

УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ В СОСТОЯНИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

В. Ф. Воробьев

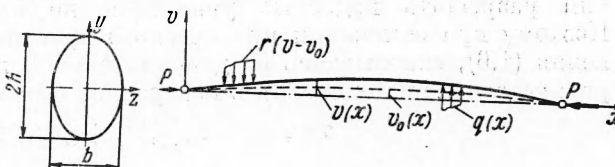
(Москва)

Рассматривается задача об определении предельного срока службы («критического времени») сжато-изогнутого стержня в условиях ползучести. Приближенное решение задачи ищется методом Галеркина. Показано, что при соответствующих предположениях эквивалентные решения получаются на основе общего вариационного принципа, разработанного Л. М. Качановым [1]. Аналогичная задача для стержня, нагруженного осевыми силами, решена В. И. Розенблюмом [2].

Получены приближенные расчетные формулы для определения «критического времени». Результат расчетов сравнивается с экспериментальными данными [3] и расчетами авторов [3, 4].

§ 1. Постановка задачи и метод решения. Тонкий стержень (фиг. 1) постоянной площади поперечного сечения F и длиной l лежит на упругом основании с модулем r ; сечение стержня имеет две оси симметрии (y, z) .

До приложения нагрузки имеется малый прогиб $v_0 = a_0\varphi(x)$ с амплитудой a_0 . Стержень нагружен продольной сжимающей силой P , которая меньше своего критического значения P_* в задаче упругости, и поперечной нагрузкой интенсивностью $q(x)$. Непосредственно после приложения полной нагрузки прогиб $v_1 = a_1\varphi(x)$ получается из решения соответствующей задачи упругости (считается, что мгновенная пластическая деформация пренебрежимо мала по сравнению с упругой). Далее прогиб будет расти. Поэтому момент внешних сил M в задаче о продольном изгибе стержня зависит от времени.



Фиг. 1

При шарнирном опирании концов стержня, когда отсутствует эксцентриситет приложения осевой нагрузки, в любой момент времени прогиб и изгибающий момент удовлетворяют однородным граничным условиям

$$v(0, t) = v(l, t) = 0, \quad M(0, t) = M(l, t) = 0 \quad (1.1)$$

а напряжения — уравнениям равновесия

$$\int_F \sigma dF = P, \quad \int_F \sigma y dF = M(x, t) \quad (1.2)$$

(сжимающие напряжения положительны). Считаем, что при простом растяжении деформация и напряжение связаны соотношением [1]

$$\frac{d\epsilon_x}{dt} = f(\sigma^2, t) \sigma + \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} \quad (1.3)$$

В случае степенной зависимости в физическом законе (1.3)

$$f(\sigma^2, t) \sigma = B_1(t) \sigma^m$$

где функция $B_1(t)$ и постоянная m определяются при растяжении под действием постоянной нагрузки.

Используем также гипотезу плоских сечений

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0(t) + y \frac{\partial^2 (v - v_0)}{\partial x^2} \quad (1.4)$$

Задача заключается в том, чтобы найти критическое время t_* , отсчитываемое с момента приложения полной нагрузки ($t = 0$) до разрушения стержня

$$\lim_{t \rightarrow t_*} v(x, t) = \infty \quad (t_* < \infty) \quad (1.5)$$

В противном случае стержень будем считать устойчивым.

Уравнения (1.2) — (1.4) совместно с краевыми условиями (1.1) определяют необходимую систему уравнений поставленной задачи относительно σ , ε_0 , ε_x и v . Причем, так как известна функция $v(x, t)$, то согласно (1.5) становится известной и величина t_* . Однако, ввиду нелинейности закона ползучести (1.3) решение этих уравнений возможно получить лишь громоздким численным способом. Это вызывает интерес к приближенным аналитическим решениям данной задачи.

Для построения приближенного аналитического решения продифференцируем (1.4) по времени и подставим результат в уравнение (1.3). Затем, если из полученного уравнения выразить производную напряжения по времени и подставить ее в продифференцированное по времени уравнение моментов (1.2), то в итоге получим уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2 \partial t} - \frac{1}{EJ} \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{1}{J} \int_F (\sigma^2, t) \sigma y dF \quad (1.6)$$

определяющее поведение прогибов во времени¹.

Проделав аналогичные действия относительно первого уравнения равновесия (1.2), получим уравнение, определяющее поведение осевых деформаций ε_0 во времени, но в общем случае без дополнительных упрощений разрешить подобные уравнения не представляется возможным. Поэтому при отыскании критического времени будем исходить из уравнения (1.6), основываясь на дополнительной гипотезе, характеризующей распределение напряжений в поперечном сечении стержня

$$\sigma(x, t) = \sigma_0(x, t) + y^\mu \sigma_1(x, t) \quad (1.7)$$

где μ — параметр, определяющий распределение напряжений в поперечном сечении стержня.

Наиболее обоснованный выбор величины μ можно было бы сделать, исходя из общего вариационного принципа теории ползучести [1], но так как, кроме μ , необходимо еще определить неизвестную функцию прогиба, то это ведет к чрезмерному усложнению задачи. Поэтому остановимся на более грубом способе выбора величины μ .

Вследствие релаксационных явлений и увеличения изгибающего момента с течением времени распределение напряжений в сечении сжато-изогнутого стержня будет видоизменяться по некоторому закону и, вообще говоря, не будет стремиться к какому-либо стационарному состоянию. Но каково бы ни было возможное распределение напряжений в сечении изгибаемого стержня, можно доказать [4], что под действием одной и той же нагрузки в рассматриваемый момент времени скорость деформирования будет наибольшей при $\mu = 1$ и наименьшей при $\mu = 0$. А критическое время, наоборот, при $\mu = 1$ будет наименьшим, а при $\mu = 0$ — наибольшим. Поэтому при прочих равных условиях минимальное критическое время определяется параметром $\mu = 1$, который и следует выбирать для получения нижней оценки t_* .

При изгибе стержня под действием постоянной нагрузки ($P = 0$) по истечении некоторого промежутка времени задача по характеру распределения нормальных напряжений будет гораздо ближе к задаче чистого из-

¹ Вывод уравнения (1.6) см. в § 4.

гиба в условиях установившейся ползучести, так как в этом случае достигается стационарное распределение напряжений. В данном случае, видимо, без существенного завышения критического времени можно полагать $\mu = 1/m$. В дальнейшем будем также считать пока $m = 2k + 1$ и все выкладки производить для случая $\mu = 1/(2k + 1)$.

Из (1.2) получим

$$\sigma_0 = \frac{P}{F}, \quad \sigma_1 = \frac{M(x, t)}{J_m} \quad \left(J_m = \int_F y^{\mu+1} dF \right)$$

Таким образом, статически возможные напряжения

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 + \frac{MF}{J_m P} y^\mu \right) \quad (1.8)$$

где изгибающий момент M удовлетворяет граничным условиям (1.1).

Внешнюю нагрузку, действующую на стержень, можно представить в виде эквивалентной поперечной нагрузки

$$p(x) = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -P \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - r(v - v_0) + q(x) \quad (1.9)$$

После двукратного интегрирования (1.9) при условии (1.1) получим

$$M(x, t) = -Pv + \frac{rx}{l} \int_0^l (v - v_0)(l - x) dx - \frac{x}{l} \int_0^l q(x)(l - x) dx - \\ - r \int_0^x (v - v_0)(x - s) ds + \int_0^x q(s)(x - s) ds. \quad (1.10)$$

На основе равенства (1.8) и (1.10) уравнение (1.6) в конечном итоге содержит только одну искомую функцию $v(x, t)$.

Для решения нелинейного уравнения (1.6) используем метод Галеркина. В простейшем случае прогиб можно задать в виде произведения

$$v = a_1 \rho(t) \varphi(x) \quad (1.11)$$

где $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям шарнирного опирания.

Так как $v_1(x, 0) = a_1 \varphi(x)$, то $\rho(0) = 1$ и согласно (1.5) $\rho(t_*) = \infty$.

Подставив (1.11) в (1.10), изгибающий момент в общем случае можно представить в виде

$$M(x, t) = a_1 \rho(t) M_0(x) + M_1(x) \quad (1.12)$$

Подставив в левую часть уравнения (1.6) зависимости (1.11) и (1.12) и умножив полученное выражение на $\varphi(x) dx dt$, проинтегрируем его по x от 0 до l и далее, после разделения переменных, по ρ от 1 до ∞ и по времени от 0 до t_* . В результате получим решение в виде

$$\tau_* = \frac{a_1 F}{P} \int_0^l (EJ\varphi'' - M_0) \varphi dx \int_1^\infty \left[\int_0^l \varphi \int_F \left(1 + \frac{MF}{J_m P} y^\mu \right)^m y dF dx \right]^{-1} d\rho \quad (1.13) \\ \tau_* = E\sigma_0^{m-1} \int_0^{t_*} B_1(t) dt = E\sigma_0^{m-1} \Omega_1(t_*)$$

Здесь штрихи обозначают дифференцирование по x . Для вычислений в решении (1.13) интеграл по площади поперечного сечения удобно при помощи разложения Ньютона представить в виде полинома

$$\int_F \left(1 + \frac{MF}{J_m P} y^\mu \right)^m y dF = \sum_{n=1}^m \left(\frac{MF}{J_m P} \right)^n C_m^n J_m^n \quad (1.14)$$

Здесь C_m^n — биномиальные коэффициенты,

$$n = 2k + 1, \quad J_m^n = \frac{1}{h^{\mu n}} \int_E y^{\mu n + 1} dF$$

Заметим, что $J_m^n = 0$ при $n = 2k$ в силу симметрии сечения стержня.

Если отказаться от гипотезы (1.7), то при построении решения следует исходить либо непосредственно из уравнения (1.6), либо из общего вариационного принципа ползучести (§ 4). Так как приняты гипотеза (1.7) и степенной закон ползучести, то будем исходить непосредственно из решения (1.13). При этом, если нас интересует не численная величина t_* , а функция прогиба, то в (1.13) бесконечный предел интегрирования по ρ следует заменить на функцию $\rho(t)$, а $\Omega_1(t_*)$ — на $\Omega_1(t)$.

Рассмотрим некоторые задачи.

§ 2. Примеры. 1. Стержень на упругом основании, нагруженный осевой силой. Положим

$$\varphi(x) = \sin u \quad (u = \pi x / l) \quad (2.1)$$

и $v_0 = a_0 \sin u$. Можно показать, что при $t = 0$, непосредственно после приложения полной нагрузки $P > 0$, стержень получит прогиб $v_1 > v_0$ с амплитудой

$$a_1 = a_0 \left(1 - \frac{P}{P_*}\right)^{-1} \quad \left(P_* = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \left[1 + \frac{rl^2}{\pi^4 EJ}\right]\right) \quad (2.2)$$

При $t > 0$ прогиб определяется уравнениями (1.11), (2.1), (2.2) и равен $v = a_1 \rho(t) \sin u$. Подставляя его значение в (1.10), получим

$$M(x, t) = -P [(a_1 \rho - a_0)(1 - \kappa) + a_0] \sin u \quad \left(\kappa = \frac{r}{P} \left[\frac{l}{\pi}\right]^2\right) \quad (2.3)$$

Здесь κ — относительный параметр продольно-поперечной нагрузки.

Пользуясь полученными выражениями для прогиба и момента, можно решение (1.13) согласно (1.14) представить в виде

$$\tau_* = K(\alpha_0, \alpha_1, \mu, m) \frac{P_*}{P} \frac{P}{(1 - \kappa)} \quad (2.4)$$

где

$$K(\alpha_0, \alpha_1, \mu, m) = \frac{J_m^{-1}}{2} \int_{\alpha_1 + \alpha_0}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^m B_m^n J_m^n w^n \right]^{-1} dw \quad (w = \alpha_1 \rho + \alpha_0) \quad (2.5)$$

$$\alpha_1 = \frac{a_1 F}{J_m^{-1}} (1 - \kappa), \quad \alpha_0 = \frac{a_0 F}{J_m^{-1}} \kappa \quad (2.6)$$

а коэффициенты

$$B_m^n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) \Gamma(m+1)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right) \Gamma(m+1-n) n!} \quad (n = 2k + 1) \quad (2.7)$$

справедливы и для дробных значений m , но полином при этом обращается в ряд. Проанализируем решение (2.4) — (2.7), зависящее от пяти параметров; κ , a_0/h , $\zeta = Pl^2 / \pi^2 EJ$, m и μ .

До приложения нагрузки имелся положительный прогиб v_0 . Непосредственно после приложения силы $P > 0$ или эквивалентной поперечной нагрузки p (см. (1.9)) стержень получит прогиб $v_1 > v_0$. В дальнейшем при $t > 0$ возможны три случая изменения нагрузки во времени: $\partial p / \partial t > 0$, $\partial p / \partial t < 0$, $\partial p / \partial t = 0$ и, соответственно, три характерных случая изменения прогибов во времени.

Так как в рассматриваемом случае

$$\frac{\partial p}{\partial t} = P a_1 \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{d\rho}{dt} (1 - \kappa) \sin u$$

а под действием положительной силы P прогиб может только возрастать ($d\rho / dt > 0$), то три случая деформирования будут характеризоваться условиями: $\kappa < 1$, $\kappa > 1$ и $\kappa = 1$.

В первом случае ($\kappa < 1$) нагрузка возрастает со временем: прогибы растут с положительным ускорением и при $t = t_*$ обращаются в бесконечность. Величина t_* определяется уравнениями (2.4) — (2.7). Нетрудно показать, что несобственный интеграл (2.5) при $m \geq 3$ сходится. Поэтому t_* — величина ограниченная, т. е. согласно определению (1.5) стержень неустойчив.

Во втором случае ($\kappa > 1$) нагрузка уменьшается со временем и прогиб стремится к некоторому постоянному значению $v_e < \infty$. Согласно (1.4) стержень устойчив. Критического времени не существует. Время t_e определяется условием $p(t_e) = 0$, а прогиб v_e — значением $\rho(t_e)$.

Третий случай является предельным для первого и второго неравенств. При $\kappa = 1$ подынтегральная функция в (2.5) не зависит от ρ , т. е. $t_* = \infty$. Заменяя в (2.5) бесконечный предел интегрирования на ρ , обнаруживаем, что $\rho(t)$ линейно зависит от $\Omega_1(t)$. Таким образом, по истечении достаточно большого времени прогибы будут увеличиваться с постоянной скоростью и бесконечный прогиб достигается в течение неограниченного времени. Критическое время не существует.

Параметр α_0/h , как правило, гораздо меньше единицы. Тогда из (2.6) следует, что и $\alpha_0 \ll 1$. При этом, если $P/P_* < 1$, то согласно (2.2), (2.6) и $\alpha_1 \ll 1$. Физически это означает, что после приложения нагрузки прогиб должен оставаться небольшим. Воспользуемся малостью параметров α_1 и α_0 для построения приближенного аналитического решения.

Независимо от времени $\alpha_0 \ll 1$. С течением времени, пока ρ сравнима с единицей, также и $\alpha_{1\rho} \ll 1$. Следовательно, определяющими членами подынтегральной функции в (2.5) являются члены при младших коэффициентах B_m^n . С ростом ρ , когда $\alpha_{1\rho} \approx 1$, величина подынтегральной функции становится незначительной и, если несобственный интеграл сходится, то можно исключить из рассмотрения оставшийся участок интегрирования. Легко доказать, что при $m \geq 3$ этот интеграл сходится. Откуда следует, что при $\kappa < 1$ и $m \geq 3$ критическое время существует и что при определенных значениях параметров α_1 и m с достаточной точностью в (2.5) можно учитывать только члены при младших коэффициентах B_m^n . Последнее позволяет построить замкнутые расчеты формулы для приближенной оценки t_* .

Так, при учете в (2.5) первых двух коэффициентов B_m^n получим вместо (2.4)

$$\tau_* = \frac{P_* - P}{2mP(1-x)} \ln \left[1 + \frac{8J_m^1(\alpha_1 - \alpha_0)^{-2}}{(m-1)(m-2)J_m^3} \right] \quad (2.8)$$

Если κ не является чрезвычайно большой величиной, то она не изменяет порядка малости параметров α_0 и α_1 . Этим можно воспользоваться для построения приближенной функции прогиба и при $\kappa \geq 1$. Сохраняя два первых коэффициента B_m^n при переменном верхнем пределе в интеграле (2.5), получим

$$\rho = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1} + \left[\frac{e^{\rho_1}}{(1 + \alpha_0/\alpha_1)^{-2} + \alpha_1^2 A (1 - e^{\rho_1})} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{при } \kappa < 1 \quad (2.9)$$

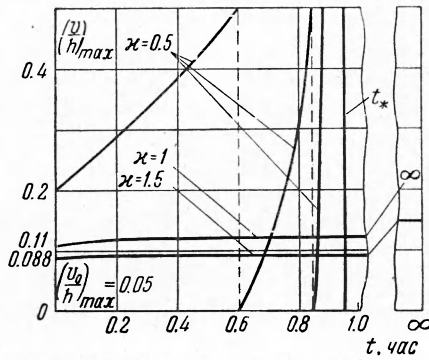
$$\rho = 1 + \frac{m\xi}{1 + \xi} (1 + \alpha_0^2 A) \tau \quad \text{при } \kappa = 1 \quad (2.10)$$

$$\rho = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1} - \left[e^{\rho_2} \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1} + 1 \right)^{-2} + \alpha_1^2 A (e^{\rho_2} - 1) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad \text{при } \kappa > 1 \quad (2.11)$$

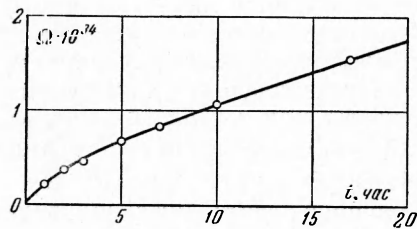
Здесь

$$P_1 = \frac{2m\tau}{\xi^{-1}(1-\kappa)^{-1} - 1}, \quad P_2 = \frac{2m\tau}{\xi^{-1}(\kappa-1)^{-1} + 1}, \quad A = \frac{B_m^3 J_m^3}{B_m^1 J_m^1}$$

На фиг. 2 построены кривые максимального прогиба при трех характерных значениях $\kappa = 0.5, 1, 1.5$. Расчет выполнен для материала 75S—Т6 при 315°C , $E = 3.64 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$, $\sigma_0 = 150 \text{ кг/см}^2$, $\zeta = 1.2$, $a_0/h = 0.05$.



Фиг. 2



Фиг. 3

и при $\kappa = 1$ момент зависит от времени. Поэтому, если хотя бы одна из функции ρ_i будет возрастающей, то согласно уравнению типа (1.13) критическое время будет ограниченным.

Положим для простоты анализа $m = 3$ и $F = 2bh$. Варьируя функцию прогиба по ρ_i и производя вычисления, подобные тем, которые были выполнены при выводе уравнения (1.13), получим систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d(\rho_i)^2}{d\tau} = A_i (\rho_i)^2 \left[1 + A \left(\frac{3}{h} \right)^2 (\rho_i)^2 + \frac{12}{5} A \left(\frac{3}{h} \right)^2 (\rho_j)^2 \right] \quad (i, j=1, 2) \quad (2.12)$$

(i ≠ j)

где

$$A_1 = 6(1 - \kappa) \left(\frac{P}{P^*} - 1 \right)^{-1}, \quad A_2 = 6 \left(1 - \frac{\kappa}{4} \right) \left(\frac{P}{P_1^*} - 1 \right)^{-1}$$

В общем случае получить аналитическое решение этой системы затруднительно. Поэтому воспользуемся упрощением ее при $\kappa = 1$ и $\kappa = 4$. При $\kappa = 1$ из системы (2.12) получим

$$\rho_1 = 1 + \frac{3\zeta}{1 + \zeta} \int_0^\tau \left[1 + A\alpha_0^2 + \frac{12}{5} \alpha_0^2 (\rho_2)^2 \right] d\tau \quad (2.13)$$

$$\rho_2 = -\frac{\varepsilon_0}{3\varepsilon_1} + e^{P_3/2} \left[\left(1 + \frac{\varepsilon_0}{3\varepsilon_1} \right)^{-2} + A \left(\frac{9\varepsilon_1}{4h} \right)^2 \left(1 + \frac{12}{5} A\alpha_0^2 \right) (1 - e^{P_3}) \right]^{-1/2} \quad (2.14)$$

где

$$P_3 = \frac{9\tau}{2} \left(1 + \frac{12}{5} A\alpha_0^2 \right) \left(\frac{P}{P^*} - 1 \right)^{-1}$$

Для прямоугольного сечения $A = \frac{3}{40}(m - 2)$. При этом постоянная $m = 13,4$ и функция $\Omega_1(t)$ (фиг. 3) получены по данным работы [3].

Для более полного выяснения характера деформирования стержня с ростом модуля основания r представим прогиб в виде

$$v = a_1 \rho_1 \sin u + \varepsilon_1 \rho_2 \sin 2u$$

Здесь

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_0}{1 - P/P_{*2}},$$

$$P_{*2} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \left(4 + \frac{rl^2}{4\pi^4 EJ} \right)$$

а $\varepsilon_1 \sin 2u$ — малое возмущение первоначальной формы прогиба $a_0 \sin u$ такое, что $\varepsilon_0/a_0 \ll 1$.

Теперь в отличие от уравнения (2.3)

$$M(x, t) = -P [(\rho_1) \sin u + (\rho_2) \sin 2u]$$

Здесь

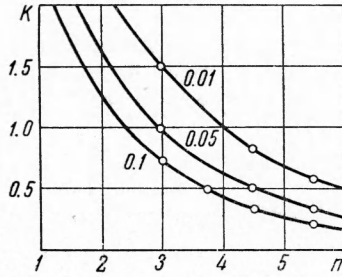
$$(\rho_1) = a_1(1 - \kappa) \rho_1 + a_0 \kappa,$$

$$(\rho_2) = \varepsilon_1 \left(1 - \frac{\kappa}{4} \right) \rho_2 + \varepsilon_0 \frac{\kappa}{4}$$

Функция ρ_2 со временем неограниченно возрастает (ср. с (2.9)). Согласно (2.13), пока величина ρ_2 мала, поведение ρ_1 определяется зависимостью типа (2.10), а далее она также неограниченно возрастает. Формулу для оценки τ_* можно получить, приравняв нулю знаменатель в (2.14). Она имеет характер выражения (2.8), но определяет при прочих равных условиях большие значения τ_* , так как зависит от параметра $\varepsilon_1 / h \ll a_1 / h$.

При $\kappa = 4$ получим для ρ_2 зависимость, аналогичную формуле (2.10), а для ρ_1 — формуле (2.11). Следовательно, теперь ρ_2 становится сколь угодно большой только для неограниченного интервала времени. Критического времени не существует. Но если учесть в начальной форме прогиба гармоники более высоких порядков, то критическое время вновь будет существовать, функция же ρ_1 в рассматриваемом случае ограничена.

Таким образом, с увеличением параметра κ от 1 до 4 форма изгиба $\rho_1 \sin u$ начинает «отмирать», а форма $\rho_2 \sin 2u$ продолжает неограниченно развиваться во времени. Все это показывает, что с увеличением модуля упругого основания возможная форма деформирования стержня, которая будет развиваться неограниченно, имеет тенденцию к уменьшению длины волны, а критическое время при этом возрастает.



Фиг. 4

2. Стержень, нагруженный осевой силой. Решение просто получается из предыдущего при $\kappa = 0$. Таким образом, из (2.4)

$$\tau_* = K(m, \alpha_1) \frac{1 - \zeta}{\zeta} \quad \text{при } \mu = 1 \quad (\alpha_1 = \alpha_1(\zeta, a_0/h))$$

Следует отметить, что это решение впервые было получено из вариационного уравнения задачи в работе [2].

Далее, для стержня прямоугольного поперечного сечения

$$\tau_* = \frac{1 - \zeta}{2m\zeta} \ln \left[1 + \frac{40(1 - \zeta)^2}{27(m - 1)(m - 2)} \left(\frac{a_0}{h} \right)^{-2} \right] \quad (2.15)$$

Эффективность приближенных формул типа (2.15) зависит от того, насколько исчерпывается величина критического времени при стремлении a_1/h к единице. Этот вопрос, правда в несколько иной связи, рассматривался в работе [2], где численным расчетом показано, что «почти весь интервал времени от $t = 0$ до $t = t_*$ прогибы остаются весьма малыми, во всяком случае меньше, чем h ». Экспериментальное подтверждение этого можно найти, например, в [3]. Такое поведение прогибов в некоторой степени оправдывает постановку рассматриваемой задачи в малых прогибах, несмотря на то, что при определении t_* используется неограниченная функция прогиба.

Границы применимости формулы (2.15) устанавливаются из сравнения приближенного расчета величины $K(m, \alpha_1)$ с численным вычислением интеграла (2.5) и с его точным значением при $m = 3$ и $m = 5$. Подобный расчет показал, что при $m < 11$ и $a_1/h < 0.01$ или при $m < 5$ и $a_1/h < 0.1$ формула (2.15) дает наибольшую ошибку порядка 5% в сторону завышения. При учете члена B_m^5 та же точность получается при $m < 11$ и $a_1/h < 0.1$.

На фиг. 4 показано сравнение численного расчета величины $K(m, \alpha_1)$ (сплошные кривые)¹ для значений $a_1/h = 0.01, 0.05, 0.1$, приведенного в работе [2], с расчетом по формуле (2.5) с учетом B_m^1 и B_m^3 (точки).

¹ При вычислении величины K (формула (5.4) в [2]) при интегрировании по площади поперечного сечения стержня пропущен множитель 2.

3. *Стержень, нагруженный поперечной нагрузкой, не зависящий от времени.* Так как $P = 0$, то $\sigma_0 = 0$, и согласно (1.10) имеем $M(x, t) = M(x)$. Заменяя бесконечный предел интегрирования в (1.13) на ρ , после некоторых преобразований получим при $\mu = 1/m$

$$\rho(t) = 1 + \Omega_1(t) \int_0^l M^m(x) \varphi(x) dx [a_1 (J_m)^m \int_0^l \varphi''(x) \varphi(x) dx]^{-1} \quad (2.16)$$

Вследствие постоянства внешней нагрузки поведение прогибов в данном случае определяется функцией $\Omega_1(t)$. Критического времени не существует.

В качестве примера использования формулы (2.16) рассмотрим случай равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q . Согласно (1.10) имеем $M(x) = -1/2 qx(l-x)$. Положим

$$\varphi(x) = \frac{4x}{l^2} (l-x) \quad (2.17)$$

Теперь, пользуясь уравнениями (1.11) и (2.16), легко получить

$$v = \left[\frac{5ql^4}{384EJ} + \left(\frac{ql^2}{2J_m} \right)^m \frac{12 [\Gamma(m+2)]^2}{l^2 \Gamma(2m+4)} \Omega_1(t) \right] \frac{4x(l-x)}{l^2}$$

Другие способы решения подобных задач можно найти, например, в работе [1].

4. *Стержень, нагруженный продольно-поперечной нагрузкой.* Решение этой задачи в общем случае нагружения определяется уравнением (1.13), в котором изгибающий момент зависит от характера продольно-поперечной нагрузки.

Для примера рассмотрим случай нагружения сжимающей осевой силой P и равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q . Функцию $\varphi(x)$ возьмем в виде (2.17). Не останавливаясь на подробностях вычислений, укажем, что решение задачи выражается формулами (2.4) и (2.5), в которых

$$\kappa = 0, \quad \alpha_1 = a_1 F / J_m^1, \quad \alpha_0 = ql^2 F / 8PJ_m^1, \quad \zeta = Pl^2 / 10EJ, \quad \mu = 1$$

$$R_m^n = \frac{15}{16} \frac{2^{2n+2} \Gamma(m+1) [\Gamma(n+2)]^2}{n! \Gamma(m-n+1) \Gamma(2n+4)} \quad (2.18)$$

Величина a_1 зависит как от P , так и от q и находится из решения соответствующей задачи упругости.

Отношения первых трех коэффициентов (2.7) и (2.18) соответственно равны: 1, 0.9844, 0.9775. Из сравнения коэффициентов разложения и решений можно установить, что в предельном случае при $r = 0$ первое сравниваемое решение совпадает со вторым при $q \rightarrow 0$, несмотря на различные способы задания функции $\varphi(x)$.

Для рассматриваемой задачи не удастся в общем случае получить замкнутой формулы для приближенного вычисления критического времени. Только в случае, когда параметр $ql^2 / 8Ph \ll 1$, можно получить формулу, аналогичную (2.8). Для стержня прямоугольного поперечного сечения

$$\tau_* = \frac{1-\zeta}{2m\zeta} \left(\frac{16}{15} \right) \ln \left[1 + \frac{35}{24(m-1)(m-2)} \left(\frac{ql^2}{8Ph} + \frac{a_1}{h} \right)^{-2} \right]$$

В общем случае следует исходить из решения (2.4), (2.5). При этом, когда $m = 3$ или $m = 5$, интеграл (2.5) можно вычислить аналитически, а в остальных случаях — численно для соседних с расчетным целых значений m , а затем интерполировать действительное значение интеграла.

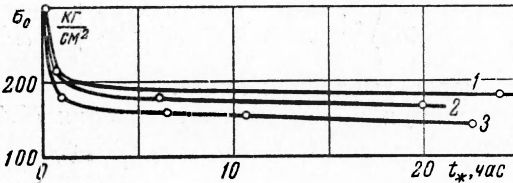
5. *Стержень с эксцентриситетом приложения осевой нагрузки.* Если по концам стержня приложена осевая сила с эксцентриситетом e , то

изгибающий момент можно представить в виде $M = -P(e + v)$. Функцию $\varphi(x)$ возьмем в виде (2.1). Не останавливаясь на вычислениях, приведем окончательный результат

$$\tau_* = \frac{1-\xi}{\xi m} \ln \left[1 - \frac{5\pi}{36(m-1)(m-2)} \left(\frac{e}{h}\right)^{-1} \left(\frac{a_1}{h}\right)^{-1} \right]$$

Формула справедлива для стержня прямоугольного поперечного сечения в предположении, что $\mu = 1$, и применима при $m \geq 3$, и когда квадратом величины $3m(e/h)$ можно пренебречь по сравнению с единицей.

§ 3. Сравнение с экспериментом и численными расчетами других авторов. На фиг. 5 приведено сравнение зависимостей $t_* = t_*(\sigma_0)$ для стержня прямоугольного сечения $2h \times b = 0.63 \times 0.95$ см² при $l = 20.3$ см и $a_0 = 0.005$ см. Физические параметры взяты те же, что и при расчете графика на фиг. 2 в § 2. Стержень нагружен осевой силой P . Кривые 1 и 2 взяты из работы [3], кривая 3 рассчитана по формуле (2.15). Средняя кривая получена Хиггинсом путем сложных численных вычислений. Расхождение теоретической зависимости (2.15) с экспериментальной (кривая 1) для одного и того же времени составляет около 10% от $\sigma_0 = 300$ кг/см². Расхождение по времени несравненно больше.



Фиг. 5

Автор работы [4] для проверки своего аналитического решения сравнивает его с результатом численного расчета критического времени, не связанного с гипотезой о характере распределения напряжений в поперечном сечении изгибаемого стержня.

Вычисления при $m = 3$, $\xi = 0.7$ и $a_1/h = 0.0096$ дают для стержня прямоугольного поперечного сечения $\tau_* = 0.663$. Формула (2.15) дает $\tau_* = 0.643$, что несколько больше совпадает с расчетной величиной 0.663, нежели τ_* , полученное в упомянутой работе, использующей менее жесткие исходные гипотезы. (В работе [4] при линейном распределении напряжений в сечении изгибаемого стержня $\tau_* = 0.519$.) Отметим также, что в этом примере расхождение по времени уже гораздо меньше, чем в предыдущем.

§ 4. Вариационное уравнение задачи. Согласно общему вариационному принципу [1] истинное напряженное состояние тела отличается от близких статически эквивалентных напряженных состояний условием

$$\delta \int_V \left(\Lambda + \frac{\partial \Pi}{\partial t} \right) dV = \int_S \left(\frac{\partial v}{\partial t} \delta q_n \right) dS \quad (4.1)$$

Здесь

$$\Lambda = \frac{1}{2} \int_0^{\sigma^2} f(s, t) ds, \quad \Pi = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E}$$

Интегрирование в (4.1) распространяется по всему объему тела V и поверхности S , занятой поверхностной нагрузкой. Так как в данном случае рассматривается класс вариаций, не зависящих от времени, то в (4.1) производную по времени можно вынести из-под знака интеграла по поверхности. Подставляя в него значение $q_n = p/b$ из (1.9) и учитывая, что величины P , r , v_0 и $q(x)$ заданы на S и не варьируются, после некоторых преобразований, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^l v p dx = - \frac{\partial}{\partial t} \left\{ P v \delta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_0^l - \delta \left[\frac{P}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{r}{2} \int_0^l v^2 dx \right] \right\}$$

При шарнирном опирании и заделке концов стержня первое слагаемое в полученном выражении обращается в нуль. Обращаясь к (4.1), получим основное вариационное уравнение

$$\delta I_0 \equiv \delta \left[\int_0^l \left(\Lambda + \frac{\partial \Pi}{\partial t} \right) dF dx - \frac{P}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l v^2 dx \right] = 0 \quad (4.2)$$

отличающее истинное распределение напряжений в стержне, нагруженном продольно-поперечной нагрузкой. При отсутствии упругого основания и поперечной нагрузки уравнение несколько иным способом впервые было получено в работе [2].

Для получения уравнения (1.6) из общего вариационного принципа подставим в правую часть (4.1)

$$q_n = \frac{1}{b} \frac{\partial^2 M}{\partial x^2}$$

и произведем варьирование напряженного состояния, после чего

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^l v \delta \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \right) dx = \frac{\partial}{\partial t} \left(v \delta Q \Big|_0^l - \frac{\partial v}{\partial x} \delta M \Big|_0^l + \int_0^l \delta M \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx \right)$$

(Q — перерезывающая сила).

Варьируя левую часть уравнения (4.1) и учитывая, что

$$\delta M = \int_F \delta \sigma y dF$$

после сравнения правой и левой частей (4.1) получим

$$\int_V \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma^2} \frac{\partial \sigma}{\partial t} - y \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t} \right) \delta \sigma dV + \frac{\partial}{\partial t} \left(-v \delta Q \Big|_0^l + \frac{\partial v}{\partial x} \delta M \Big|_0^l \right) = 0$$

Два последних члена в этом уравнении выпадают в силу граничных условий. Далее

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \sigma} = f(\sigma^2, t) \sigma, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{E}$$

и учитывая произвольность вариации $\delta \sigma$, получим

$$f(\sigma^2, t) \sigma + \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} - y \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t} = 0$$

Умножая это уравнение на $y dF$ и интегрируя его по площади поперечного сечения, найдем

$$\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t} - \frac{1}{EJ} \int_F \frac{\partial \sigma}{\partial t} y dF = \frac{1}{J} \int_F f(\sigma^2, t) \sigma y dF$$

Согласно (1.2) второе слагаемое в левой части полученного уравнения равно $(1/EJ) \partial M / \partial t$, откуда следует уравнение (1.6). Уравнение, определяющее поведение осевых деформаций ϵ_0

$$\frac{d\epsilon_0}{dt} = \frac{1}{F} \int_F f(\sigma^2, t) \sigma dF$$

получается аналогичным путем.

Таким образом, для получения решения задачи можно исходить как из уравнения (1.6), так и из условия стационарности функционала (4.2). Причем при одинаковом задании функции прогибов и напряжений решения должны совпадать.

Поступила 17.VIII.1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Некоторые вопросы теории ползучести. ГТТИ, 1949.
2. Розенблюм В. И. Устойчивость сжатого стержня в состоянии ползучести. Инж. сб., 1954, т. XVIII.
3. Шэнли Ф. Р. Анализ веса и прочности самолетных конструкций. Оборонгиз, 1957.
4. Bleich H. H., Dillon O. W. Nonlinear creep deformation of columns of rectangular cross section. J. Appl. Mech. Trans. ASME, E., 1959, v. 26, No. 4.