

4. Мясников В. П. Некоторые точные решения для прямолинейных движений вязкопластической среды. — ПМТФ, 1961, № 2.
5. Соколовский В. В. Продольное перемещение пластической массы между некруговыми цилиндрами. — ПММ, 1959, т. 23, вып. 4.
6. Баничук И. В. Расчет течений вязкопластической среды в трубах методом локальных вариаций. — «Изв. АН СССР. МЖГ», 1966, № 6.
7. Сегал В. И., Свирид Г. П. Исследование кинематического состояния вязкопластического течения методом конечных элементов. — ПМ, 1977, т. 13, № 8.
8. Мосолов П. П., Мясников В. П. Вариационные методы в теории течения вязкопластической среды. — ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
9. Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. М., «Наука», 1971.
10. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. М., «Наука», 1967.
11. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И. Вычислительные методы. Т. 2. М., «Наука», 1977.

УДК 539.374

## О ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ МАТЕРИАЛОВ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

А. И. Имамутдинов

(Новосибирск)

Данная работа является продолжением работы [1]. Сравнение расчетов с имеющимися данными испытаний дает, как и в [1], удовлетворительное согласие.

Пусть  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$  и  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  — компоненты тензоров деформации и напряжений в плоскости  $z = \text{const}$  (рассматриваем случай плоской деформации). Считая, что пластическое состояние элемента определяется только девиаторами этих тензоров, следуя [1] для определения последних, вводим векторное представление: девиаторы деформаций, напряжений и их приращений представляем в виде векторов  $\Gamma, T, \Delta\gamma, \Delta\tau$  соответственно с полярными координатами  $\Gamma, 2\Omega, \dots, \Delta\tau, 2\varphi$  (фиг. 1)

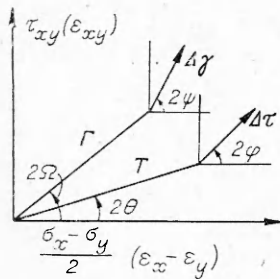
$$\Gamma = \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \varepsilon_{xy}^2}, \quad \text{tg } 2\Omega = \varepsilon_{xy}/(\varepsilon_x - \varepsilon_y),$$

$$\Delta\tau = \sqrt{\left(\frac{\Delta\sigma_x - \Delta\sigma_y}{2}\right)^2 + (\Delta\tau_{xy})^2}, \quad \text{tg } 2\varphi = 2\Delta\tau_{xy}/(\Delta\sigma_x - \Delta\sigma_y).$$

Вектор догрузки  $\Delta\tau$  представим суммой простого и ортогонального догрузений  $\Delta\tau = \Delta\tau' + \Delta\tau''$ . Как и в [1], будем считать, что ортогональное догружение  $\Delta\tau''$  ( $\Delta\tau' = 0$ ) вызывает приращение деформаций  $\Delta\gamma_*$ , которое характеризуется двумя величинами: углом  $2\beta_*$  между направлением  $\Delta\gamma_*$  и вектором главного сдвига  $\Gamma$  и «модулем сдвига»  $\mu_t$  по направлению  $\Delta\tau''$

$$(1) \quad \Delta\tau'' = \Delta\tau \sin 2(\vartheta - \alpha) = \mu_t \sin 2\beta_* \Delta\gamma_*. \quad (\vartheta - \alpha = \varphi - \Omega).$$

В отличие от [1] будем также предполагать, что и простое догружение  $\Delta\tau'$  ( $\Delta\tau'' = 0$ ) вызывает приращение деформаций  $\Delta\gamma'_*$ , которое тоже ха-



Ф и г 1

рактируется двумя величинами (фиг. 2): углом  $2\gamma_*$  между направлением  $\Gamma$  и вектором  $\Delta\gamma_*$  и «модулем сдвига»  $\mu_p$  по направлению  $\Delta\tau'$ , так что

$$(2) \quad \Delta\tau' = \Delta\tau \cos 2(\vartheta - \alpha) = \mu_p \cos 2\gamma_* \Delta\gamma_*$$

(в [1] предполагалось, что  $\gamma_* = 0$ ).

Тогда полное приращение сдвига будет равно  $\Delta\Gamma = \Delta\gamma \cos 2\omega = \Delta\gamma_* \cos 2\beta_* + \Delta\gamma_* \cos 2\gamma_*$  и в ортогональном направлении  $2\Gamma\Delta\Omega = \Delta\gamma \sin 2\omega = \Delta\gamma_* \sin 2\beta_* + \Delta\gamma_* \sin 2\gamma_*$ . Исключая отсюда с помощью (1), (2)  $\Delta\gamma_*$ ,  $\Delta\gamma_*$ , находим

$$(3) \quad \begin{aligned} \Delta\Gamma &= \Delta\tau \left[ \frac{\cos 2(\vartheta - \alpha)}{\mu_p} + \frac{\text{ctg } 2\beta_*}{\mu_t} \sin 2(\vartheta - \alpha) \right], \\ 2\Gamma\Delta\Omega &= \Delta\tau \left[ \frac{\text{tg } 2\gamma_*}{\mu_p} \cos 2(\vartheta - \alpha) + \frac{\sin 2(\vartheta - \alpha)}{\mu_t} \right]. \end{aligned}$$

В дальнейшем предлагается ограничиться рассмотрением простейшего вида сложного нагружения — «монотонным нагружением», при котором главные оси тензора деформаций поворачиваются все время в одном направлении в процессе нагружения.

Примем допущения: а) рассматриваемые величины  $\mu_p$ ,  $\mu_t$ ,  $\beta_*$ ,  $\gamma_*$  зависят только от  $\Gamma$  в случае монотонного нагружения (естественно предположить, что при более сложном процессе деформирования эти величины зависят не только от  $\Gamma$ , но, возможно, и от других параметров траектории деформации [1]); б) вектор приращений деформаций  $\Delta\gamma$  можно представить суммой упругих  $\Delta\gamma_e$  и пластических приращений деформаций  $\Delta\gamma_p$ :  $\Delta\Gamma = \Delta\Gamma_e + \Delta\Gamma_p$ ,  $2\Gamma\Delta\Omega = 2\Gamma\Delta\Omega_e + 2\Gamma\Delta\Omega_p$ , где  $\Delta\Gamma_e = \Delta\tau \cos 2(\vartheta - \alpha)/\mu$ ;  $2\Gamma\Delta\Omega_e = \Delta\tau \sin 2(\vartheta - \alpha)/\mu$  ( $\mu$  — упругий модуль сдвига).

Условие, когда  $\Delta\Gamma_p = 0$  и  $2\Gamma\Delta\Omega_p = 0$ , будем считать условием наступления полной разгрузки. Обозначив через  $2(\vartheta_u - \alpha)$  угол, который образует вектор приращений  $\Delta\tau$  с направлением  $\Gamma$  при наступлении полной разгрузки из (3), получим

$$(4) \quad \text{tg } 2(\vartheta_u - \alpha) = - \left( \frac{1}{\mu_p} - \frac{1}{\mu} \right) \frac{\mu_t}{\text{ctg } 2\beta_*};$$

$$(5) \quad \text{tg } 2\gamma_* = \left( 1 - \frac{\mu_t}{\mu} \right) \left( 1 - \frac{\mu_p}{\mu} \right) \text{tg } 2\beta_*.$$

Потребуем, чтобы выражение  $V = (1/2)\Delta\tau \cdot \Delta\gamma$  было «локальным»\* потенциалом, иными словами, чтобы работа  $A = \int_{\sigma_{ij}}^{\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij}} dV$ , затрачиваемая на пластическое деформирование материала (при малом изменении нагрузок), не зависела от пути интегрирования или от порядка приложения догрузок. Тогда должно быть

$$\frac{\partial V}{\partial (\Delta\tau \cos 2(\vartheta - \alpha))} = \Delta\Gamma, \quad \frac{\partial V}{\partial (\Delta\tau \sin 2(\vartheta - \alpha))} = 2\Gamma\Delta\Omega.$$

\* Идея существования «локального» потенциала принадлежит Е. И. Шемякину.

Отсюда и из (5) находим

$$(6) \quad \frac{\operatorname{tg} 2\gamma_*}{\mu_p} = \frac{\operatorname{ctg} 2\beta_*}{\mu_t} = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\mu_p} - \frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{1}{\mu_t} - \frac{1}{\mu}\right)}.$$

Равенство (6) означает, что из четырех введенных параметров  $\beta_*$ ,  $\gamma_*$ ,  $\mu_p$ ,  $\mu_t$  независимыми являются только два (такими параметрами условимся считать  $\mu_p$  и  $\mu_t$ ).

Покажем теперь, что рассматриваемая модель является вариантом теории пластического течения. В самом деле, с учетом (4), (6) имеем

$$(7) \quad \operatorname{tg} 2(\vartheta_u - \alpha) = -\frac{1}{\delta}, \quad \delta = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\mu_t} - \frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{1}{\mu_p} - \frac{1}{\mu}\right)};$$

$$(8) \quad \Delta\Gamma_p = \left(\frac{1}{\mu_p} - \frac{1}{\mu}\right) [\Delta\tau \cos 2(\vartheta - \alpha) + \delta \Delta\tau \sin 2(\vartheta - \alpha)], \quad 2\Gamma\Delta\Omega_p = \delta\Delta\Gamma_p$$

откуда следует (так как  $\frac{2\Gamma\Delta\Omega_p}{\Delta\Gamma_p} \operatorname{tg} 2(\vartheta_u - \alpha) = -1$ ), что вектор пластической деформации  $\Delta\gamma_p$  ортогонален поверхности нагружения, определяемой (7), и что в случае  $\mu_t \neq \mu$  поверхность нагружения в данной рассматриваемой точке имеет угловую особенность, а случай  $\mu_t = \mu$  при  $\alpha \approx 0$  соответствует классическому варианту теории пластического течения.

Относительно выбора  $\mu_p$  и  $\mu_t$  отметим, что  $\mu_p$  определяется из диаграммы  $T = T(\Gamma)$ , полученной при пропорциональном нагружении, а  $\mu_t = \mu_t(\Gamma)$  восстанавливается из опытов на ортогональное догружение. Приняв во внимание (8), можно предположить, что для восстановления  $\mu_p$ ,  $\mu_t$  как функций  $\Gamma$ , достаточно проведения только одного эксперимента с изломом траектории нагружения на пределе упругости данного материала. Проведенные расчеты как будто подтверждают это предположение.

Наконец, приведем теперь основные связи между приращениями напряжений и приращениями деформаций

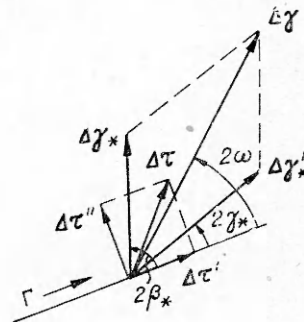
$$(9) \quad \begin{aligned} \Delta\varepsilon_x - \Delta\varepsilon_y &= \frac{\Delta\sigma_x - \Delta\sigma_y}{2\mu} + A \left[ \frac{\Delta\sigma_x - \Delta\sigma_y}{2} A + \Delta\tau_{xy} B \right], \\ \Delta\varepsilon_{xy} &= \frac{\Delta\tau_{xy}}{\mu} + B \left[ \frac{\Delta\sigma_x - \Delta\sigma_y}{2} A + \Delta\tau_{xy} B \right], \quad \Delta\varepsilon_x + \Delta\varepsilon_y = \frac{\Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y}{2k'}, \end{aligned}$$

где

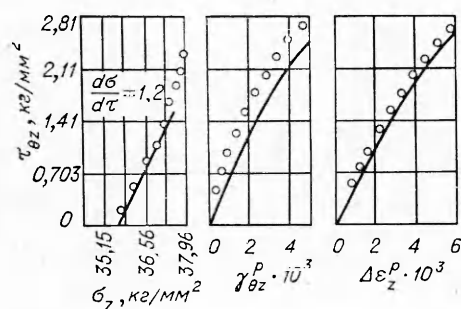
$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{1}{\mu_p} - \frac{1}{\mu}} \cos 2\Omega \mp \sqrt{\frac{1}{\mu_t} - \frac{1}{\mu}} \sin 2\Omega; \quad B = \sqrt{\frac{1}{\mu_p} - \frac{1}{\mu}} \sin 2\Omega \pm \\ &\quad \pm \sqrt{\frac{1}{\mu_t} - \frac{1}{\mu}} \cos 2\Omega; \quad k' = \text{const.} \end{aligned}$$

Последнее соотношение выражает закон упругого изменения объема при плоской деформации [1].

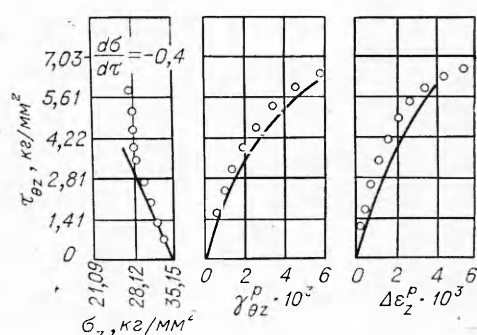
Для сопоставления расчетов с данными испытаний используем опытные данные, полученные в работе [2]. В проведенных опытах тонкостен-



Ф и г. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

ные трубчатые образцы, изготовленные из алюминиевого сплава 24S-T4 ( $E = 6900 \text{ кг/мм}^2$ ,  $\mu = 2400 \text{ кг/мм}^2$ ), сначала растягивались за предел упругости так, что имела место значительная пластическая деформация, а затем подвергались догрузке кручением с добавлением растягивающей нагрузки. Ось  $x$  направим по образующей трубки, ось  $y$  — в касательной плоскости перпендикулярно оси  $x$ . Для указанной программы нагружения главные напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  определяются следующим образом:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2},$$

где  $\tau_{xy}$  — касательное напряжение;  $\sigma_x$  — растягивающее напряжение (предполагается, что в образцах реализуется плоское однородное напряженное состояние). Ввиду того, что  $\sigma_1 > 0 > \sigma_3$  ( $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  — разных знаков), то, как и в случае плоской деформации, максимальное касательное напряжение и главный сдвиг имеют вид

$$\begin{aligned} \tau_{\max} = T = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad \gamma_{\max} = \Gamma = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 = \\ &= \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \varepsilon_{xy}^2}. \end{aligned}$$

Далее, так как  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , то такое состояние соответствует состоянию неполной пластичности [3, 4]. Согласно [3], в этом случае вдоль второго главного направления сохраняется линейная (квазиупругая) связь напряжений и деформаций (или их приращений):  $\Delta\varepsilon_2 = -(\nu_*/E) \times (\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_3)$ ,  $\nu_* = \nu_*(\Gamma)$ . Отсюда и из того, что  $\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 + \Delta\sigma_3 = 3K(\Delta\varepsilon_1 + \Delta\varepsilon_2 + \Delta\varepsilon_3)$  ( $K = \text{const}$ ), следует  $\Delta\varepsilon_1 + \Delta\varepsilon_3 = (\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_3)/2k'$  или  $\Delta\varepsilon_x + \Delta\varepsilon_y = (\Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y)/2k'$ , где

$$(10) \quad 1/2k' = 1/3K + \nu_*/E.$$

Повторив теперь рассуждения, приведенные выше для указанного класса нагружений, получим систему соотношений (9), в которой значение  $k'$  определяется (10). На фиг. 3, 4 представлены программы некоторых испытаний и дано сравнение результатов расчета (сплошная линия) с результатами опытов (в расчетах принималось  $\mu_p = 270 \text{ кг/мм}^2$ ,  $\mu_t = 960 \text{ кг/мм}^2$ ). Сопоставление опытных и расчетных данных дает вполне удовлетворительное согласие.

Автор выражает благодарность Е. И. Шемякину и Р. Х. Исмагилову за помощь при выполнении данной работы.

Поступила 7 VI 1978

## ЛИТЕРАТУРА

1. Христианович С. А., Шемякин Е. П. О плоской деформации пластического материала при сложном нагружении. — «Изв. АН СССР. МТТ», 1969, № 9.
2. Naghdi P. M., Rowley I. C. An experimental study of biaxial stress-strain relations in plasticity. — «J. Mech. Phys. Solids», 1954, vol. 3.
3. Христианович С. А., Шемякин Е. П. К теории идеальной пластичности. — «Инж. журнал. МТТ», 1967, № 4.
4. Христианович С. А. Деформация упрочняющегося пластического материала. — «Изв. АН СССР. МТТ», 1974, № 2.

УДК 539.374

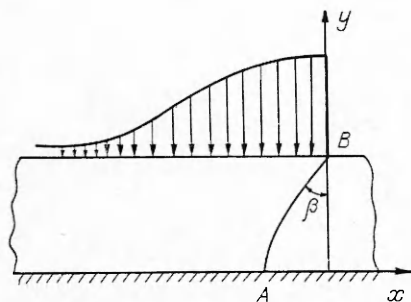
### ПОДВИЖНАЯ НАГРУЗКА НА СЛОЕ ИДЕАЛЬНО УПЛОТНЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА

И. В. Симонов

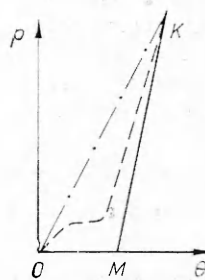
(Москва)

1. **Физические допущения.** По внешней поверхности слоя материала постоянной толщины  $h$ , лежащего без трения на жестком основании, движется с постоянной скоростью  $U_0$  плоская нагрузка, форма и величина которой со временем не меняется. В системе координат  $(x, y)$  (фиг. 1), связанной с движущейся нагрузкой  $P_0(x)$  ( $P_0(x) = 0, x > 0, P_0(0) = P_{00}$ ), будем изучать плоское стационарное движение среды при условии существования ударной волны  $U_0 > D_0$ , где  $D_0$  — волновая скорость, соответствующая давлению  $P_{00}$ . Перед фронтом среда невозмущена:  $P = 0, U = 0, \rho = \rho_0$  ( $P$  — давление,  $U$  — вектор массовой скорости в неподвижной системе координат,  $\rho, \rho_0$  — текущая и начальная плотность).

Материал подчиняется баротропному уравнению состояния. Его  $P - \theta$ -характеристика показана на фиг. 2 (сплошная линия). Уравнение прямой  $KM: dP/d\rho = c^2 = \text{const}$  при условии  $P(\theta_0) = P_{00}$  ( $\theta = (\rho - \rho_0)/\rho_0$  — объемная деформация). Такая схема является идеализацией реального поведения материалов, содержащих пустоты или поры, заполненные легкосжимаемой средой (штриховая линия на фиг. 2). Начальным нелинейным участком нагружения иногда можно пренебречь в случаях, когда характерное давление выше давления, при котором поры практически захлопываются и дальнейшее приращение деформации происходит



Фиг. 1



Фиг. 2