

ЛИТЕРАТУРА

1. Слепян Л. И. Нестационарные упругие волны. Л., «Судостроение», 1972.
2. Press F., Ewing M. Theory of air-coupled flexural waves.— «J. Appl. Phys.», 1951, vol. 22, N 7, p. 892—899.
3. Гусейн-Заде М. И. Удар по бесконечной пластинке, лежащей на упругом жидком полупространстве.— «Докл. АН СССР», 1957, т. 113, № 3, с. 523—526.
4. Корчагин В. С. Осесимметричный удар по пластине, лежащей на поверхности сжимаемой жидкости.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1967, № 5, с. 168—174.
5. Кубенко В. Д. Пружне деформування пластинки під дією слабкої ударної сферичної хвилі у стаєливій ріднині.— «Доповіді АН УРСР», 1972, А, № 3, с. 237—240.
6. Huang H. Transient bending of a large elastic plate by an incident spherical pressure wave.— «Trans. ASME», 1974, vol. E41, N 3, p. 772—776.
7. Афанасьев Е. Ф. Удар тела о тонкую пластину, лежащую на поверхности сжимаемой жидкости.— ПММ, 1964, т. 28, вып. 5, с. 868—879.
8. Solecki R. Vibrations of floating plate.— «Bulletin de l'academie polonaise des sciences. Serie des sciences techniques», 1966, vol. XIV, N 11—12, p. 647—650.
9. Norwood F. R., Warren W. E. Transient response of a plate-fluid system to stationary and moving pressure loads.— «Rozprawy inzynierskie», 1975, t. 23, N 2, p. 359—372.
10. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М., «Выш. школа», 1965.
11. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., «Наука», 1968.
12. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1962.

УДК 532.526

АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ВЕЕРНЫХ СТРУЙ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ ЗАКРУТКИ

Е. М. Смирнов
(Ленинград)

Известны решения [1—4] задачи о распространении закрученных веерных (радиальных) струй в затопленном пространстве. В работах [1, 2] получены зависимости, справедливые на расстоянии, значительно превосходящем радиус круговой щели, где струя всегда слабозакрученная. При разыскании решения для струи, истекающей из бесконечно узкой щели конечного радиуса, предположение о слабозакрученности струи в [3] введено как дополнительное. В работе [4], где для ламинарной струи со значительной закруткой найдено несколько членов асимптотического разложения по обратным степеням расстояния от сопла, остается открытым вопрос об определении постоянных интегрирования.

В данной работе показано, что задача о распространении веерной струи, истекающей из бесконечно узкой щели конечного радиуса, имеет автомодельное решение при любой степени закрутки струи.

1. В приближении теории пограничного слоя уравнения, описывающие течение в закрученных веерных ламинарных или турбулентных струях несжимаемой жидкости, в цилиндрической системе координат x, y, φ (ось x направлена перпендикулярно оси симметрии, φ — полярный угол) имеют вид

$$(1.1) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{w^2}{x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_x}{\partial y};$$

$$(1.2) \quad u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{uw}{x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_\varphi}{\partial y};$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial(xu)}{\partial x} + \frac{\partial(xv)}{\partial y} = 0,$$

где u, v, w — компоненты вектора скорости в направлении осей x, y, φ ; τ_x, τ_φ — составляющие касательного напряжения трения в направлении осей x, φ ; ρ — плотность жидкости.

Рассмотрим вначале затопленную свободную струю. Тогда система (1.1)—(1.3) должна интегрироваться при следующих граничных условиях:

$$(1.4) \quad \begin{cases} u = 0, & w = 0 \text{ при } y = \pm \infty; \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 & \text{при } y = 0. \end{cases}$$

Цель данной работы — нахождение автомодельного решения, поэтому начальное условие утрачивает свое значение. Два интегральных условия сохранения, необходимые для полной определенности задачи, будут получены в ходе решения.

Примем широко распространенную гипотезу о том, что не только для ламинарных, но и для турбулентных течений типа пограничного слоя справедливо соотношение

$$(1.5) \quad \frac{\tau_x}{\partial u / \partial y} = \frac{\tau_\varphi}{\partial w / \partial y}.$$

2. Уравнения (1.1)—(1.3) и граничные условия (1.4) не накладывают ограничения на предположение о подобии профилей продольной и вращательной компонент скорости в каждом сечении. Таким образом, положим

$$(2.1) \quad w(x, y) = \lambda(x)u(x, y).$$

Подставляя (1.5), (2.1) в (1.1), (1.2), убедимся, что при

$$(2.2) \quad \lambda = (Dx^2 - 1)^{-1/2},$$

где D — постоянная, уравнения (1.1), (1.2) приводятся к одинаковому виду

$$(2.3) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\lambda^2 u^2}{x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_x}{\partial y}.$$

Следовательно, второе из этих уравнений при дальнейшем рассмотрении можно опустить.

Выполним преобразование переменных системы уравнений (2.3), (1.3)

$$(2.4) \quad \begin{cases} x_1 = \int_{x_0}^x f(x/x_0) dx, & y_1 = y\omega x/x_0, \\ u_1 = u/\omega, & v_1 = \frac{x}{x_1 f(x/x_0)} \left[v + \frac{yu}{x\omega} \frac{d(x\omega)}{dx} \right], \end{cases}$$

где $\omega = \omega(x) = (1 + \lambda^2)^{-1/2}$; $f(x/x_0)$ — некоторая функция, определенная ниже; $x = x_0$ соответствует начальному сечению, в частности радиусу круговой щели, из которой вытекает струя. В результате применения преобразования (2.4) к уравнениям (2.3), (1.3) получим систему

$$(2.5) \quad \begin{cases} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} = \frac{x}{\rho \omega x_0 f(x/x_0)} \frac{\partial \tau_x}{\partial y_1}, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} = 0, \end{cases}$$

в точности совпадающую с системой уравнений, описывающих течение в плоских струях, если

$$(2.6) \quad \tau_1 = \frac{x\tau_x}{\omega x_0 f(x/x_0)}.$$

Граничные условия (1.4) преобразуются в граничные условия для плоской затопленной струи.

Пусть удастся подобрать функцию $f(x/x_0)$ такую, что выполняется (2.6). Тогда задачу о распространении свободной закрученной веерной струи, вытекающей из бесконечно узкой щели в затопленное пространство, преобразование (2.4) совместно с (1.5), (2.1) сводит к задаче о плоской свободной струе-источнике. Последняя автомодельна как при ламинарной [5], так и при турбулентной [6] форме движения. Следовательно, исходная задача также имеет автомодельное решение.

Не выписывая известных [5, 6] решений для плоских струй-источников, напомним только, что эти решения, помимо физических характеристик жидкости, определяются единственной величиной — импульсом струи. Выразим эту величину через интегральные характеристики закрученной веерной струи.

Для плоской затопленной струи справедливо интегральное условие сохранения

$$\rho \int_{-\infty}^{+\infty} u_1^2 dy_1 = K = \text{const},$$

которое в переменных, описывающих распространение веерной струи, согласно (2.4), имеет вид

$$(2.7) \quad 2\pi\rho x \sqrt{\frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_0^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dy = J = \text{const},$$

где

$$J = 2\pi\rho x_0 \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x_0, y) dy;$$

$\lambda = \lambda_0$ при $x = x_0$, а величины J и K связаны соотношением

$$(2.8) \quad K = \frac{J \sqrt{1+\lambda_0^2}}{2\pi x_0}.$$

Непосредственно из интегрирования (1.2) поперек струи следует

$$2\pi\rho x^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u w dy = L = \text{const}$$

или при использовании (2.1), (2.7)

$$(2.9) \quad \lambda x J \sqrt{\frac{1+\lambda_0^2}{1+\lambda^2}} = L.$$

Полагая в (2.9), (2.2) $\lambda = \lambda_0$ при $x = x_0$, получим

$$(2.10) \quad \lambda_0 = \frac{L}{J x_0}, \quad D = \frac{1 + (J x_0/L)^2}{x_0^2}.$$

Таким образом, величина K , входящая в решение для плоской струи, полностью определена через интегральные характеристики веерной струи.

Найдем далее требуемый вид функции $f(x/x_0)$. В случае ламинарных струй (μ — коэффициент динамической вязкости)

$$\tau_1 = \mu \frac{\partial u_1}{\partial y_1} = \frac{\mu x_0}{\omega^2 x} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x_0 \tau_x}{\omega^2 x},$$

что в совокупности с (2.6) определяет $f(x/x_0) = \omega(x/x_0)^2$.

При рассмотрении свободных турбулентных течений можно пренебречь молекулярным переносом по сравнению с турбулентным. Используя, например, обобщенную гипотезу пути смешения [7], запишем

$$(2.11) \quad \tau_x = \rho l^2 \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \tau_1 = \rho l_1^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\right)^2.$$

Примем, что пути смешения l и l_1 пропорциональны соответствующему характерному поперечному размеру δ и δ_1 , т. е. $l = c_0 \delta$, $l_1 = c_1 \delta_1$, где c_0 , c_1 — эмпирические постоянные. Сравнивая (2.6) и (2.11) и учитывая (2.1), (2.4), будем иметь для турбулентной формы движения

$$(2.12) \quad f(x/x_0) = n^2 x/x_0.$$

Здесь множитель $n^2 = (c_0/c_1)^2$ учитывает возможное несовпадение коэффициентов пропорциональности пути смешения характерному поперечному размеру для вверных и плоских струй. При использовании других простейших гипотез турбулентности вид (2.12) функции $f(x/x_0)$ сохраняется.

Для ламинарных полуограниченных вверных струй, истекающих из бесконечно узкой щели конечного радиуса и обладающих произвольной степенью закрутки, также оказывается возможным получение автомодельного решения. По сравнению со свободной струей в постановке задачи для полуограниченной изменяются лишь граничные условия, которые теперь имеют вид

$$\begin{cases} u = w = v = 0 & \text{при } y = 0, \\ u = w = 0 & \text{при } y = \infty. \end{cases}$$

Можно проследить, что преобразование (2.4) совместно с (2.1), (2.2) сводит эту задачу к плоской задаче о полуограниченной струе, вытекающей из бесконечно узкой щели. Последняя имеет автомодельное решение, полученное в [8]. При этом интегральная величина

$$N = \rho \int_0^\infty u_1^2 \left(\int_0^{y_1} u_1 dy_1 \right) dy_1 = \text{const},$$

входящая в решение для плоской струи, выражается через интегральные характеристики закрученной вверной струи аналогичным (2.8), (2.10) образом:

$$N = \frac{E}{2\pi x_0} \sqrt{1 + \lambda_0^2}, \quad \lambda_0 = \frac{M}{E x_0},$$

где (см. [2])

$$E = 2\pi \rho x_0^2 \int_0^\infty u^2(x_0, y) \left[\int_0^y u(x_0, y) dy \right] dy;$$

$$M = 2\pi \rho x^3 \int_0^\infty u w \left(\int_0^y u dy \right) dy = \text{const}.$$

В заключение заметим, что все найденные ранее решения для слабо-закрученных вверных струй получаются как частный случай из результатов данной работы.

Поступила 6 X 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Радиально-щелевая струя в пространстве, затопленном той же жидкостью.— «Труды Ленингр. политехн. ин-та», 1953, № 5.
2. Пуккер М. С. Ламинарная несжимаемая струя, бьющая из радиального диффузора вдоль стенки.— ПММ, 1954, т. 18, вып. 6.
3. Шахов В. Г. Слабозакрученная радиально-щелевая струя, истекающая из кольцевого сопла конечного диаметра.— ИФЖ, 1969, т. 16, № 3.
4. O'Nan M., Schwarz W. H. The swirling radial free jet.— «Appl. Scient. Res.», 1965, vol. A 15, N 4—5.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1974.
6. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. М., Физматгиз, 1960.
7. Лойцянский Л. Г. Распространение закрученной струи в безграничном пространстве, затопленном той же жидкостью.— ПММ, 1953, т. 17, вып. 1.
8. Акатнов Н. П. Распространение плоской ламинарной струи несжимаемой жидкости вдоль твердой стенки.— «Труды Ленингр. политехн. ин-та», 1953, № 5.

УДК 532.5

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ В УПРУГОМ КАНАЛЕ

О. Ю. Цвелодуб

(Новосибирск)

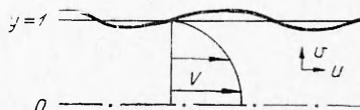
Устойчивость ламинарного пограничного слоя на поверхности мембранного типа рассматривалась в [1, 2], а устойчивость течения Пуазейля между мембранами — в [3, 4]. В [5] в качестве границ канала брались стенки с линейной связью между возмущением давления и нормальной деформацией поверхности. Устойчивость профиля $V = \sin y (0 \leq y \leq \pi)$ численно рассматривалась в [6]. В данной работе исследуется устойчивость течения Пуазейля в канале, стенками которого являются упругие пластинки. В отличие от работ [3, 5, 6] наряду с пульсациями давления так же, как в [4], учтены пульсации трения на стенках канала. Показано, что при их учете происходит существенная перестройка областей неустойчивости. Найдена область неустойчивости, существующая при любых конечных числах Рейнольдса.

Рассматривается поток в канале со стенками $y = \pm 1$, профиль скорости которого $V \equiv V_x = 1 - y^2$ (фиг. 1). Для нормальных и касательных смещений верхней пластинки имеем [7]

$$(1) \quad \rho_0 h \partial^2 \tilde{\xi} / \partial t^2 = -Eh^3 / [12(1 - \sigma^2)] \partial^4 \tilde{\xi} / \partial x^4 + p - \tau_{yy};$$

$$(2) \quad \rho_0 h \partial^2 \tilde{\beta} / \partial t^2 = Eh / (1 - \sigma^2) \partial^2 \tilde{\beta} / \partial x^2 + \tau_{xy},$$

где $\tilde{\xi}$ и $\tilde{\beta}$ — соответственно нормальное и касательное смещение точки пластинки от положения в состоянии покоя; ρ_0 и h — плотность и толщина пластинки; E — модуль Юнга; σ — коэффициент Пуассона; $p - \tau_{yy}$ и τ_{xy} — нормальное и касательное напряжения, вызванные пульсациями скоростей возмущающего движения. Уравнения записаны в безразмерном виде, соответствующие величины отнесены к полуширине канала,



Фиг. 1