СЖАТИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В СХЛОПЫВАЮЩЕЙСЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ

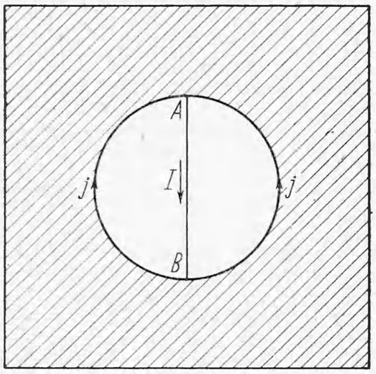
В. К. Бодулинский, Ю. А. Медведев
(Москва)

Найдены решения уравнений, описывающих сжатие магнитного поля, создаваемого системой меридианальных токов, в схлопывающейся сферической полости.

Задача об обжатии магнитного поля между двумя сближающимися идеально проводящими плоскостями была рассмотрена методом характеристик в [1,2]. В [2] рассмотрена аналогичная задача для цилиндрической геометрии. Задача решалась методом интегральных преобразований. Результаты решения этих задач могут быть пригодны к описанию физических явлений, протекающих в системах, имеющих преимущественный размер.

В ряде случаев, например в опытах, описанных в [3], наиболее важная конечная стадия обжатия поля протекает в объеме, не имеющем заметно выраженного преимущественного размера. В связи с этим ниже рассматривается задача о сжатии магнитного поля в сферической полости. В отличие от случая цилиндрической геометрии [2] данная задача допускает более простые и более обозримые решения.

1. Рассмотрим электродинамическую задачу о сжатии начального магнитного поля в схлопывающейся сферической полости в идеально проводящем поле. Ограничимся случаем линейной зависимости радиуса полости от времени



$$a(t) = a_0 - vt \tag{1.1}$$

где a_0 — начальный радиус полости.

Отметим, что из экспериментальной зависимости $a(t)$, приведенной в [1], следует, что на практике соотношение (1.1) достаточно хорошо выполняется вплоть до момента времени, близкого ко времени максимального сжатия.

В качестве начального поля выберем поле, создаваемое аксиально-симметричной системой токов, схематически представленной на фигуре. Система поверхностных меридиональных токов j^* (суммарный ток I) в точке A втекает в диаметральный проводник AB и растекается по поверхности из точки B.

Из симметрии следует, что в сферической системе координат с началом в центре сферы могут быть отличны от нуля компоненты H_φ, E_ϑ и E_r. Непосредственно из уравнений Максвелла следует, что в начальный момент производные радиальной компоненты по времени всех порядков оказываются равными нулю, так что радиальная компонента не возбуждается при схлопывании.

Поэтому приходим к следующей задаче. Требуется найти решения уравнений Максвелла с начальными

$$H_\varphi(r, \vartheta, 0) = \begin{cases} Ir^{-1}(\sin\vartheta)^{-1} & (r \leqslant a_0) \\ 0 & (r > a_0) \end{cases} \qquad E_\vartheta(r, \vartheta, 0) = 0 \tag{1.2}$$

и граничным

$$E_\vartheta(a(t), \vartheta, t) - a^{\cdot}c^{-1} H_\varphi(a(t), \vartheta, t) = 0 \tag{1.3}$$

условиями. Последнее должно выполняться на идеально проводящей поверхности [4], движущейся со скоростью da / dt.

Уравнения, граничное и начальное условия допускают отделение угловой переменной, если положить

$$H_\varphi(r, \vartheta, t) = (\sin\vartheta)^{-1} h(r, t), \quad E_\vartheta(r, \vartheta, t) = (\sin\vartheta)^{-1} e(r, t) \tag{1.4}$$

2. Отделяя угловую зависимость и исключая функцию $e(r, t)$ из уравнений, граничного и начального условий, приходим к задаче

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial h}{\partial r} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = 0, \quad h(r, 0) = \frac{I}{r}, \quad \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial r}\right)_{r=a} + \frac{a^{\cdot}}{c^2}\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_{r=a} + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}[a^{\cdot} h(a, t)] = -(1+\beta^2)\frac{h(a, t)}{a} \tag{2.1}$$

$$(\beta = v / c = -a^{\cdot} / c)$$

Решаем задачу (2.1) при помощи преобразования Фурье — Бесселя

$$\Phi(k, t) = \int_0^{a(t)} h(r, t)\, n_0(kr)\, r^2 dr \qquad \left(n_0(kr) = -\frac{\cos kr}{kr}\right) \tag{2.2}$$

$$h(r, t) = 2\pi^{-1} \int_0^{\infty} \Phi(k, t)\, n_0(kr)\, k^2 dk$$

Здесь n_0 — сферическая функция Неймана нулевого порядка. Выбор $n_0(kr)$ в качестве собственной функции обусловлен особенностью в начальном распределении (1.2) при $r = 0$.

После преобразования (2.2) задача (2.1) сводится к решению уравнений для $\Phi(k, t)$

$$d^2\Phi / dt^2 + k^2c^2\Phi = -c^2(1-\beta^2)\, ka^2\, j_0^{\cdot}(ka)\, h(a, t) \tag{2.3}$$

с начальными условиями

$$\Phi(k, 0) = -Ik^{-2}\sin ka_0, \quad (d\Phi / dt)_{t=0} = 0 \tag{2.4}$$

Решение, удовлетворяющее (2.3) и (2.4), имеет вид

$$\Phi(k, t) = -Ik^{-2}\sin ka_0 \cos kct -$$

$$-c(1-\beta^2)\int_0^t a^2(\tau)\, h^*(\tau)\, j_0^{\cdot}(ka(\tau))\sin kc(t-\tau)\, d\tau \tag{2.5}$$

$$(h^*(t) = h(a(t), t))$$

В (2.5) входит неизвестное поле на границе области. Для его определения воспользуемся формулой обращения (2.2), положив в ней $r = a(t)$ и удвоив интеграл в правой части, поскольку

$$h^*(t) = 2^{-1}[h(a(t)+0, t) + h(a(t)-0, t)], \quad h(a(t)+0, t) = 0$$

Тогда для $h^*(t)$ получаем следующее функциональное уравнение:

$$h^*(t) = \frac{I}{(1-\beta)\, a(t)} \qquad \left(0 < t < \frac{2\beta T}{1+\beta} = t_1,\ T = \frac{a_0}{v}\right)$$

$$h^*(t) = \gamma^2 h^*(\gamma(t - t_1)) \qquad (t_1 < t < T,\ \gamma = (1+\beta)/(1-\beta)) \tag{2.6}$$

Определим последовательность времен $\{t_n\}$ следующим образом:

$$c(t_n - t_{n-1}) = a(t_n) + a(t_{n-1}) \tag{2.7}$$

Из (2.7) получаем

$$t_n = T(1 - \gamma^{-n}) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Последовательность $\{t_n\}$ сходится к T при $n \to \infty$. Разности $t_n - t_{n-1}$ соответствуют времени, в течение которого волна проходит путь стенка—центр—стенка. С учетом всего сказанного решение уравнения (2.6) имеет вид

$$h^*(t) = \gamma^{n-1}(1-\beta)^{-1} I\, [a(t)]^{-1} \qquad (t_{n-1} < t < t_n) \tag{2.8}$$

Подставляя (2.8) в (2.5), а затем в (2.2), находим искомое решение

$$h(r, t) = \begin{cases} Ir^{-1}, & 0 < t < c^{-1}(a_0 - r) \\ {}^1/_2 Ir^{-1}\gamma^n(\gamma + 1), & t_n + c^{-1}[a(t_n) - r] < t < t_n + c^{-1}[a(t_n) + r] \\ Ir^{-1}\gamma^{n+1}, & t_n + c^{-1}[a(t_n) + r] < t < t_{n+1} + c^{-1}[a(t_{n+1}) - r] \end{cases}$$

Поступила 27 VIII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. F o w l e r C. M., G a r n W. B., C a i r d R. S. Production of very high magnetic fields by implosion. J. Appl. Phys., 1960, vol. 31, No. 3.
2. Р у т к е в и ч И. М. Электромагнитное поле в сжимающейся полости. ПММ, 1967, т, 31, вып. 3, стр. 552—559.
3. С а х а р о в А. Д. Взрывомагнитные генераторы. Усп. физ., н., 1966, т. 88, вып. 4.
4. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Теоретическая физика, т. 2. Теория поля. М., Физматгиз, 1962.