $i+1$ по характеристикам с положительным наклоном приносятся значения характеристических переменных V^+ слева от границы, а по характеристикам с отрицательным наклоном приносятся значения характеристических переменных V^- справа от границы. Для вычисления потока на этой границе используются “левые” $V_{i+1/2}^+$ и “правые” $V_{i+1/2}^-$ значения характеристических переменных, полученные с помощью WENO-реконструкции. Алгоритм реконструкции будет описан ниже. После того как задан полный вектор характеристических переменных на границе, можно получить значения консервативных переменных на границе $U_{i+1/2} = TV_{i+1/2}$, где

$$V_{i+1/2} = \begin{pmatrix} V_{i+1/2}^+ \\ V_{i+1/2}^- \end{pmatrix}.$$

После этого вычисляется поток $F_{i+1/2} = AU_{i+1/2}$ и численный алгоритм полностью замкнут.

Для вычисления характеристических переменных слева и справа от границы ячейки применяется так называемая WENO-реконструкция, которая осуществляется единообразно для каждой компоненты вектора характеристических переменных, поэтому мы ограничимся описанием формул реконструкции только для одной скалярной величины, являющейся решением уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial t} + a \frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

WENO-метод конечных разностей для этого скалярного уравнения основан на аппроксимации производной с нужным порядком точности [7]. Задача реконструкции в каждой ячейке I_i заключается в следующем: найти значения $w_{i\pm 1/2} = w(w_{i-m}, \dots, w_{i+n})$, где числа m и n определяют так называемый шаблон реконструкции, чтобы

$$\frac{w_{i+1/2} - w_{i-1/2}}{\Delta x} = \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=x_i} + O(\Delta x^k),$$

т. е. чтобы аппроксимация производной имела требуемый порядок точности. Ниже описана WENO-реконструкция, обеспечивающая пятый порядок точности. Рассмотрим счетную ячейку $I_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$. Внутри ячейки определим “правые” $w_{i-1/2}^R = w(x_{i-1/2} + 0)$ и “левые” $w_{i+1/2}^L = w(x_{i+1/2} - 0)$ величины, которые нужно получить с помощью WENO-реконструкции. Вначале для данной ячейки вычисляются так называемые индикаторы гладкости:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 13/12(w_i - 2w_{i+1} + w_{i+2})^2 + 1/4(3w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2})^2, \\ \beta_1 &= 13/12(w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1})^2 + 1/4(w_{i-1} - w_{i+1})^2, \\ \beta_2 &= 13/12(w_{i-2} - 2w_{i-1} + w_i)^2 + 1/4(w_{i-2} - 4w_{i-1} + 3w_{i+2})^2, \end{aligned}$$

а затем нелинейные весовые коэффициенты:

$$\omega_k = \frac{\alpha_k}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2}, \quad \alpha_k = \frac{d_k}{(\varepsilon + \beta_k)^2}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Постоянная ε предотвращает обращение знаменателя в 0 и обычно выбирается как $\varepsilon = 10^{-6}$. Далее вычисляются “правые” величины по формуле

$$w_{i-1/2}^R = \frac{1}{6}\omega_0(2w_{i+2} - 7w_{i+1} + 11w_i) + \frac{1}{6}\omega_1(-w_{i+1} + 5w_i + 2w_{i-1}) + \frac{1}{6}\omega_2(-w_{i-2} + 5w_{i-1} + 2w_i),$$

где $d_0 = 1/10$, $d_1 = 3/5$, $d_2 = 3/10$. “Левые” величины вычисляются по формуле

$$w_{i+1/2}^L = \frac{1}{6}\omega_0(-w_{i+2} + 5w_{i+1} + 2w_i) + \frac{1}{6}\omega_1(-w_{i-1} + 5w_i + 2w_{i+1}) + \frac{1}{6}\omega_2(2w_{i-2} - 7w_{i-1} + 11w_i),$$

где $d_0 = 3/10$, $d_1 = 3/5$, $d_2 = 1/10$.

При вычислении потока на грани $x = x_{i+1/2}$ выбирается $w_{i+1/2} = w^+ = w_{i+1/2}^L$, если $a > 0$, или $w_{i+1/2} = w^- = w_{i+1/2}^R$, если $a < 0$.

Отметим, что граничные ячейки должны обрабатываться отдельно с учетом граничных условий. Тем не менее, поскольку в формулах реконструкции используются ячейки с номерами, выходящими за пределы нумерации внутренних точек, то приходится вводить дополнительные фиктивные приграничные ячейки с “бесконечными”, точнее очень большими значениями, например, следующим образом:

$$w_{-i} = (10(-i + 1))^{10}, \quad i = 0, 1, 2; \quad w_{N+i} = (10(i + 1))^{10}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Определенные таким образом фиктивные значения w обеспечивают единообразную реконструкцию потоков для всех точек, обрезая большие искусственные значения за счет нелинейных весовых коэффициентов ω , тем самым обеспечивая нужный порядок аппроксимации.

Вычисление потоков для граничных ячеек осуществляется с помощью значений реконструированных характеристических переменных V , приходящих на границу, и граничных условий. Например, для вычисления потока на грани $x_{i+1/2}$ в ячейке $I_1 = [x_{1/2}, x_{3/2}]$ необходимо использовать значения характеристических переменных $V_{1/2}^- = V_{1/2}^R$, дополненных граничными условиями.

Мгновенная релаксация давлений, о которой говорилось в конце предыдущего пункта, реализуется следующим образом. Вначале методом Рунге–Кутты/WENO, описанным выше, вычисляется решение системы (3) в одномерном или двумерном случае при $\lambda = 0$. Затем полученное решение корректируется с использованием уравнения $K_1\rho_1 = K_2\rho_2$. Для этого берутся уже вычисленные в каждой точке значения $\alpha_1^0\rho_1 + \rho_1^0\alpha_1$, $\alpha_2^0\rho_2 + \rho_2^0\alpha_2$, которые вместе с условием равенства давлений дают линейную систему уравнений для ρ_1 , ρ_2 , α_1 .

4. Одномерные тестовые расчеты

Верификация описанного в предыдущем пункте метода Рунге–Кутты/WENO была проведена в серии расчетов для одномерных волновых процессов. Во-первых, для случая нулевого коэффициента межфазного трения было проведено сравнение с точным решением (бегущей волной). Во-вторых, были проведены расчеты с различными коэффициентами межфазного трения.

Будем использовать материальные параметры среды, соответствующие кварцевому песчанику, насыщенному водой:

$$\rho_1^0 = 2650 \text{ кг/м}^3, \quad C_p = 5900 \text{ м/с}, \quad C_s = 3700 \text{ м/с}, \quad \rho_2^0 = 1000 \text{ кг/м}^3, \quad C_2 = 1500 \text{ м/с}.$$

Модули K_1 , K_2 упругой и жидкой фаз и модуль сдвига упругой фазы μ вычисляются через C_p , C_s , C_2 по формулам: $K_1 = C_p^2$, $K_2 = C_2^2$, $\mu = \rho_1^0 C_s^2$. Величина пористости в расчетах бралась равной 0.2. Это означает, что в начальных данных $\alpha_1^0 = 0.8$, $\alpha_2^0 = 0.2$.

Точное решение одномерной системы уравнений (5) в виде бегущей вправо (в положительном направлении оси x) волны при отсутствии межфазного трения может быть найдено в предположении, что все функции зависят от переменной $x - \Lambda t$, где Λ — скорость распространения звуковых волн. Каждой скорости звука соответствует своя бегущая волна. Скорости звука могут быть найдены из характеристического уравнения для системы:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0,$$

которая получается из (4) отбрасыванием правой части.

Рассмотрим решение, для которого параметры среды (вектор примитивных переменных) имеют вид

$$\mathbf{u} = (u_1^1, u_1^2, \rho_1, \rho_2, \varepsilon_{11}, \alpha_1) \exp(-k(x - \Lambda t)^2),$$

где собственный вектор

$$(u_1^1, u_1^2, \rho_1, \rho_2, \varepsilon_{11}, \alpha_1) = \left(\frac{4\Lambda\mu\alpha_1^0}{3\rho(\Lambda^2 - K_1)}, \frac{4\Lambda\mu\alpha_1^0}{3\rho(\Lambda^2 - K_2)}, \frac{4\mu\alpha_1^0\rho_1}{3\rho(\Lambda^2 - K_1)}, \frac{4\mu\alpha_1^0\rho_2}{3\rho(\Lambda^2 - K_2)}, -1 \right),$$

$$\Lambda = \sqrt{\frac{\hat{b} + \sqrt{\hat{b}^2 - 4\hat{c}}}{2}}, \quad \hat{b} = K_1 + K_2 + \frac{4\mu c_1^0}{3\rho_1^0}, \quad \hat{c} = K_1 K_2 + \frac{4\mu c_1^0(K_1 c_2^0 + K_2 c_1^0)}{3\rho_1^0}.$$

Такая бегущая вправо волна порождается начальными данными:

$$\mathbf{u} = (u_1^1, u_1^2, \rho_1, \rho_2, \varepsilon_{11}, \alpha_1) \exp(-kx^2).$$

Расчеты проводились для значения $k = 1/150$ для разных пространственных шагов. Время расчета составляет $\sim 1.1 \cdot 10^{-3}$ с, что приблизительно соответствует времени прохождения волной своих пятидесяти длин. На рис. 1 приведены графики скорости u_1^1 точного и численного решений, полученные соответственно для 20, 35 и 50 точек на длину волны. В таблице приведены значения относительной погрешности, характеризующие точность полученного численного решения f_i по сравнению с точным решением $f(x_i)$:

| Точки на длину волны | Относительная погрешность |
|----------------------|---------------------------|
| 20 | 0.179705 |
| 30 | 0.047505 |
| 50 | 0.0120164 |

Относительная погрешность вычислялась по формуле $\sqrt{\sum(f(x_i) - f_i)^2} / \sqrt{\sum(f(x_i))^2}$. Видно, что численное решение для пятидесяти точек очень хорошо совпадает с точным решением.

Далее, для изучения влияния межфазного трения на волновые поля была численно исследована задача о распространении волн, генерируемых источником на границе, в предположении о мгновенной релаксации давления. На левой границе полуплоскости $x > 0$ задавались скорости $u_1^1(0, t) = u_2^1(0, t) = \sin(\omega t)$, где $\omega = \Lambda/15$ с⁻¹. На рис. 2, 3, 4 изображены соответственно профили скоростей u_1^1 и u_2^1 на момент времени $t = 1.15 \cdot 10^{-3}$ с. Сплошная линия изображает профиль u_1^1 , пунктирная — u_2^1 . Рисунок 2 соответствует нулевому коэффициенту трения, рис. 3 — коэффициенту трения $\chi = 7 \cdot 10^3$ с⁻¹, а рис. 4 —

коэффициенту трения $\chi = 10^6 \text{ c}^{-1}$. Видно, что при отсутствии трения от границы распространяются две волны, быстрая и медленная, что соответствует экспериментально наблюдаемым фактам. При увеличении трения амплитуда медленной волны и разница в скоростях фаз уменьшаются, и при достаточно большом коэффициенте трения наблюдается только одна волна с одинаковыми скоростями фаз (т. е. в среде отсутствует относительное движение фаз). Описанные факты согласуются с теоретическими представлениями о распространении волн в насыщенных пористых средах.

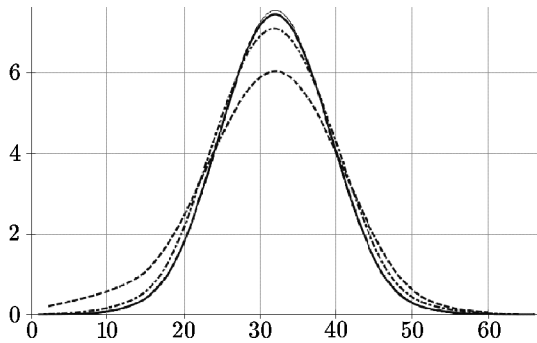


Рис. 1. Численные и аналитическое решения для скорости u_1^1 после прохождения 50 длин волн. Тонкая сплошная линия — аналитическое решение. Жирная сплошная, штрихпунктирная и штриховая линии соответствуют 50, 30 и 20 точкам на длину волны

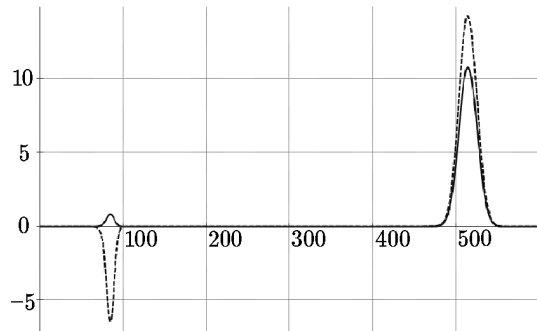


Рис. 2. Поля скоростей фаз (u_1^1 — сплошная линия, u_2^1 — пунктирная линия), генерация синусом на левой границе, трение отсутствует ($\chi = 0$)

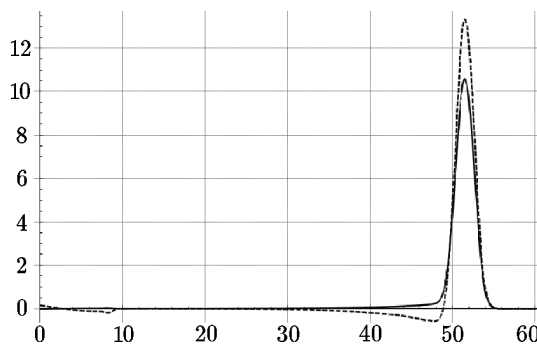


Рис. 3. Поля скоростей фаз (u_1^1 — сплошная линия, u_2^1 — пунктирная линия), генерация синусом на левой границе, коэффициент релаксации относительной скорости $\chi = 7 \cdot 10^3 \text{ c}^{-1}$

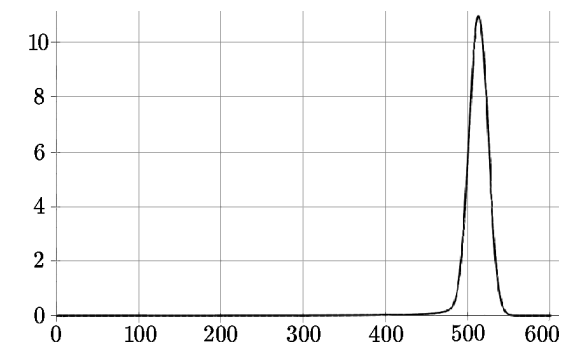


Рис. 4. Поля скоростей фаз (u_1^1 — сплошная линия, u_2^1 — пунктирная линия), генерация синусом на левой границе, коэффициент релаксации относительной скорости $\chi = 10^6 \text{ c}^{-1}$

5. Двумерные тестовые расчеты

Целью двумерных тестовых расчетов, результаты которых приведены в данном пункте, являлась проверка применимости разработанного метода для решения многомерных задач, в том числе задач с границей раздела сред. Задача решалась в прямоугольной области, в центре которой генерировалось волновое поле при помощи импульса Риккера. Предполагалась мгновенная релаксация давлений фаз к общему значению давления. Расчет проводился до тех пор, пока волна не достигала границы расчетной области. Ни-

же показаны волновые поля для случая однородной среды и среды, состоящей из двух горизонтальных слоев с разными материальными характеристиками. Расчетная область в обоих примерах представляет собой квадрат $1000 \text{ м} \times 1000 \text{ м}$, рассматривалась среда с нулевым коэффициентом межфазного трения.

В первом варианте двумерных расчетов рассматривалась однородная среда с параметрами: $\rho_1^0 = 2650 \text{ кг/м}^3$, $C_p = 5900 \text{ м/с}$, $C_s = 3700 \text{ м/с}$, $\rho_2^0 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $C_2 = 1500 \text{ м/с}$, $\alpha_1^0 = 0.8$, $\alpha_2^0 = 0.2$.

В центре квадрата задавался источник в правой части уравнений для плотностей системы (3) в виде импульса Риккера:

$$15 t^2 \exp\{-t\} \exp\left\{-\left(\frac{(x-x_0)^2}{15^2} + \frac{(y-y_0)^2}{15^2}\right)\right\}.$$

На рис. 5 изображены поля скорости фаз u_1^1 и плотности ρ_1 на момент времени $t = 175 \text{ мс}$. Видно, что от источника распространяются две волны, быстрая и медленная, что, как уже говорилось, соответствует экспериментально наблюдаемым фактам.



Рис. 5. Волновые поля скорости u_1^1 (левый рисунок) и плотности ρ_1 (правый рисунок), порожденные импульсом Риккера в однородной среде

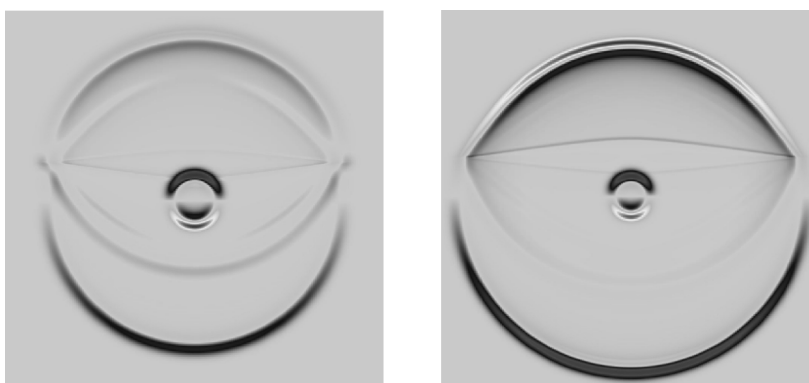


Рис. 6. Прохождение границы раздела двух сред. На левом рисунке начальные концентрации: $\alpha_1^0 = 0.8$ — сверху, $\alpha_1^0 = 0.95$ — снизу. На правом рисунке начальные концентрации: $\alpha_1^0 = 0.95$ — сверху, $\alpha_1^0 = 0.8$ — снизу

Во второй тестовой задаче внутри квадрата на линии $y = 600$ проходила граница раздела двух сред. На рис. 6 показано поле u_1^1 на момент времени $t = 175$ мс. На левом рисунке виден результат расчета для случая, когда сверху находится среда с параметром $\alpha_1^0 = 0.8$, а снизу — с параметром $\alpha_1^0 = 0.95$. На правом рисунке указанные среды поменялись местами. Отметим, что при решении этой тестовой задачи вычисление потоков в разностной схеме осуществлялось с помощью решения задачи Римана о контактном разрыве для системы (3). На рисунках видна сложная картина волновых полей, включающих волны, как проходящие через границу раздела, так и отраженные от нее.

6. Выводы

С использованием термодинамически согласованной системы уравнений течения сжимаемой жидкости в упругой пористой среде выведены уравнения распространения волн малых возмущений в неподвижной ненапряженной среде. Для решения системы линейных дифференциальных уравнений разработан метод Рунге–Кутты/WENO высокого порядка точности (четвертого порядка по времени и пятого порядка по пространству). Проведена серия одномерных и двумерных тестовых расчетов распространения волн малой амплитуды, в том числе проведено сравнение с точным решением для одномерной бегущей волны. Результаты расчетов продемонстрировали эффективность предлагаемого метода, который может быть обобщен для решения полных термодинамически согласованных уравнений насыщенной упруго-деформируемой пористой среды в случае конечных деформаций.

Литература

1. **Роменский Е.И.** Термодинамически согласованная система законов сохранения течения сжимаемой жидкости в пористой упругой среде // Сиб. журн. индустр. матем. — 2011. — Т. 14, № 4. — С. 86–97.
2. **Годунов С.К., Роменский Е.И.** Элементы механики сплошной среды и законы сохранения. — Новосибирск: Научная книга, 1998.
3. **Dumbser M., Zanotti O., Hidalgo A., and Balsara D.S.** ADER-WENO finite volume schemes with space-time adaptive mesh refinement // J. Comput. Physics. — 2013. — Vol. 248, № 1. — P. 257–286.
4. **Дмитриев М.Н., Роменский Е.И.** WENO/Рунге–Кутта метод высокой точности для моделирования упругих волн // Уфимск. матем. журн. — 2010. — Т. 2, № 1. — С. 59–70.
5. **Spiteri R.J., Ruuth S.J.** A new class of optimal high-order strong-stability preserving time discretization methods // SIAM J. Numer. Anal. — 2002. — Vol. 40, № 2. — P. 469–491.
6. **Gottlieb S.** On high order strong stability preserving Runge–Kutta and multi step time discretizations // J. of Scientific Computing. — 2005. — Vol. 25, № 1, 2. — P. 105–128.
7. **Shu C.W.** Essentially Non-Oscillatory and Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes for Hyperbolic Conservation Laws—NASA/CR-97-206253, 1997. — (ICASE Report № 97-65).
8. **Доровский В.Н., Роменский Е.И., Перепечко Ю.В., Федоров А.И.** Резонансный метод измерения проницаемости горных пород // Геология и Геофизика. — 2011. — Т. 52, № 7. — С. 950–961.

*Поступила в редакцию 20 мая 2013 г.,
в окончательном варианте 20 августа 2013 г.*

