

МАССООБМЕН ПРИ СТЕКАНИИ ТОНКОЙ ВОЛНОВОЙ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ

А. М. Лапин, О. Ю. Целодуб

(Новосибирск)

На поверхности пленки жидкости, стекающей по наклонной плоскости вследствие неустойчивости, почти всегда возникают волны. Они могут оказывать заметное влияние на процессы межфазного переноса. Так, при десорбции в пленках труднорастворимых газов коэффициент массоотдачи может увеличиваться из-за волн более чем на 100% [1, 2].

В [3] в приближении тонкого диффузионного пограничного слоя вблизи свободной поверхности было получено автомодельное решение задачи о диффузии к волновой пленке, выписанное параметрически в виде интегралов. Детально оно не анализировалось, но было показано, что отношение интегральных потоков массы в волновой и безволновой пленках стремится к константе.

Такое же решение получено и на примере синусоидальных волн детально проанализировано в [4]. Было показано, что, когда фазовая скорость волны больше скорости жидкости на поверхности волновой пленки — докритический режим течения, массообмен усиливается благодаря наличию поперечных пульсаций скорости. Кроме того, при приближении скорости жидкости на гребнях волн (а она в этих точках максимальна) к фазовой скорости участки поверхности, разделенные гребнями (в дальнейшем будем называть их ячейками), более слабо связаны в диффузионном отношении: доступ жидкости из соседней ячейки, содержащей более обедненный раствор газа, в данную ячейку затруднен.

В настоящей работе исследуется влияние формы волны на массоотдачу при докритическом режиме течения, рассмотрен также и критический случай, когда скорость поверхности на гребнях волн равна фазовой скорости волны.

Гидродинамическая задача о сильно нелинейных волнах на пленке, наблюдаемых в эксперименте, до сих пор не решена, поэтому в качестве модельных брались профили стационарных бегущих волн, полученные в [5] из решения уравнения, описывающего поведение длинноволновых возмущений на пленке при $Re \sim 1$. Эти профили качественно совпадают с наблюдаемыми в эксперименте [6]. Амплитуда и скорость волн задавались. Профиль продольной скорости полагался автомодельным:

$$(1) \quad u = 1,5u_{cp}(x, t)[2y/h(x, t) - (y/h(x, t))^2].$$

Здесь u_{cp} — средняя по сечению скорость пленки; y — нормальная координата, отсчитываемая от стенки к свободной поверхности; x — продольная координата; h — мгновенная толщина пленки. Предположение об автомодельности не противоречит эксперименту [7].

В приближении тонкого пограничного слоя, прилегающего к свободной поверхности, безразмерное уравнение диффузии имеет вид

$$(2) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pe \varepsilon} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2},$$

где $Pe = q/D$ — число Пекле; q — средний расход жидкости; $\theta = (\tilde{c} - c_h)/(c_0 - c_h)$ — безразмерная концентрация; \tilde{c} , c_0 и c_h — соответственно текущая, начальная (при $x = 0$) и поверхностная ($y = h$) концентрации; \bar{u} — продольная компонента скорости жидкости на поверхности; \bar{v} — нормальная компонента скорости вблизи поверхности; $\varepsilon = \langle h \rangle / \lambda \ll 1$; $\langle h \rangle$ — средняя толщина пленки; λ — длина волны.

В уравнении (2) и ниже используются безразмерные переменные

$$\bar{u} = u \langle h \rangle / q, \quad \bar{v} = v \lambda / q, \quad \bar{x} = x / \lambda, \quad \bar{y} = y / \langle h \rangle, \quad \bar{t} = tq / \lambda \langle h \rangle$$

и граничные условия

$$\theta(\bar{y} = h) = 0, \quad \theta(\bar{x} = 0) = \theta(\bar{y} = -\infty) = 1.$$

Знак обезразмеривания в дальнейшем опускаем. Из уравнений неразрывности и (1) для стационарных бегущих волн при $h = h(x - ct)$ имеем

следующие выражения для u и v :

$$(3) \quad u = 1,5(c - (c - 1)/h), \quad v = (u - c)\partial h/\partial x - (y - h)\partial u/\partial x.$$

В новых переменных

$$x = x, \quad \xi = x - ct, \quad z = h - y$$

с использованием (3) уравнение (2) перепишется в виде

$$(4) \quad u \frac{\partial \theta}{\partial x} + (u - c) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - z \frac{du}{d\xi} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{\text{Pe} \varepsilon} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}.$$

Уравнение (4) решается при граничных и начальных условиях

$$(5) \quad \theta(z = 0) = 0, \quad \theta(x = 0) = \theta(z = \infty) = 1.$$

Как показано в [4], решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям (5), записывается в виде

$$(6) \quad \theta(z, x, \xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta, \quad \eta = z/\delta(x, \xi),$$

где $\delta(x, \xi)$ определяется из выражения

$$(7) \quad \delta(x, \xi) = 2 \left(\int_0^x \frac{(u - c)^2}{u} dx / \text{Pe} \varepsilon \right)^{1/2} / (c - u).$$

Интеграл в (7) берется вдоль характеристики

$$(8) \quad x + \int_{\xi_0}^{\xi} u d\xi / (c - u) = 0,$$

где ξ_0 — точка, в которой данная характеристика пересекает ось $x = 0$. Таким образом, ξ_0 является «номером» характеристики, поэтому в дальнейшем будем называть данную характеристику ξ_0 -характеристикой.

Так как $u = u(\xi)$, перейдем в (7) от переменной x к переменной ξ , учитывая, что они не независимы, а принадлежат ξ_0 -характеристике (8):

$$(9) \quad \delta(x, \xi) = 2 \left(\int_{\xi}^{\xi_0} (c - u) d\xi / \text{Pe} \varepsilon \right)^{1/2} / (c - u).$$

В итоге для мгновенного локального безразмерного потока через волновую поверхность из (6) и (9) имеем выражение

$$(10) \quad j(x, \xi) \equiv \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0} = (c - u) \left[\pi \int_{\xi}^{\xi_0} (c - u) d\xi / \text{Pe} \varepsilon \right]^{-1/2}.$$

Усредняя (10) по длине волны, получим значение среднего локального потока в точке x :

$$(11) \quad \bar{j}(x) = \int_0^1 (c - u) \left[\pi \int_{\xi}^{\xi_0} (c - u) d\xi / \text{Pe} \varepsilon \right]^{-1/2} d\xi.$$

Чтобы найти локальный поток в любой точке (x, ξ) , необходимо вычислить интеграл в выражении (10). Для этого достаточно определить из (8) ξ_0 -характеристику, проходящую через эту точку.

В докритическом случае ($c > u_{\max}$) подынтегральная функция в (8) непрерывна и ξ_0 -характеристика пересекает всю область $\{0 \leq x \leq \infty, -\infty < \xi \leq \xi_0\}$, т. е. при движении вдоль ξ_0 -характеристики при $x \rightarrow \infty$, $\xi \rightarrow -\infty$. Полупрямую $\{\xi = \xi_1, x \geq 0\}$ пересекают все характеристики

с номерами $\xi_0 \geq \xi_1$. В этом случае из уравнения (10) получаем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} j(x, \xi_1) = 0.$$

Когда скорость жидкости на гребне волн равна фазовой ($c = u_{\max} \equiv u(n)$), подынтегральная функция в точках $\xi = n$ обращается в бесконечность, и если ξ_0 лежит в интервале $(n-1, n]$, то соответствующая ξ_0 -характеристика целиком лежит в полуполосе $\{0 \leq x \leq \infty, n-1 < \xi \leq n\}$. При движении по ξ_0 -характеристике при $x \rightarrow \infty$ $\xi \rightarrow n-1$. Полупрямую $\{\xi = \xi_1, x \geq 0\}$ пересекают только те характеристики, у которых $\xi_1 \leq \xi_0 < n$. Таким образом, видно, что в отличие от докритического случая верхний предел интеграла в выражении (10) ограничен и на величину локального потока влияют только данной волновой ячейки. Действительно, так как для данной точки (x_1, ξ_1) имеем соотношение $n-1 < \xi_1 \leq \xi_0 \leq n$, то, учитывая, что $u(\xi) = u(\xi+1)$, из (10) получим

$$(12) \quad j(x, \xi) = (c - u([\xi])) \left[\pi \int_{[\xi]}^{[\xi_0]} (c - u) d\xi / \text{Pe} \varepsilon \right]^{-1/2},$$

где $[\]$ — дробная часть числа.

Для достаточно больших значений x и конечных значений ξ из (12) следует

$$(13) \quad j(x, \xi) \approx (c - u([\xi])) \left[\pi \int_{[\xi]}^1 (c - u) d\xi / \text{Pe} \varepsilon \right]^{-1/2}.$$

Таким образом, почти во всем интервале $(n-1, n]$ при больших значениях x величина мгновенного локального потока становится функцией только ξ и соответственно средний локальный поток — почти постоянным. Исключение представляют только окрестности граничных точек интервала. Как видно из (8), при любом конечном значении x при $[\xi] \rightarrow 0$ значение $[\xi_0]$ также стремится к нулю. В этом случае из (8) имеем

$$(14) \quad x = \int_{[\xi]}^{[\xi_0]} u d\xi / (c - u) = |u \approx c - u''(0) [\xi]^2 / 2| = \frac{2c}{u''(0)} \left(\frac{1}{[\xi_0]} - \frac{1}{[\xi]} \right),$$

$$[\xi_0] = 2c [\xi] / (2c + u''(0) x [\xi]).$$

Из (10) и (14) получаем

$$(15) \quad j(x, \xi) = [\text{Pe} \varepsilon (1 + b)^3 / (\pi x (1 + b + b^2/3))]^{1/2},$$

где $b = u''(0) x [\xi] / 2c$.

При $[\xi] \rightarrow 1$ в выражении (13) имеем неопределенность, раскрывая ее, получаем для j выражение (15), в котором b надо заменить на $b_1 = u''(0) x (1 - [\xi]) / 2c$.

Из (15) имеем физически очевидный результат $j(x, n) \sim (c/x)^{1/2}$. Действительно, в точках $\xi = n$, как видно из (3), $v = 0$, $u = c$ и диффузионный поток в них на расстоянии x должен быть такой же, как и в плоской пленке, стекающей со скоростью u .

Интегрируя уравнение (11), получаем полный безразмерный поток массы (критерий Шервуда)

$$(16) \quad \text{Sh} = \int_0^x \int_0^1 (c - u) \left[\pi \int_{\xi}^{\xi_0} (c - u) d\xi' / \text{Pe} \varepsilon \right]^{-1/2} d\xi dx = 1 - \bar{\theta}(x),$$

где $\bar{\theta}(x)$ — среднерасходная концентрация в сечении x .

Влияние волн на массоотдачу характеризует отношение потоков массы на волновой и безволновой пленках [4]:

$$(17) \quad \text{Sh}/\text{Sh}_0 = (3 \langle h \rangle x / 2h_0)^{-1/2} \int_0^x \int_0^1 (c - u) \left[\pi \int_{\xi}^{\xi_0} (c - u) d\xi' / \text{Pe} \varepsilon \right]^{-1/2} d\xi dx.$$

Для отношения $\langle h \rangle$ к средней толщине безволновой пленки h_0 при совпадающих расходах, если справедливо предположение (1), - имеем выражение

$$\langle h \rangle / h_0 = \left(\int_0^1 (c(h-1) + 1) d\xi / h^2 \right)^{1/3}.$$

Для чисто синусоидальной волны $h = 1 + a \cos 2\pi\xi$ на фиг. 1 построены мгновенный локальный поток массы через свободную поверхность (кривая 1) и средний локальный поток (кривая 2), рассчитанные для значений $c = 2$ и $a = 0,4$. Кривая 3 соответствует безволновому случаю. Здесь и ниже выбран такой момент времени, когда гребни волн расположены в точках с целыми значениями координаты x . На фиг. 1—3 значения локального потока построены в произвольном по вертикали масштабе.

Как видно из фиг. 1, на протяжении нескольких длин волн мгновенный локальный поток является почти периодической функцией, а средний локальный — почти постоянной. Потом происходит резкое уменьшение потока, и снова для нескольких длин волн мгновенный поток почти периодичен. Объяснение такого поведения кривых состоит в следующем [4]. Для чисто синусоидальной волны локальный поток имеет на длине волны только один максимум, расположенный в окрестности впадины, поэтому там находится жидкость с пониженной концентрацией. В момент, когда эта жидкость приходит во впадину соседней (левой) ячейки, там и происходит резкое уменьшение локального потока. Время переноса какого-либо участка жидкости вдоль поверхности на одну длину волны определяется интегралом $\int_0^1 d\xi / (c - u)$, поэтому такое уменьшение

впервые происходит на расстоянии $x = c \int_0^1 d\xi / (c - u) - 1$.

При приближении максимальной скорости u_{\max} к фазовой скорости волны c значение x возрастает и в критическом случае уходит на бесконечность, т. е. ячейки становятся диффузионно независимыми.

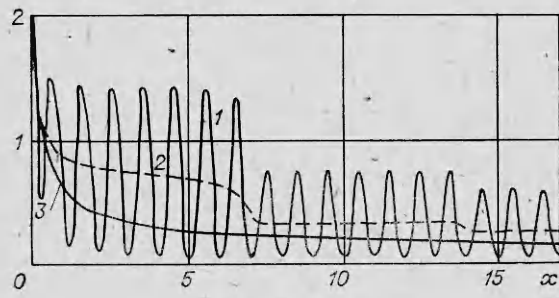
В случае существенно несинусоидальных волн на одной длине волны ее профиль имеет несколько максимумов и минимумов. Для достаточно больших x в окрестности каждого из них в докритическом случае локальный поток экстремален.

На фиг. 2 даны зависимости мгновенного (кривая 1) и среднего (кривая 2) локальных потоков для волны, имеющей скорость $c = 2,3$ и амплитуду $a = 0,6$. Форма волны представлена кривой 3. Видно, что локальный поток заметно меняется практически между любыми двумя длинами волн. Одни максимумы убывают быстрее, чем другие, и положение абсолютного максимума локального потока относительно длины волны меняется от ячейки к ячейке. Это происходит потому, что теперь резкое уменьшение локальных максимумов связано не только с появлением в данной точке обедненной жидкости из соседней ячейки, но и приходом в нее жидкости из соседних максимумов данной ячейки.

На фиг. 3 для одной и той же по форме (кривая 5) волны приведены значения мгновенных локальных (кривые 1 и 3) и средних локальных (кривые 2 и 4) потоков для докритического ($a = 0,5$, $c = 2,2$) и критического ($a = 0,636$, $c = 2,2$) случаев соответственно. Поведение кривых 1, 2 качественно аналогично зависимостям, приведенным на фиг. 2. В критическом случае мгновенный локальный поток после нескольких длин волн становится почти периодической функцией. Так, в данном случае (кривая 3) значения максимумов уже на 2-й и 3-й длинах волн отличаются меньше чем на 1%. Соответственно средний локальный поток выходит на практически постоянное значение на 3-й длине волны. Ясно, что интегральное значение Sh для критического случая растет прямо пропорционально x .

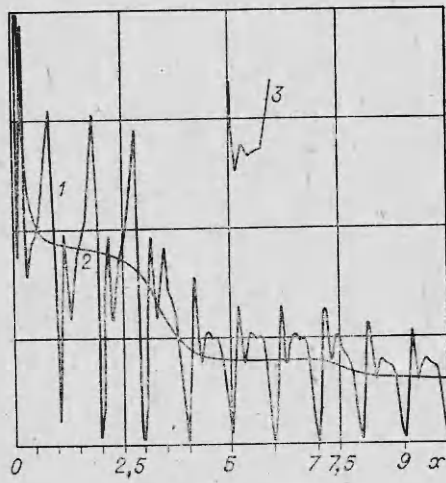
На фиг. 4 приведены зависимости потоков для волны, близкой к последовательности солитонов: на большей части длины волны пленка

$$(\alpha\theta/\alpha z)_{z=0}$$



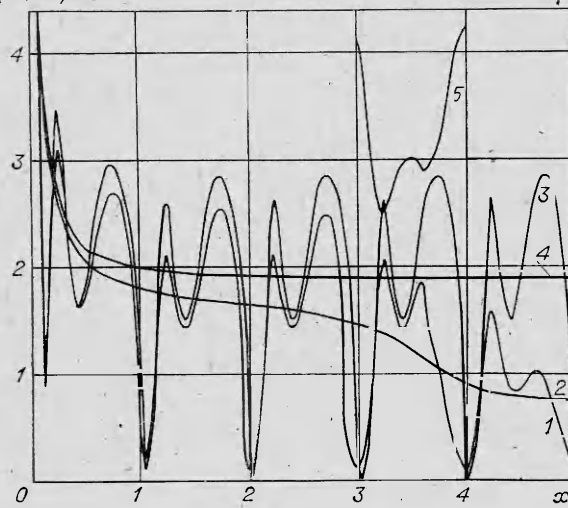
Ф и г. 1

$$(\partial\theta/\partial z)_{z=0}$$

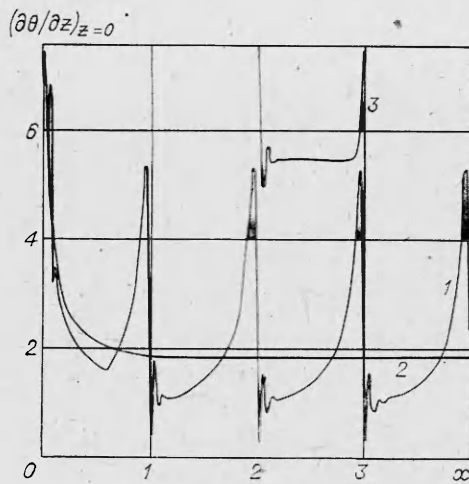


Ф и г. 2

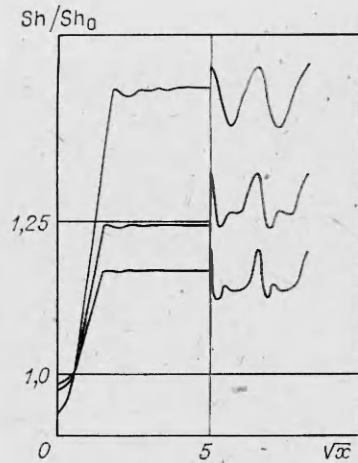
$$(\partial\theta/\partial z)_{z=0}$$



Ф и г. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

имеет постоянную толщину и только вблизи гребней она резко меняется. Здесь $a = 0,71$, $c = 2,326$ — критический случай, нумерация кривых такая же, как на фиг. 2.

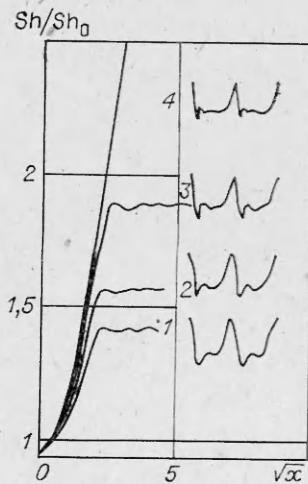
В докритическом случае, несмотря на то что мгновенный локальный поток для несинусоидальных волн не является почти периодическим (ср. кривые 1 фиг. 1—3), зависимость среднего локального потока от x близка к кусочно-постоянной функции (кривые 2 на фиг. 1—3). Поэтому интегральный поток массы Sh является почти линейно-кусочной функцией от x , что качественно аналогично случаю чисто синусоидальных волн. Именно с кусочно-линейным характером функции $Sh(x)$ связан линейный от \sqrt{x} рост отношения Sh/Sh_0 на начальном участке с последующим выходом после затухающих осцилляций на константу, характерную для данной волны (фиг. 5).

Эта константа для волны заданной формы, имеющей скорость $c = \text{const}$, увеличивается при приближении амплитуды a к своему критическому значению. В критическом случае $Sh(x)$ — линейная функция, поэтому отношение Sh/Sh_0 также линейно растет с ростом \sqrt{x} (кривая 4 на фиг. 6).

При фиксировании значения амплитуды волны предельная константа уменьшается с увеличением фазовой скорости.

На фиг. 5 даны зависимости отношения Sh/Sh_0 для волн, имеющих одинаковые скорости ($c = 2,2$) и амплитуды ($a = 0,4$). Справа от каждой кривой схематично показана соответствующая ей форма волны. При фиксированных значениях амплитуды и фазовой скорости асимптотическое значение отношения Sh/Sh_0 тем меньше, чем больше форма волны отклоняется от синусоидальной. Ухудшение массообмена для таких волн связано, по-видимому, с более быстрым убыванием максимумов мгновенного локального потока из-за их взаимного влияния друг на друга. К тому же сами максимумы становятся более узкими, так как увеличивается доля участков волны, где $v \approx 0$, и массообмен идет только за счет диффузии.

Таким образом, полученные результаты показывают, что на интенсивность массообмена сильное влияние оказывают все три фактора: скорость, амплитуда и форма волны. Поэ-



Фиг. 6

тому без детального учета волновой обстановки на пленке можно получить большие разбросы в экспериментальных данных, что и наблюдается в действительности (см., например, [1]).

Эти три фактора в реальных течениях изменяются взаимосвязанно [6]: чем больше амплитуда волны, тем больше ее фазовая скорость и тем сильнее ее форма отличается от синусоидальной. В зависимости от того, какие из этих факторов окажут большее влияние, можно наблюдать как уменьшение, так и увеличение массообмена.

В частности, становятся качественно понятны результаты, полученные в работе [1], где показано, что при возбуждении волн разной амплитуды для фиксированного Re с ростом периода волны происходит усиление массообмена. При этом растут также скорость и длина волны, а форма становится все более несинусоидальной. Фиг. 6 показывает, что в рамках данной модели такая ситуация вполне возможна. Здесь скорость и амплитуда волны соответственно равны: кривые 1—4—2; 2,1; 2,2; 2,326 и 0,4; 0,5; 0,6; 0,71. Форма волн схематично показана справа от каждой кривой.

Из приведенных на фиг. 6 расчетов видно, что если длина рабочего участка будет больше, чем длина максимального в данном примере переходного участка, то получим для отношения Sh/Sh_0 зависимость от периода, аналогичную наблюдаемой в эксперименте [1]: с ростом периода Sh/Sh_0 также растет. Подобное поведение Sh/Sh_0 не удастся получить в рамках других моделей, например модели полного перемешивания.

Авторы благодарят П. И. Гешева за полезные замечания и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Алексеенко С. В. Десорбция слабо растворимого газа из стекающих волновых пленок жидкости. — В кн.: Расчет тепломассообмена в энергетических процессах/Под ред. А. П. Бурдукова. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1981.
2. Seban R. A. Transport to falling films. — In: Proc. of 6th Int. Heat Transfer Conf. Toronto, 1979, vol. 6. Ottawa, 1979.
3. Ruckenstein E., Berbente C. Mass transfer to falling liquid films at low Reynolds numbers. — Int. J. Heat Mass Transfer, 1968, vol. 11, N 4.
4. Гешев П. И., Ланин А. М. Диффузия слабо растворимого газа в стекающих волновых пленках жидкости. — ИМТФ, 1983, № 6.
5. Цвелодуб О. Ю. Стационарные бегущие волны на пленке, стекающей по наклонной плоскости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 4.
6. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Алексеенко С. В. Стационарные двумерные катящиеся волны на вертикальной пленке жидкости. — ИФЖ, 1976, т. 30, № 5.
7. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г. и др. Мгновенный профиль скорости в волновой пленке жидкости. — ИФЖ, 1977, т. 33, № 3.

Поступила 22/XI 1983 г.

УДК 532.516

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ПОЛОСЫ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В. К. Андреев

(Красноярск)

В работе приведен краткий вывод уравнений малых возмущений произвольного неустановившегося движения вязкой несжимаемой жидкости, подверженной действию поверхностных сил. На основе полученных уравнений и изучается устойчивость полосы вязкой жидкости.

1. Уравнения на возмущения. Предположим, что функции $u(x, t)$, $p(x, t)$ — вектор скорости и давление некоторого неустановившегося движения вязкой несжимаемой жидкости. Движение определено в области $\Omega_t \subset R^3$ с границей Γ_t . Внутри Ω_t u , p удовлетворяют уравнениям