УДК 517.958:532.5

МОДЕЛИ РАСКРЫТИЯ ТРЕЩИНЫ НА ОСНОВЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА

С. В. Хабиров, С. С. Хабиров

Институт механики им. Р. Р. Мавлютова Уфимского федерального исследовательского центра РАН, 450054 Уфа, Россия
E-mails: habirov@anrb.ru, salavat.s.khabirov@gmail.com

Выводятся различные приближенные модели раскрытия трещины в пористом пласте, основанные на априорных представлениях о размерах трещины, точных решениях уравнений движения вязкой жидкости, приближенных формулах модели фильтрации в пласте, приближенных формулах теории упругости пласта. С использованием закона сохранения массы жидкости в трещине получены квазилинейные параболические уравнения, описывающие раскрытие трещины.

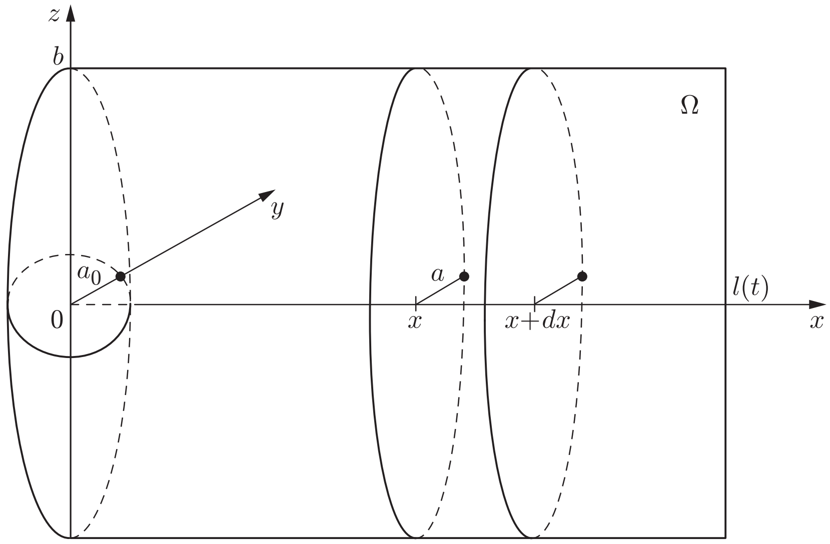
Ключевые слова: раскрытие трещины, уравнение Навье — Стокса, точные решения, квазилинейные параболические уравнения.

DOI: 10.15372/PMTF20190214

Введение. При закачивании жидкости через скважину в пласт при больших давлениях образуется трещина. В раскрывающейся трещине течет вязкая жидкость, которая фильтруется в пласт через границу этой трещины. Проникающая в поры пласта жидкость вытесняет нефть, добываемую в других скважинах. Закачивание жидкости в нагнетающую скважину должно проводиться таким образом, чтобы: 1) границы трещины не достигали добывающих скважин; 2) появлялись новые трещины, распространяющиеся в перпендикулярном направлении; 3) установился устойчивый режим фильтрации через нагнетающую скважину с объемом, равным объему нефти, добываемой из других скважин.

В точной математической постановке задача описания движения вязкой жидкости (уравнения Навье — Стокса) в области с подвижной границей, через которую жидкость фильтруется в пласт [1], стремящийся схлопнуть трещину под действием силы упругости скелета, является трудноразрешимой. Поэтому необходимо использовать приближенные математические модели [2], основанные на законе сохранения массы жидкости в сечениях трещины; точных решениях уравнений Навье — Стокса, уравнений фильтрации жидкости в поровой среде пласта (уравнений пьезопроводности), уравнений упругости скелета поровой среды. В результате получаются краевые задачи для квазилинейных параболических уравнений с подвижными границами. Аналитические и численные методы решения таких задач рассмотрены в работе [3]. Точные решения уравнений получены с использованием группового анализа дифференциальных уравнений [4, 5].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-29-10071 МК) и в рамках государственного задания № 0246-2019-0052.



Беспоровый объем трещины в пласте

1. Сохранение массы жидкости в выделенном объеме трещины. Под трещиной в пласте понимается беспоровый объем Ω с малой толщиной $2a(t,x)$, фиксированной высотой $2b$ ($a \ll b$) и большой меняющейся длиной $l(t)$ (см. рисунок).

Сечение Ω плоскостью $x = \mathrm{const}$ представляет собой плоскую область площадью S с кусочно-гладкой границей длиной L. Жидкость, имеющая плотность ρ и вязкость $\mu = \rho\nu$, поступая в трещину через сечение $x = 0$ и протекая в объеме Ω, фильтруется через поверхность трещины в поровое пространство. Рассмотрим массу жидкости в выделенном малом объеме $\rho S\,dx$ (см. рисунок), изменяющуюся за время dt вследствие расхода ρQ в сечениях x и $x + dx$ и фильтрации через боковую поверхность:

$$S(t+dt,x)\,dx - S(t,x)\,dx + (Q(t,x+dx) - Q(t,x))\,dt + qL\,dt\,dx = 0 \qquad (1.1)$$

(q — плотность потока жидкости).

Из (1.1) получаем закон сохранения массы жидкости

$$S_t + Q_x + qL = 0. \qquad (1.2)$$

Величины S, L задаются размером сечения, величина Q — движением жидкости. Функции $l(t)$, $a(t,x)$ определяются расходом и давлением в начальном сечении. Граничные и начальные условия для уравнения (1.2) имеют вид

$$Q(t,0) = Q_0(t), \qquad p(t,0) = p_0(t), \qquad l(0) = a_0 = a(0,0).$$

Предполагается, что трещина мгновенно раскрывается на величину, равную объему V_0, который определяется через $Q_0(0)$, $p_0(0)$ и величину прочности скелета. В случае если r — радиус скважины, Δt — время интенсивной закачки, имеем

$$Q_0(0) = \rho\,\frac{a_0^2 - r^2}{2r\,\Delta t}, \qquad p_0(0)S_0 = \frac{Ea_0}{1-\nu^2} = E'a_0$$

(S_0 — площадь сечения раскрытия; E — модуль Юнга; $0 < \nu < 1/2$ — коэффициент Пуассона) [6].

С течением времени давление уменьшается по длине трещины, и на расстоянии $l(t)$ трещина может постепенно исчезнуть ($a(t,l(t)) = 0$) или мгновенно скачкообразно схлопнуться.

Выведем условие на скачке. Выделим на линии движения скачка $x = l(t)$ элемент длиной σ, введем касательный вектор $\boldsymbol{\tau} = (dt, dx)$ и нормальный вектор $\boldsymbol{n} = (dt, -dx)$. В направлении нормали на расстоянии h по обе стороны от линии движения скачка отложим элементы такой же длины σ. Получаем плоскую область П. Интегрируя (1.2) по области П и используя формулу Грина, получаем

$$0 = \iint\limits_{\Pi} (Q_x + S_t + qL)\,dx\,dt = \int\limits_{\partial\Pi} Q\,dt - S\,dx + \iint\limits_{\Pi} qL\,dx\,dt.$$

При $h \to 0$ мера П и мера боковых сторон плоской области стремятся к нулю и из теоремы о среднем следует соотношение

$$[Q] = l'[S], \tag{1.3}$$

где квадратные скобки обозначают скачок. За скачком раскрытие трещины можно считать равным размеру пор на площади $S(t, l(t))$, которая определяется пористостью m пласта mS. Расход за скачком определяется потоком фильтрации qS. Таким образом, соотношение (1.3) на скачке $x = l(t)$ принимает вид

$$QS^{-1} - q = l'(1 - m), \tag{1.4}$$

если $S \neq 0$. При $S = 0$ имеем $a(t, l(t)) = 0$ и соотношение (1.4) выполняется автоматически.

Пусть формула $y = ag(z)$, $g(0) = 1$, $g(b) = 0$, $a \ll b$ задает границу сечения ∂S. Тогда площадь и периметр сечения вычисляются соответственно по формулам

$$S = 4a\int\limits_0^b g(z)\,dz, \qquad L = 4\int\limits_0^b \sqrt{a^2 g'^2 + 1}\,dz \simeq 4\Big(b + \frac{1}{2}a^2\int\limits_0^b g'^2\,dz\Big). \tag{1.5}$$

Скорость частицы жидкости в трещине $\boldsymbol{u} = (u, v, w)$ определяет расход через сечение:

$$Q = \iint\limits_{S} u\,dy\,dz = \int\limits_0^b dz \int\limits_0^{ag(z)} u\,dy \tag{1.6}$$

и поток фильтрации через поверхность $\partial\Omega$:

$$\int\limits_0^l Lq\,dx = \iint\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\,dV, \qquad dx\,dz = \cos(\varphi)\,dV. \tag{1.7}$$

Здесь φ — угол между вектором $\boldsymbol{n}$ и осью y; $\boldsymbol{n} = (-a_x g, 1, -ag')\cos(\varphi)$; $\cos(\varphi) = (a_x^2 g^2 + 1 + a^2 g'^2)^{-1/2}$.

Условиям отсутствия движения вязкой жидкости в касательном к $\partial\Omega$ направлении ($\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{n} = 0$) эквивалентны равенства

$$u = -a_x g v, \qquad w = -ag'v.$$

Тогда равенство (1.7) принимает вид

$$\int\limits_0^l Lq\,dx = \iint v(a_x^2 g^2 + 1 + a^2 g'^2)\,dx\,dz \simeq \int\limits_0^b dz \int\limits_0^{l(t)} v\,dx,$$

откуда следует

$$Lq = \int\limits_0^b v\,dz. \tag{1.8}$$

2. Движение вязкой жидкости в трещине. В области Ω движение вязкой жидкости описывается уравнением Навье — Стокса

$$\boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \rho^{-1}\nabla p = \nu\,\Delta\boldsymbol{u}, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0, \tag{2.1}$$

где $\boldsymbol{u} = (u, v, w)$ — скорость частиц в декартовой системе координат (x, y, z); t — время. На границе $\partial\Omega$ происходит фильтрация жидкости в направлении нормали, в касательном направлении движение отсутствует. Для определения потока жидкости Q через сечение S используется простое решение задачи о движении вязкой жидкости в трещине [7].

Пусть $v = w = 0$, тогда из (2.1) следуют равенства

$$p_y = p_z = 0, \qquad u_x = 0, \qquad u_t - \nu(u_{yy} + u_{zz}) = -\rho^{-1}p_x = -p_1'(t). \tag{2.2}$$

Поскольку в последнем равенстве переменные разделились, из (2.2) получаем решение в виде

$$\begin{gathered} p = \rho p_1'(t)x + p_0(t), \qquad u = u(t, y, z), \\ u_t = \nu(u_{yy} + u_{zz}) - p_1'(t), \qquad u\big|_{\partial S} = 0. \end{gathered} \tag{2.3}$$

В случае если $p = p_l$ при $x = l$, $p_1' = (p_l - p_0)\rho^{-1}l^{-1}$. Разделяя переменные $u = T(t)U(y, z)$ в однородном уравнении (2.3) (при $p_1' = 0$), получаем задачу на собственные функции

$$\begin{gathered} T' = \nu\lambda T, \qquad T = \mathrm{e}^{\nu\lambda t}, \\ \Delta U = \lambda U, \qquad U\big|_{y=ag(z)} = 0, \quad 0 < y < a, \quad 0 < z < b, \quad a \ll b. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Существуют счетное число λ_k и для каждого λ_k счетное число решений U_{kn} (собственные функции) задачи (2.4). Разложив $p_1'(t)$ по собственным функциям, находим решение в виде ряда [8]. Поскольку собственные функции для различных сечений сложно определить, необходимы простые решения.

Для установившихся решений $u_t = 0$, $a_t = 0$, $p_1' = P_1 = \mathrm{const}$ имеем краевую задачу

$$\nu\Delta u = P_1, \qquad u\big|_{y=ag(z)} = 0, \quad g(0) = 1, \quad g(b) = 0. \tag{2.5}$$

Найдем функцию $g(z)$ такую, чтобы существовало решение в виде квадратичного многочлена

$$u = a_{11}y^2 + 2a_{12}yz + a_{22}z^2 + a_1y + a_2z + a_0. \tag{2.6}$$

Подставляя (2.6) в уравнение (2.5), получаем соотношение

$$a_{11} + a_{22} = P_1/(2\nu) > 0.$$

Краевое условие (2.5) определяет контур сечения как алгебраическую кривую второго порядка:

$$a_{11}a^2g^2 + 2a_{12}zag + a_{22}z^2 + a_1ag + a_2z + a_0 = 0. \tag{2.7}$$

В случае если контур представляет собой прямую линию, имеем

$$\begin{gathered} g = 1 - b^{-1}z, \qquad a_{11}a^2 - 2a_{12}ab + a_{22}b^2 = 0, \\ 2a_{11}a^2 + a_1a = 2aba_{12} + a_2b, \qquad a_{11}a^2 + a_1a + a_0 = 0 \end{gathered}$$

и решение (2.6) принимает вид

$$u = \Big(1 - \frac{y}{a} - \frac{z}{b}\Big)\Big[a_1y + a_2z - \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}\Big(\frac{a_1}{a} + \frac{a_2}{b} + \frac{P_1}{2\nu}\Big)\Big(1 + \frac{y}{a} + \frac{z}{b}\Big)\Big].$$

В случае если контур представляет собой кривую (2.7) с условием (2.5), имеем

$$a_{11}a^2 + a_1 a + a_0 = 0, \qquad a_{22}b^2 + a_2 b + a_0 = 0$$

и решение (2.6) принимает вид

$$u = a_1 y\Big(1 - \frac{y}{a}\Big) + a_2 z\Big(1 - \frac{z}{b}\Big) + a_0\Big(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}\Big) + 2a_{12}yz,$$
$$a_0 = -\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\Big(\frac{a_1}{a} + \frac{a_2}{b} + \frac{P_1}{2\nu}\Big).$$

Постоянные a_1, a_2, a_{12} можно выбрать таким образом, что контуром будет любая алгебраическая кривая второго порядка. Действительно, при $a_1 = a_2 = 0$ уравнение кривой имеет вид

$$\frac{y^2}{a^2} + 2\,\frac{a_{12}}{|a_0|}\,yz + \frac{z^2}{b^2} = 1, \qquad a_0 = -\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\,\frac{P_1}{2\nu} < 0.$$

При $D = a^{-2}b^{-2} - a_{12}^2 a_0^{-2} > 0$ кривая представляет собой эллипс [4], при $D < 0$ — гиперболу, при $D = 0$ — прямую.

В случае если в (2.7)

$$a_{12}^2 = \Big(\frac{a_1}{a} + \frac{a_0}{a^2}\Big)\Big(\frac{a_2}{b} + \frac{a_0}{b^2}\Big), \qquad a_1^2 + a_2^2 \neq 0,$$

имеем

$$a_1\sqrt{\Big|\frac{a_2}{b} + \frac{a_0}{b^2}\Big|} \pm a_2\sqrt{\Big|\frac{a_1}{a} + \frac{a_0}{a^2}\Big|} \neq 0$$

и контур представляет собой параболу.

Аналогичным образом можно найти решение задачи (2.5) в виде многочлена любой степени.

Вследствие разнообразия установившихся решений необходимо найти простые нестационарные инвариантные решения задачи (2.3). Сначала найдем группу Ли преобразований инвариантности однородного уравнения (2.3). С использованием известного алгоритма [4, 5] вычислим алгебру Ли L искомой группы. Базис алгебры зададим операторами

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad X_4 = 2t\,\partial_t + y\,\partial_y + z\,\partial_z - u\,\partial_u,$$
$$X_5 = 2\nu t\,\partial_y - yu\,\partial_u, \quad X_6 = 2\nu t\,\partial_z - zu\,\partial_u, \quad X_7 = y\,\partial_z - z\,\partial_y,$$
$$X_8 = 4t^2\,\partial_t + 4ty\,\partial_y + 4tz\,\partial_z - (4t^2 + \nu^{-1}(y^2+z^2))u\,\partial_u, \quad X_9 = u\,\partial_u,$$
$$\langle b\rangle = b(t,y,z)\,\partial_u, \qquad b_t = \nu\,\Delta b.$$

В таблице коммутаторов в пустых клетках должен быть нуль. Последняя строка в таблице отсутствует, поскольку является транспонированным последним столбцом, где вместо функции c использована функция $-b$, а коммутатор $[\langle b\rangle, \langle c\rangle] = 0$. Из таблицы следует, что бесконечная алгебра Ли L разлагается в полупрямую сумму абелева идеала $\langle b\rangle$ и подалгебру L_9:

$$L = L_9 \dot{\oplus} \langle b\rangle.$$

Подалгебра L_9 разлагается в полупрямую сумму идеала $L_6 = \{X_2, X_3, X_5, X_6, X_7, X_9\}$ и простую подалгебру $L_3 = \{X_1, X_4, X_8\}$:

$$L_9 = L_3 \dot{\oplus} L_6.$$

Подалгебра L_6 разлагается в полупрямую сумму абелева идеала $\{X_2, X_3, X_9\}$ и подалгебру $\{X_5, X_6, X_7\}$.

Коммутаторы алгебры L

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	$\langle c\rangle$
X_1				$2X_1$	$2X_2$	$2X_3$		$4X_4$		$\langle c_t\rangle$
X_2				X_2	$-X_9$		X_3	$2X_5$		$\langle c_y\rangle$
X_3				X_3		$-X_9$	X_2	$2X_6$		$\langle c_z\rangle$
X_4	$-2X_1$	$-X_2$	$-X_3$		X_5	X_6		$2X_8$		$\langle X_4c+c\rangle$
X_5	$-2X_2$	X_9		$-X_5$			X_6			$\langle X_5c+yc\rangle$
X_6	$-2X_3$		X_9	$-X_6$			$-X_5$			$\langle X_6c+zc\rangle$
X_7		$-X_3$	X_2		$-X_6$	X_5				$\langle X_7c\rangle$
X_8	$-4X_4$	$-2X_5$	$-2X_6$							$\langle X_8c+(4t^2+\nu^{-1}(y^2+z^2))\rangle$
X_9										$\langle -c\rangle$

Задача (2.3) путем замены $u_1 = u + p_1(t)$ приводится к однородному уравнению

$$u_{1t} = \nu(u_{1yy} + u_{1zz}) \tag{2.8}$$

и краевому условию

$$u_1 = p_1(t), \quad y = a(t)g(z), \quad g(0) = 1, \quad g(b) = 0 \tag{2.9}$$

с тремя произвольными функциями $a(t)$, $g(z)$, $p_1(t)$, которые выбираются таким образом, чтобы задача была инвариантной относительно некоторой подалгебры алгебры L.

Произвольный элемент алгебры L является линейной комбинацией базисных операторов

$$Y = x^iX_i + \langle b\rangle, \qquad i = 1,\dots,9.$$

Условие инвариантности первого уравнения в (2.9) относительно оператора Y имеет вид [5]

$$b = p_1'(x^1 + 2tx^4 + 4t^2x^8) + p_1(x^4 - x^9 + yx^5 + zx^6 + (4t^2 + \nu^{-1}(y^2 + z^2))x^8).$$

Функция b удовлетворяет уравнению (2.8):

$$p_1''(x^1+2tx^4+4t^2x^8)+p_1'(3x^4-x^9+agx^5+zx^6+(8t+4t^2+\nu^{-1}(a^2g^2+z^2))x^8)+4p_1(2t-1)x^8 = 0.$$

Дифференцируя последнее равенство по z и t, получаем

$$x^6 + ax^5g' + 2\nu^{-1}x^8(a^2gg' + z) = 0, \qquad a'g'(x^5 + 4agx^8\nu^{-1}) = 0,$$

откуда следует $x^8 = x^5 = x^6 = 0$,

$$\frac{p_1''}{p_1'} = \frac{x^9 - 3x^4}{x^1 + 2tx^4}. \tag{2.10}$$

Условие инвариантности второго уравнения в (2.9)

$$x^2 + x^4ag - x^7z = a'g(x^1 + 2x^4t) + ag'(x^3 + zx^4 + agx^7) \tag{2.11}$$

делим на g и дифференцируем по z и t. Получаем

$$x^7a'g'' = 0.$$

В случае если $x^7 = 0$, из (2.11) следует $x^2 = 0$,

$$g'(x^3 + zx^4) = Ng, \quad x^4 = a^{-1}a'(x^1 + 2x^4t) + N, \quad N = \text{const},$$

в случае если $x^4 = 0$, $g = G\,\mathrm{e}^{kz}$ и условия $g(0) = 1$, $g(b) = 0$ не выполняются.

Следовательно, $x^4 \neq 0$, $N \neq 0$, $g = (1 - zb^{-1})^k$, $x^3 = -bx^4$, $N = kx^4$,

$$a = A(t - t_0)^{(1-k)/2}, \qquad x^1 = -2t_0 x^4, \qquad k \neq 1.$$

Из (2.10) находим

$$p_1 = \frac{2P_1}{m-1}\,(t - t_0)^{(m-1)/2} + P_0, \qquad x^9 = mx^4.$$

При $x^7 \neq 0$ имеем $g'' = 0$, откуда следует $g = 1 - zb^{-1}$.

Расщепляя (2.11) по z, получаем

$$(a'/b)(x^1 + 2x^4 t) = (a^2/b^2 + 1)x^7,$$

$$x^2 - bx^7 + a(x^4 + x^3/b) = 0, \qquad x^2 = bx^7, \quad x^3 + bx^4 = 0.$$

При $x^4 = 0$ имеем $x^3 = 0$, $x^7 = kx^1$, $x^9 = nx^1$,

$$a = b\,\mathrm{tg}\,(kt), \qquad p_1 = n^{-1}P_1(\mathrm{e}^{nt} - 1) + P_0,$$

при $x^4 \neq 0$ $\;x^1 + 2t_0x^4 = 0$, $x^7 = 2nx^4$, $x^9 = mx^4$,

$$a = b\,\mathrm{tg}\,(n \ln|t - t_0|), \quad p_1 = \frac{2P_1}{m-1}\,(|t - t_0|^{(m-1)/2} - 1) + P_0.$$

Пусть v, w — постоянные средние по сечению S значения. Тогда из (2.1) следует

$$\begin{gathered} u = u(t, y, z), \qquad p = \rho p_1'(t)x + p_0(t), \\ u_t + vu_y + wu_z = \nu(u_{yy} + u_{zz}) - p_1'(t), \qquad u\big|_{\partial S} = 0. \end{gathered} \tag{2.12}$$

Из стационарных решений (2.6) для прямолинейного контура $g = 1 - zb^{-1}$ получаем систему уравнений для коэффициентов

$$va_{11} + wa_{12} = 0, \qquad va_{12} + wa_{22} = 0, \qquad va_1 + wa_2 = 2\nu(a_{11} + a_{22}) - P_1,$$

$$a_{11}a^2 - 2a_{12}ab + a_{22}b^2 = 0, \qquad 2a_{11}a^2 + aa_1 = 2aba_{12} + a_2 b,$$

$$a_{11}a^2 + aa_1 + a_0 = 0.$$

Отсюда следуют соотношения

$$a_{12}(wa + vb) = 0, \qquad aa_1 = a_2 b.$$

При $a_{12} = 0$ решение является линейной функцией

$$u = P_1\,\frac{by + az - ab}{wa - vb},$$

при $a_{12} \neq 0$ решение имеет вид

$$aw + bv = 0, \qquad u = (by + az - ab)\Big(\frac{P_1}{2\nu}\,\frac{by + az + a^2b^2}{a^2 + b^2} - \frac{a_1}{b}\Big).$$

Решение (2.6) для контура, являющегося алгебраической кривой второго порядка с условиями (2.5), принимает вид

$$u = k(-(wy - vz)^2 + aw^2 y + bv^2 z) + a_0(1 - y/a - z/b),$$

$$k = \frac{a_0(va^{-1} + wb^{-1}) - P_1}{w^2(av + 2\nu) + v^2(bw + 2\nu)}.$$

Контур задается параболой. Таким образом, получается три стационарных простых решения.

Для того чтобы найти нестационарные простые решения, выполним замену

$$y_1 = y - vt, \qquad z_1 = z - wt, \qquad u_1 = u + p_1(t),$$

вследствие чего задача (2.12) принимает вид

$$u_{1t} = \nu(u_{1y_1y_1} + u_{1z_1z_1}), \qquad u_1 = p_1(t) \quad \text{при} \quad y_1 + vt = ag(z_1 + wt).$$

Находим подалгебру из алгебры L, которая сохраняет инвариантными краевые условия специального вида.

Как и ранее, равенство $u_1 = p_1(t)$ инвариантно относительно оператора $Y \in L$ лишь при $x^5 = x^6 = x^8 = 0$ и $p_1(t)$ удовлетворяет (2.10). Условие инвариантности контура принимает вид

$$x^2 + x^7wt + v(x^1 + x^4t) + ax^4g - x^7z =$$
$$= a'(x^1 + 2x^4t) + ag'[x^3 - x^7vt + w(x^1 + x^4t) + x^4z + x^7ag]. \qquad (2.13)$$

В равенство (2.13) входят функции, зависящие только от t, и функции, зависящие только от z, поэтому можно разделить переменные. Дифференцируя (2.13) по z и деля на a, находим

$$-\frac{x^7}{a} = \frac{a'}{a}\,g'(x^1 + 2x^4t) + g''[x^3 - x^7vt + w(x^1 + x^4t)] + x^4zg'' + x^7a(g'^2 + gg'').$$

Дифференцируя по t и деля на g', получаем

$$-\frac{x^7a'}{a^2g'} = \Big(\frac{a'}{a}\Big)'(x^1 + 2x^4t) + 2x^4\,\frac{a'}{a} + \frac{g''}{g'}\,(wx^4 - vx^7) + x^7a'\Big(g' + \frac{gg''}{g'}\Big).$$

Дифференцируя по z и t, получаем

$$x^7\Big[a''\Big(g' + \frac{gg''}{g'}\Big)' + \Big(\frac{a'}{a^2}\Big)'\,\frac{g''}{g'^2}\Big] = 0.$$

Можно показать, что при $x^7 \neq 0$ уравнение (2.13) не имеет решения. При $x^7 = 0$ имеем равенство

$$\Big(\frac{a'}{a}\,(x^1 + 2x^4t)\Big)' = -\frac{g''}{g'}\,x^4w = N = \mathrm{const}\,. \qquad (2.14)$$

Из (2.13), (2.14) находим

$$\begin{gathered} a'(x^1 + 2x^4t) = a(Nt + C), \qquad g'x^4w + Ng + D = 0, \\ a^{-1}(x^2 + v(x^1 + x^4t)) + tD = g(c - x^4) + g'(wx^1 + x^3 + x^4z) = M, \end{gathered} \qquad (2.15)$$

где C, D, M — постоянные.

При $D \neq 0$ a — постоянная и $g = 1 - zb^{-1}$, $aw + bv = 0$,

$$x^2 = -a(x^4 + b^{-1}x^3), \qquad wx^4 \neq 0, \qquad x^9 = kx^4, \qquad x^1 = -2t_0x^4,$$

$$p_1 = \frac{2P_1}{k-1}\,|t - t_0|^{(k-1)/2} \quad (k \neq 1), \qquad p_1 = P_1 \ln|t - t_0| \quad (k = 1).$$

Операторы инвариантности имеют вид

$$\begin{gathered} Y_1 = 2(t - t_0)\,\partial_t + (y_1 - a)\,\partial_{y_1} + z_1\,\partial_{z_1} + (k-1)u_1\,\partial_{u_1} \quad (k \neq 1), \\ Y_1 = 2(t - t_0)\,\partial_t + (y_1 - a)\,\partial_{y_1} + z_1\,\partial_{z_1} + 2P_1\,\partial_{u_1} \quad (k = 1), \\ Y_2 = -a\,\partial_{y_1} + b\,\partial_{z_1}. \end{gathered} \qquad (2.16)$$

При $D = 0$ возможны три решения уравнений (2.15):

1) $x^4 = 0$, $x^3 = -wx^1$, $x^2 = -vx^1$, a — постоянная, $g(z)$ — любая функция,

$$x^9 = kx^1, \qquad p_1 = k^{-1} P_1 \, \mathrm{e}^{kt} \quad (k \neq 0), \qquad p_1 = P_1(t - t_0) \quad (k = 0),$$

$$Y = \partial_t - v \, \partial_{y_1} - w \, \partial_{z_1} + k u_1 \, \partial_{u_1} \qquad (k \neq 0),$$

$$Y = \partial_t - v \, \partial_{y_1} - w \, \partial_{z_1} + P_1 \, \partial_{u_1} \qquad (k = 0);$$

2) $x^4 = 0$, a — постоянная, $g = 1 - zb^{-1}$,

$$x^3 = -wx^1 - bM, \qquad x^2 = -vx^1 + Ma, \qquad x^9 = kx^1,$$

$$p_1 = k^{-1} P_1 \, \mathrm{e}^{kt} \quad (k \neq 0), \qquad p_1 = P_1(t - t_0) \quad (k = 0),$$

$$Y_1 = \partial_t - v \, \partial_{y_1} - w \, \partial_{z_1} + k u_1 \, \partial_{u_1} \qquad (k \neq 0),$$

$$Y_1 = \partial_t - v \, \partial_{y_1} - w \, \partial_{z_1} + P_1 \, \partial_{u_1} \qquad (k = 0),$$

$$Y_2 = a \, \partial_{y_1} - b \, \partial_z;$$

3) $w = 0$, $a = -\gamma b v(t - t_0)$, $g = (1 - b^{-1}z)(1 + \gamma z)^{-1}$,

$$x^1 = -2t_0 x^4, \quad x^2 = t_0 v x^4, \quad x^3 = \gamma^{-1} x^4, \quad x^9 = kx^4,$$

$$p_1 = \frac{2P_1}{k - 1} \, |t - t_0|^{(k-1)/2} \quad (k \neq 1), \qquad p_1 = P_1 \ln |t - t_0| \quad (k = 1),$$

$$Y = 2(t - t_0) \, \partial_t + (y_1 + t_0 v) \, \partial_{y_1} + (z_1 + \gamma^{-1}) \, \partial_{z_1} + (k - 1) u_1 \, \partial_{u_1} \qquad (k \neq 1),$$

$$Y = 2(t - t_0) \, \partial_t + (y_1 + t_0 v) \, \partial_{y_1} + (z_1 + \gamma^{-1}) \, \partial_{z_1} + 2P_1 \, \partial_{u_1} \qquad (k = 1).$$

3. Модели раскрытия трещины. С использованием операторов инвариантности можно найти инвариантные решения задачи (2.12). Приближенная модель раскрытия трещины, основанная на простом инвариантном решении, строится по формулам (1.2), (1.3), (1.5)–(1.8).

При $v = w = 0$ для эллиптического профиля получаем [9]

$$S = \pi ab, \qquad L(a) = 4 \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 + (-a^2 + b^2) \cos^2 \varphi} \, d\varphi,$$

$$p = \rho P_1 x + p_0(t) = E' a, \quad p_x = \rho P_1 = E' a_x, \quad u = a_0 \Big(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} \Big), \quad a_0 = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \, \frac{P_1}{2\nu},$$

$$Q = -\frac{1}{2} \, \pi \, \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \, \frac{P_1}{2\nu} = -\frac{\pi}{4\nu} \, \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \, \frac{E'}{\rho} \, a_x = -\frac{\pi E'}{8\nu\rho} \, b^3 \, (a^2 - b^2 \ln (a^2 + b^2))_x.$$

Уравнения (1.2) представляют собой модель раскрытия трещины

$$\pi b a_t - \frac{\pi E' b^3}{8\nu\rho} \, (a^2 - b^2 \ln (a^2 + b^2))_{xx} + qL(a) = 0.$$

В качестве зависимости скорости фильтрации на границе $g(x,t)$ можно использовать автомодельный закон [10]

$$q = \frac{C}{a+\alpha}\left[1 - \exp\left(\sigma(p_\infty - p_0(t)) - E'(xa_x + a)\right)\right],$$

где C, p_∞, α — постоянные. На скачке раскрытия трещины $x = l(t)$ выполняется условие (1.4):

$$l'(1-m) + \frac{E'b^2}{4\nu\rho}\,\frac{a_x a^2}{a^2+b^2} + \frac{C}{a+\alpha}\left[1 - \exp\left(\sigma(p_\infty - p_0(t)) - E'(la_x + a)\right)\right] = 0.$$

Решение (2.16) при $k = 1$ инвариантно относительно Y_1 и Y_2. Инвариант операторов

$$I = \frac{b}{\sqrt{|t-t_0|}}\Big(y_1 - a\Big(1 - \frac{z_1}{b}\Big)\Big) = \frac{b}{\sqrt{|t-t_0|}}\Big(y - a\Big(1 - \frac{z}{b}\Big)\Big)$$

задает инвариантное решение, удовлетворяющее краевой задаче

$$2\nu(a^2+b^2)U'' + IU' = 2P_1, \qquad U = 0 \quad \text{при} \quad I = 0.$$

При этом

$$u_1 = P_1 \ln|t-t_0| + U(I), \qquad u = u_1 - p_1 = U(I).$$

Решение задачи имеет вид $\nu_1 = 4\nu(a^2+b^2)$,

$$U = U_1\int\limits_0^I \mathrm{e}^{-s^2\nu_1^{-1}}\,ds + \frac{p_1}{\nu(a^2+b^2)}\int\limits_0^I \mathrm{e}^{-s^2\nu_1^{-1}}\Big(\int\limits_0^s \mathrm{e}^{\lambda^2\nu_1^{-1}}\,d\lambda\Big)\,ds.$$

Следуя [9], из закона Гука находим

$$p = \frac{\rho x P_1}{t-t_0} + p_0(t) = E'a, \qquad \frac{\rho P_1}{t-t_0} = E'a_x.$$

Для построения модели с использованием формул (1.5)–(1.8) получаем

$$S = 2ab, \qquad L = 4\sqrt{a^2+b^2},$$

$$Q = 4\int\limits_0^b dz\int\limits_0^{ag(z)} U(I)\,dI = U_1Q_1(a,t) + \frac{P_1}{\nu(a^2+b^2)}\,Q_2(a,t) = U_1Q_1 + \frac{E'(t-t_0)Q_2}{\rho\nu(a^2+b^2)}\,a_x,$$

$$Lq = \int\limits_0^b v(a_x^2g^2 + 1 + a^2g'^2)\,dz = -aw\Big(1 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{1}{3}\,a_x^2\Big).$$

Тогда уравнение (1.2) принимает вид

$$2ba_t + \Big[U_1Q_{1a} + \frac{E'(t-t_0)}{\rho\nu}\Big(\frac{Q_2}{a^2+b^2}\Big)_a\Big]a_x + \frac{E'(t-t_0)Q_2}{\rho\nu(a^2+b^2)}\,a_{xx} = aw\Big(1 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{1}{3}\,a_x^2\Big).$$

Другие инвариантные решения позволяют построить различные модели раскрытия трещины. Для выбора подходящей модели необходимо учитывать априорные представления о профиле и информацию о режиме закачки (изменениях давления и расхода жидкости в скважине).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Баренблатт Г. И.** Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа / Г. И. Баренблатт, В. М. Ентов, В. М. Рыжик. М.: Недра, 1972.
2. **Есипов Д. В., Куранаков Д. С., Лапин В. Н., Черный С. Г.** Математические модели гидроразрыва пласта // Вычисл. технологии. 2013. Т. 19, № 2. С. 33–61.
3. **Самарский А. А.** Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов. М.: Наука, 1987.
4. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
5. **Чиркунов Ю. А.** Элементы симметрийного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды / Ю. А. Чиркунов, С. В. Хабиров. Новосибирск: Новосиб. гос. техн. ун-т, 2012.
6. **Ландау Л. Д.** Теоретическая физика. Теория упругости / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1987.
7. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973.
8. **Тихонов А. Н.** Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. М.: Наука, 1977.
9. **Nordgren R. P.** Propagation of a vertical hydraulic fracture // Soc. Petrol. Engng J. 1972. V. 12. P. 306–314.
10. **Хабиров С. В., Хабиров С. С.** Автомодельный упругий режим фильтрации через подвижную границу // Многофаз. системы. 2018. Т. 13, № 1. С. 64–72.

Поступила в редакцию 15/XI 2018 г.,
после доработки — 15/XI 2018 г.
Принята к публикации 26/XI 2018 г.