

Н. А. Голиков, А. Д. Заикин

СКОРОСТИ УПРУГИХ ВОЛН В КОНСОЛИДИРОВАННЫХ ЗЕРНИСТЫХ СРЕДАХ

В [1] предложен способ расчета эффективных упругих модулей сухих консолидированных зернистых сред, основанный на решении задачи упругого деформирования отдельного зерна. Для описания структуры порового пространства использовалась модель пересекающихся сфер (МПС). Построена численная процедура расчета скоростей упругих волн. В результате установлена функциональная связь скоростей продольных и поперечных волн с параметрами структуры порового пространства: пористостью f и произведением удельной поверхности (на единицу объема) на средний размер зерна $\eta = S_V \langle D \rangle$. Приведены уравнения для скоростей упругих волн, когда коэффициент Пуассона материала зерна $\sigma = 0,25$.

В настоящей работе в рамках предложенного подхода изучается влияние упругих свойств твердой фазы на эффективные упругие модули зернистой среды. Излагаются результаты экспериментальных исследований структуры порового пространства и скоростей ультразвуковых волн в специальном образом изготовленных трехмерных зернистых моделях.

Как установлено ранее, зависимость эффективных модулей от упругих параметров твердой фазы определяется только коэффициентом Пуассона последней. В настоящих расчетах он изменялся в диапазоне $0,05 \leq \sigma \leq 0,45$ с шагом 0,05. Для каждого значения σ получали зависимости скоростей упругих волн от пористости и типа упаковки зерен (количества контактов). Аналогичные зависимости для $\sigma = 0,344$ приведены ниже. Методом множественной регрессии они аппроксимировались уравнениями вида

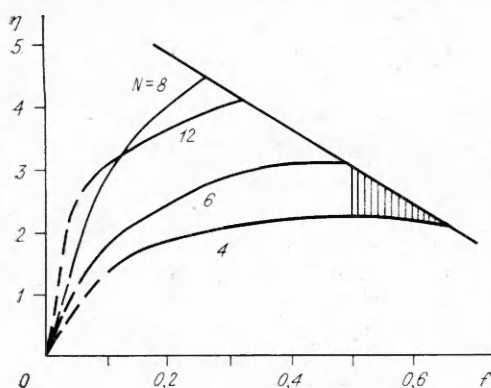
$$(1) \quad V_P^*/V_P = 1 - A_1 f - A_2 \eta, \quad V_S^*/V_S = 1 - A_3 f - A_4 \eta.$$

Звездочкой обозначены эффективные упругие параметры зернистой среды. Для коэффициентов уравнения (1) по девяти значениям σ строились уравнения регрессии. Аппроксимация коэффициентов A_1, A_2, A_3, A_4 кубической параболой дает вполне удовлетворительные результаты (средняя ошибка не превышает 0,7 %):

$$(2) \quad \begin{aligned} A_1 &= 0,722 + 0,029\sigma + 0,303\sigma^2 - 0,268\sigma^3, \\ A_2 &= 0,058 + 0,123\sigma - 0,494\sigma^2 + 1,16\sigma^3, \\ A_3 &= 0,685 + 0,0201\sigma + 0,05\sigma^2 + 0,147\sigma^3, \\ A_4 &= 0,0664 - 0,0225\sigma + 0,0277\sigma^2 - 0,133\sigma^3. \end{aligned}$$

Средняя ошибка прогноза при представлении (1), (2) численных результатов расчетов скоростей упругих волн не превышает 8 %.

Прежде чем анализировать полученные выражения, обратимся к МПС. Геометрия последней определяется двумя безразмерными параметрами. Поскольку в работе используются f и η , найдем область существования МПС в этих координатах. Аналитическое представление параметров f и S_V через количество и радиус контактов между зернами, приведенное в [1], справедливо лишь при условии непересечения контактов. На рис. 1 этот случай показан сплошными линиями. Цифры у кривых соответствуют типу упаковки (количеству контактов N). Для продолжения функции $\eta(f, N)$ в область пересекающихся контактов необходимо выполнить достаточно сложные геометрические построения. Ясно, что в конечном итоге в результате увеличения радиуса контактов зернистое тело перейдет в сплошное с нулевой пористостью и удельной поверхностью, т. е. $\eta(0, N) = 0$. В промежуточной области между этой точкой и областью аналитического представления функцию η можно восстано-



Р и с. 1

вить путем той либо иной интерполяции. Результат использования кубического сплайна представлен на рис. 1 штриховыми линиями. При этом в окрестности начала координат сколько-нибудь значимы лишь линейные по f члены сплайн-функции. Максимальное значение производной имеет упаковка с 12 контактами $\eta'(0, 12) = 61,5$. С другой стороны, кривая $\eta(f, 4)$ удовлетворяет условию $\eta \geq 3,09f$. В случае точечного контакта между шарами для любого типа упаковок справедливо соотношение $\eta = 6(1 - f)$ (прямая

линия). Как видно из рис. 1, область существования МПС лежит внутри треугольника со сторонами:

$$(3) \quad \eta = 61,5f, \quad \eta = 3,09f, \quad \eta = 6(1 - f).$$

Для всех значений f и η , лежащих внутри треугольника (3), а следовательно, и для всей области существования МПС рост коэффициента Пуассона твердой фазы приводит к увеличению V_S^*/V_S и уменьшению V_P^*/V_P . При этом для параметра $\gamma^* = V_S^*/V_P^*$, широко используемого в сейсморазведке, при всех значениях f и η , удовлетворяющих МПС и $\sigma > 0,067$, справедливо соотношение $\gamma^* > \gamma$. Если $0 \leq \sigma \leq 0,067$, то в той части области существования МПС, которая лежит выше прямой $\eta = bf$ ($b = (A_1 - A_3)/(A_4 - A_2)$), при этом b изменяется от 4,4 до 61,5), $\gamma^* \leq \gamma$.

Рост γ^* в зернистой среде приводит к интересному результату. Известно, что $\sigma = 0,5(1 - 2\gamma^2)/(1 - \gamma^2)$. При $\gamma > 1/\sqrt{2}$ коэффициент Пуассона отрицателен. Термодинамика линейной теории упругости не требует положительности σ , однако в настоящее время неизвестны сплошные тела с $\sigma < 0$. Тем не менее есть [2] опыты на высокопористых газонасыщенных песчанниках, в которых получены отрицательные значения σ^* .

Из (1), (2) следует, что эффективный коэффициент Пуассона зернистой среды может быть отрицательным. В заштрихованной области на рис. 1 $\gamma^* > 0,707$, при этом полагалось, что $\sigma = 0,05$. Существование области аномальных значений γ^* возможно лишь при $\sigma < 0,16$. В координатах f и η область существования отрицательных значений σ^* имеет вид криволинейного треугольника со сторонами, образуемыми кривыми $\eta = 6(1 - f)$ и $\eta(f, 4)$. Положение третьей стороны определяется коэффициентом Пуассона твердой фазы. При этом во всех случаях значения f в этой области превышают 0,47.

В последнее время появились работы [3, 4], в которых сделан вывод о том, что в случае весьма значительного перепада упругих свойств матрицы и включения (например, твердое тело — газ) усредненные уравнения движения гетерогенной среды не совпадают с уравнениями движения материала матрицы. На наш взгляд, существование отрицательных значений (не встречающихся у линейно-упругих сред) коэффициента Пуассона зернистой среды является результатом описания последней, имеющей уравнения движения, отличные от линейно-упругих в рамках и терминах линейной теории упругости.

Для экспериментальных исследований процессов распространения упругих волн в зернистых средах из гранулированного полиметилметакрилата (ПММК) методом спекания были изготовлены трехмерные модели таких сред. Размеры моделей $30 \times 20 \times 10$ см. Гранулы ПММК по форме — почти идеальные сферы, их средний размер 162,7 мкм, стандартное отклонение распределения гранул по размерам 1,67 мкм. Скорости

упругих волн в ПММК: $V_P = 2730$ м/с, $V_S = 1333$ м/с, плотность $\rho = 1,28 \times 10^6$ г/м³.

Изменяя режим спекания (температуру, время и давление), получали модели с различными параметрами структуры порового пространства. Пористость и удельная поверхность определялись по кривым капиллярного давления (в рамках модели цилиндрических пор [5]) на ртутном поромере Autopore-9200. На коллекции из 13 моделей диапазон изменения f от 0,28 до 0,39, удельной поверхности на единицу массы $S_m = S_V/\rho(1-f)$ от 0,0195 до 0,0382 м²/г.

На рис. 2 показано распределение пор по размерам (по оси абсцисс отложены в логарифмическом масштабе диаметры пор d , по оси ординат — доля объема в процентах пор с данным диаметром в общем объеме порового пространства) в модели с $f = 0,36$ и $S_m = 0,0281$ м²/г (кривая 1). Подобный тип распределения характерен для всех моделей. Для сравнения там же приведено распределение пор по размерам в образце песчаника Ромашкинского месторождения Татарии. Это кварцевый песчаник с малым содержанием глинистых минералов, с $f = 0,22$ и $S_m = 0,0238$ м²/г (кривая 2). Нетрудно видеть, что модели из гранулированного ПММК достаточно полно отражают особенности строения порового пространства реальных песчаников.

Средний диаметр пор на коллекции моделей изменяется от 46 до 76 мкм. В [6] для глобулярных систем предложено полуэмпирическое соотношение между размером частиц, диаметром пор и средним количеством контактов, приходящихся на одну частицу:

$$(4) \quad N = 1,63 \langle D \rangle / d + 2,62.$$

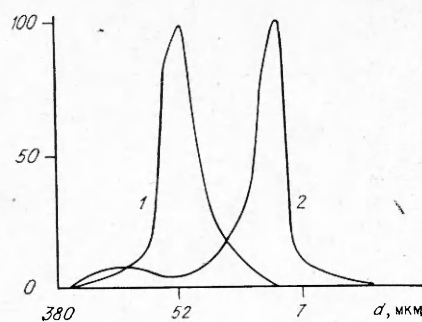
В нашем случае N изменяется от 6,1 до 8,34.

Скорости продольных и поперечных волн измерялись комплексом цифровой аппаратуры, состоящим из блоков возбуждения и регистрации ультразвуковых колебаний под управлением ЭВМ СМ-4. Источник крепился к торцу модели, приемник передвигался по верхней грани. Измерения проводились по профильной методике. Шаг по профилю 1 см, количество шагов 10—15. Ошибка измерения скорости не превышала 0,5%. Преобладающие частоты импульсов находились в диапазоне 40—80 кГц. При таких частотах и размерах моделей в экспериментах реализовывалась трехмерная ситуация. Отношение длины волны к размеру зерна в самой неблагоприятной ситуации $\lambda/\langle D \rangle \geq 40$.

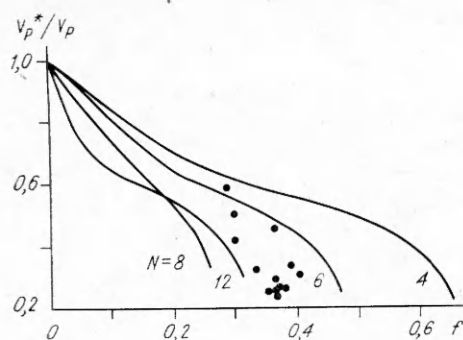
Результаты измерений скоростей на моделях приведены на рис. 3, 4. Значения скоростей отнесены к скоростям в ПММК. Учитывая количество контактов, полученное по (4), можно считать, что экспериментальный материал не противоречит расчетам. При определении структуры порового пространства по МПС безразмерные переменные f , η , N (как и любые другие) равноправны и каждая из них выражается через две другие. Чтобы можно было сравнивать результаты измерений с (1), для каждой модели по известным S_m , f и $\langle D \rangle$ рассчитывалось значение η . Тогда, используя метод множественной регрессии, скорости упругих волн можно представить в виде линейных уравнений:

$$V_P^*/V_P = 1 - 1,6f - 0,025 \eta, \quad V_S^*/V_S = 1 - 1,6f - 0,0098 \eta,$$

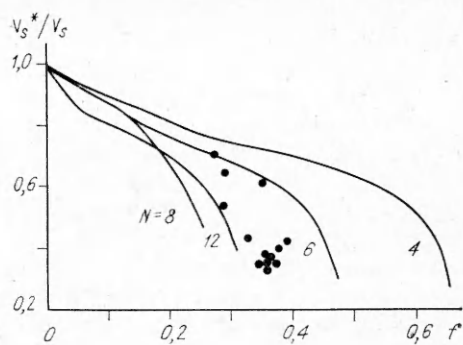
с коэффициентами корреляции 0,95 и 0,89 соответственно и средней ошибкой прогноза 10%. Скорость продольных волн более чувствительна к структуре порового пространства. Это приводит к росту параметра γ : если у ПММК $\gamma = 0,488$, то у моделей γ^*/γ изменяется от 1,16 до 1,32.



Р и с. 2



Р и с. 3



Р и с. 4

Для сравнения с расчетами приведем значения коэффициентов из (2): $A_1 = 0,76$, $A_2 = 0,089$, $A_3 = 0,7$, $A_4 = 0,057$. Различия достаточно существенны, однако прослеживается более сильное влияние структуры порового пространства на скорости продольных волн. Количественные расхождения коэффициентов, если оставить в стороне допущения, положенные в основу теоретических построений, могут быть вызваны тем, что для определения удельной поверхности использовалась модель цилиндрических пор.

Таким образом, получены уравнения, связывающие скорости упругих волн в сухих консолидированных зернистых средах с коэффициентом Пуассона твердой фазы и параметрами структуры порового пространства — пористостью и произведением удельной поверхности на средний размер зерна. Показана возможность существования отрицательных значений коэффициента Пуассона для таких сред. На моделях зернистой среды из гранулированного ПММК экспериментально построены функциональные связи скоростей упругих волн с параметрами структуры порового пространства, качественно соответствующие расчетным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Заикин А. Д. Эффективные упругие модули зернистых сред // ПМТФ.— 1990.— № 1.
2. Gregory A. R. Fluid saturation effect on dynamic elastic properties of sedimentary rocks // Geophysics.— 1976.— V. 41, N 5.
3. Сибиряков Б. П. Об уравнениях движения зернистых сред // ПМТФ.— 1985.— № 5.
4. Панасенко Г. П. Осреднение процессов в сильно неоднородных структурах // ДАН СССР.— 1988.— Т. 298, № 1.
5. Грег С., Синг К. Адсорбция, удельная поверхность, пористость.— М.: Мир, 1984.
6. Заграфская Р. В., Карнаухов А. П., Фенелонов В. Б. Глобулярная модель пористых тел корпускулярного строения. III. Исследование случайных и частично упорядоченных упаковок шаров // Кинетика и катализ.— 1975.— Т. 16, вып. 6.

г. Новосибирск

Поступила 23/1 1990 г.,
в окончательном варианте — 12/III 1991 г.

УДК 669.15 : 539.43

Г. В. Встовский

МОДЕЛЬ ФРАКТАЛЬНОГО ПРОФИЛЯ УСТАЛОСТНОЙ ТРЕЩИНЫ

Усталостное разрушение (УР) на сегодняшний день описывается с помощью эмпирически установленных закономерностей (например, закон Пэрриса [1, 2]), и отсутствие универсальных физических моделей процесса УР затрудняет постановку экспериментов с целью выяснения влияния микро- и мезоскопических характеристик материалов на УР. В данной работе предпринята попытка описать УР как агрегацию, ограничен-